SEÇÃO DE ENSINO DE ENGENHARIA DE FORTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO

Pós-graduação em Engenharia de Transportes

Elasticidade aplicada à Infraestrutura de Transportes

MAJ MONIZ DE ARAGÃO

DEFORMAÇÕES:

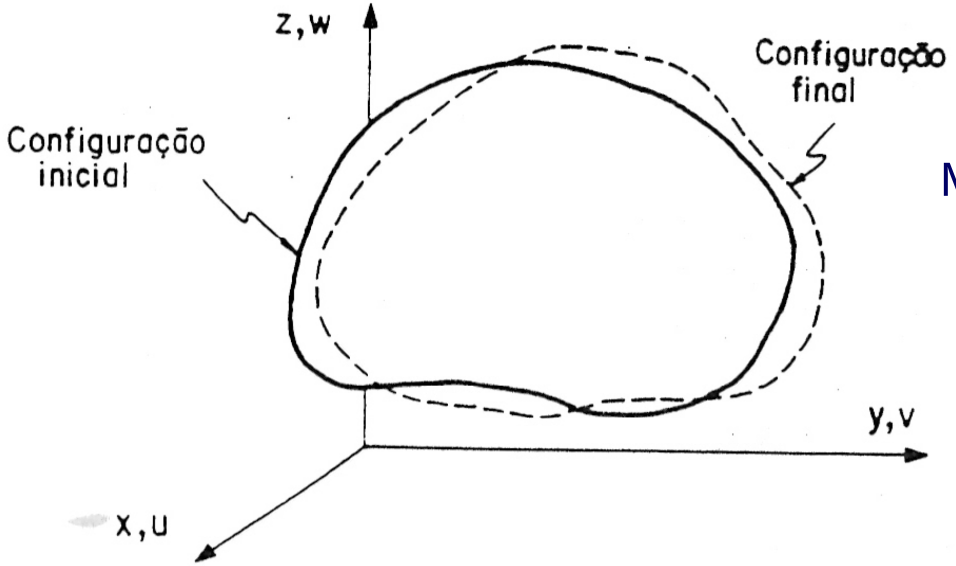
- Campo de deslocamentos; Componentes de deformação; Relações deformação-deslocamento; Deformação linear específica numa direção qualquer; Deformações Principais.

Referências bibliográficas:

- *Introdução à Teoria da Elasticidade*, Villaça, S. F., Taborda Garcia, L. F., COPPE/UFRJ, 4ª Ed., 2000.
- *Theory of Elasticity*, Timoshenko, S. P., Goodier, J.N., McGraw-Hill Classic Textbook Reissue Series, 3rd Ed., 1970.

Deformações:
Campo de deslocamentos

Solicitações externas atuando em um corpo deformável:

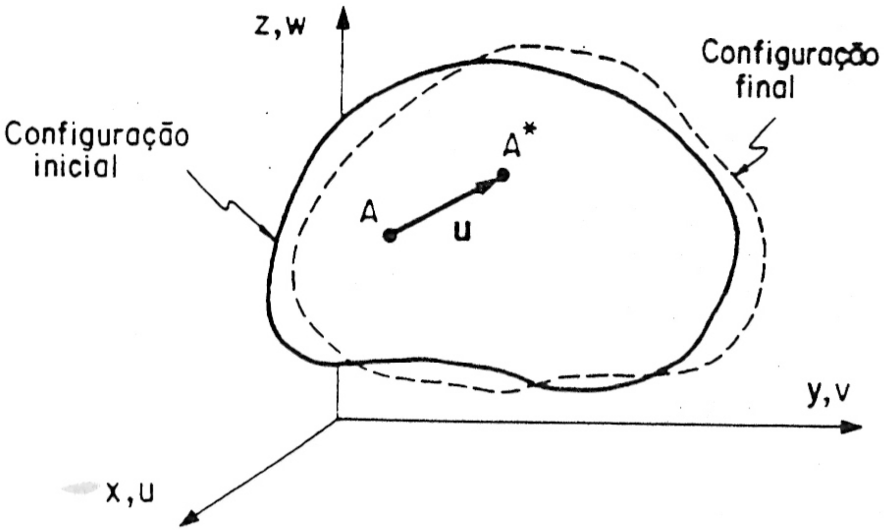


Mudança de forma e dimensões

Configuração inicial indeformada $\Rightarrow$ Configuração final deformada

Deformações:
Campo de deslocamentos

Um ponto **A** do corpo, que na configuração inicial tem as coordenadas x, y, z, sofre um deslocamento **u**, e passa para a posição **A***.



$$\mathbf{u} = (u, v, w)$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned}}$$

As coordenadas **A*** são então dadas por **x+u, y+v, z+w**, e o

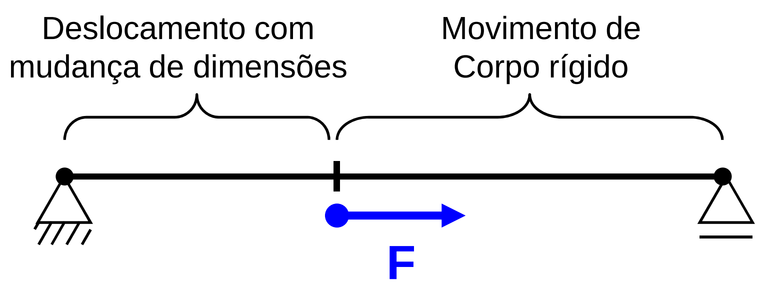
CAMPO DE DESLOCAMENTOS determinado pelas funções u, v, w.

Deformações:
Campo de deslocamentos

Observações:

- Tendo em vista a continuidade do sólido no processo de deformação, as funções escalares u, v, w devem ser contínuas e unívocas.
- O campo de deslocamentos pode ser decomposto em duas parcelas:
    - Movimento de corpo rígido (translação do ponto)
    - Deslocamento com mudança de forma e dimensões do corpo (alongamentos, encurtamentos)
- O movimento do corpo rígido pode ser sempre eliminado mediante a introdução adequada de vínculos.

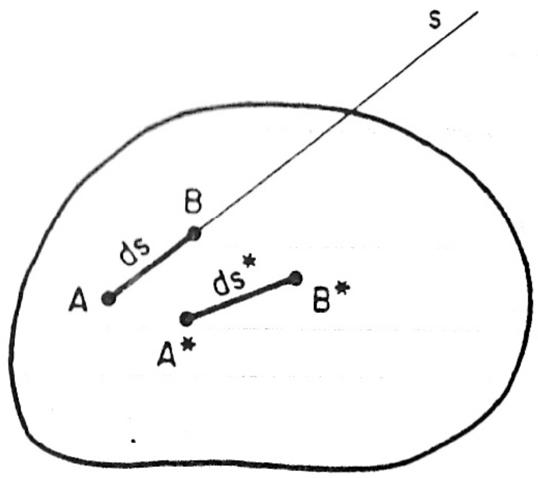
Ex:



Componentes de Deformação

ε_s

- Deformação (*strain*)
- Deformação linear específica
- Alongamento relativo



Deformação no ponto A e na direção s:

Relação entre o alongamento sofrido pelo segmento elementar e o seu comprimento inicial, ao passar da configuração inicial para a deformada.

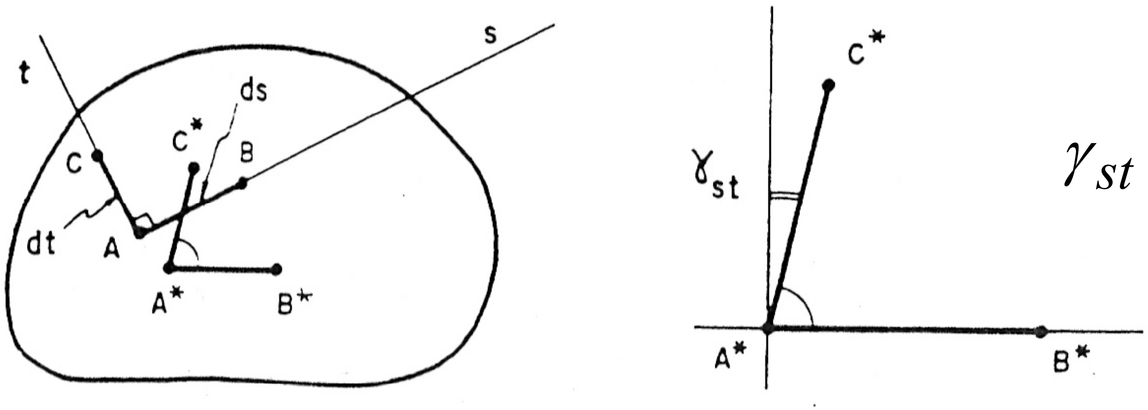
$$\varepsilon_s = \frac{A^* B^* - AB}{AB} = \frac{ds^* - ds}{ds} \qquad \Rightarrow ds^* = ds\left(1 + \varepsilon_s\right)$$

Componentes de Deformação

γ_{st}

- Deformação angular (*shearing strain*)
- Distorção

Distorção no ponto A associada às direções s, t :



$$\gamma_{st} = \frac{\pi}{2} - C^* \hat{A}^* B^*$$

Redução do ângulo originariamente reto entre AB e BC.

Componentes de Deformação

O estado de deformação em um ponto A fica completamente determinado se forem conhecidas as componentes de deformação (linear e angular) em três direções ortogonais.

Referindo-se ao sistema cartesiano global xyz, tem-se as seguintes componentes de deformação:

$$\varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z , \gamma_{xy} , \gamma_{xz} , \gamma_{yz}$$

De forma análoga ao estado de tensões, conhecidas essas componentes é possível calcular a deformação linear numa direção qualquer, ou a deformação angular associada a um par de direções ortogonais quaisquer no ponto A.

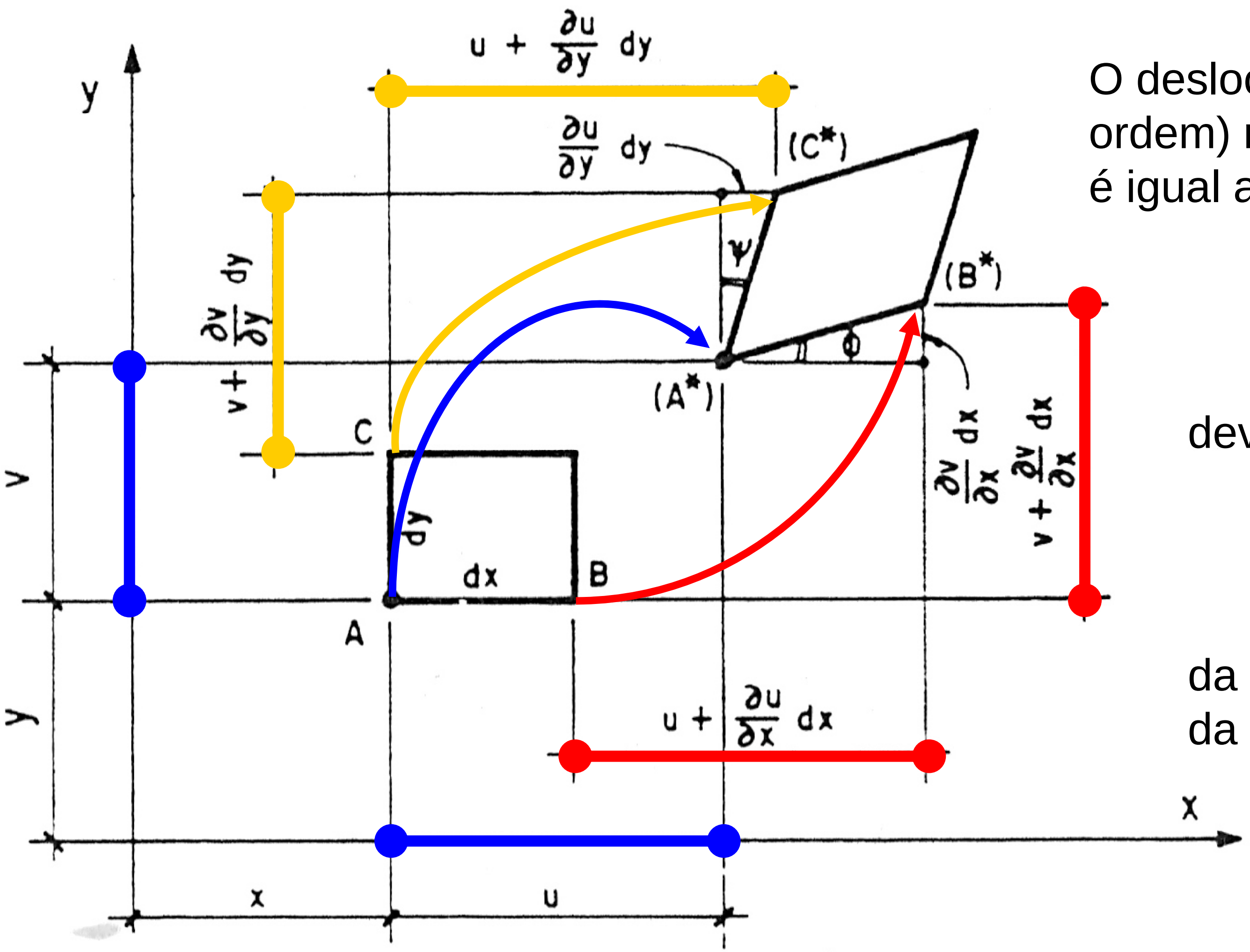
Componentes de Deformação

A deformação em todo o corpo fica determinada conhecendo-se o campo de deformações, ou seja, as componentes de deformação como funções de posição:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y, z) \\ \varepsilon_z = \varepsilon_z(x, y, z) \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y, z) \\ \gamma_{xz} = \gamma_{xz}(x, y, z) \\ \gamma_{yz} = \gamma_{yz}(x, y, z) \end{cases}$$

Relações Deformação – Deslocamento (coordenadas cartesianas)

Sejam **(A*), (B*), (C*)** as projeções de **A*, B*, C*** no plano **xy**. Logo:



O deslocamento (de primeira ordem) na direção x do ponto B é igual a:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

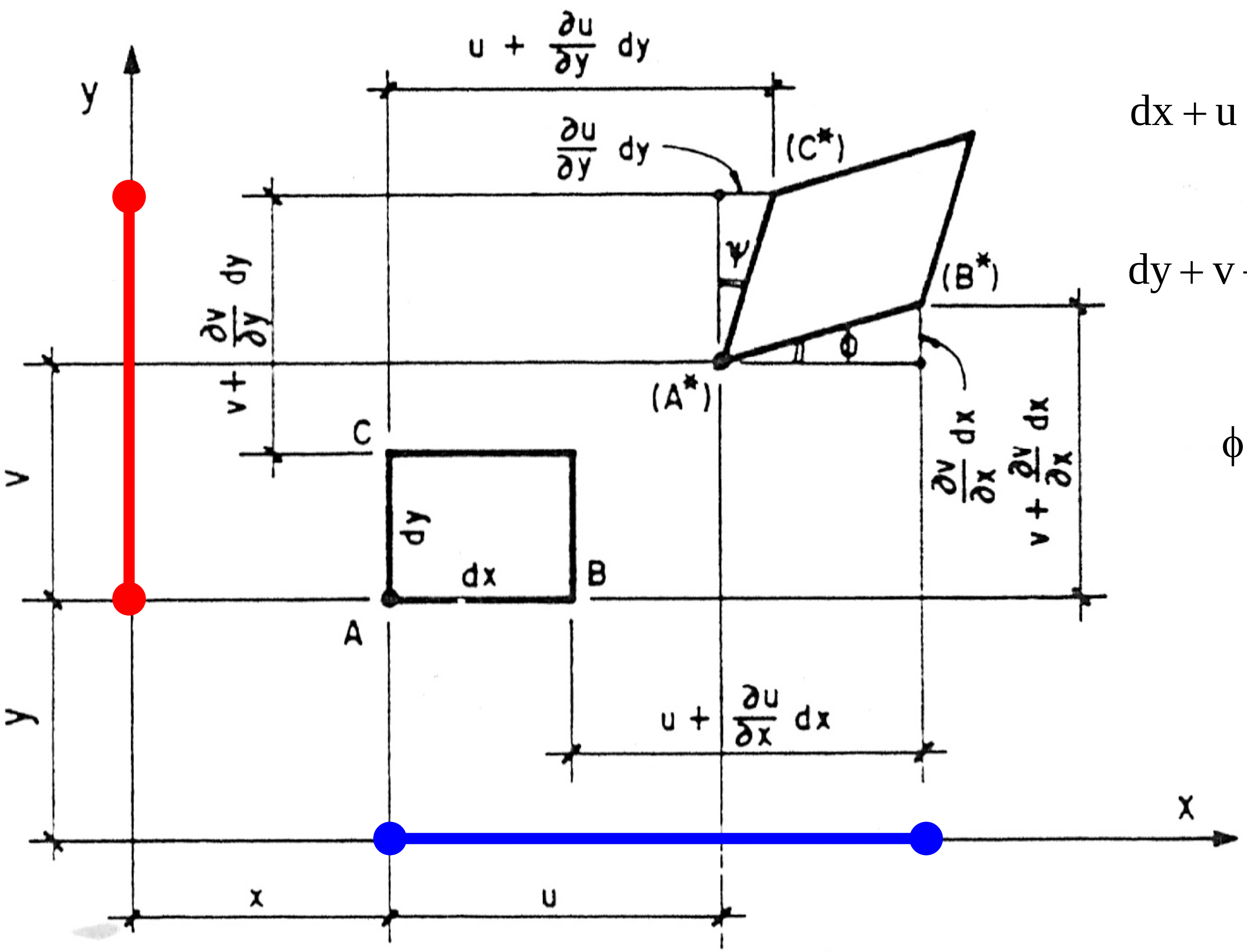
devido ao aumento de

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx$$

da função u com o aumento da coordenada x

Relações Deformação - Deslocamento

Sejam **(A*), (B*), (C*)** as projeções de **A*, B*, C*** no plano **xy**. Logo:



$$dx + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx = u + (A^*)(B^*)\cos\phi$$

$$dy + v + \frac{\partial v}{\partial y}dy = v + (A^*)(C^*)\cos\psi$$

$$\phi + \psi = \frac{\pi}{2} - (C^*)(\hat{A}^*)(B^*)$$

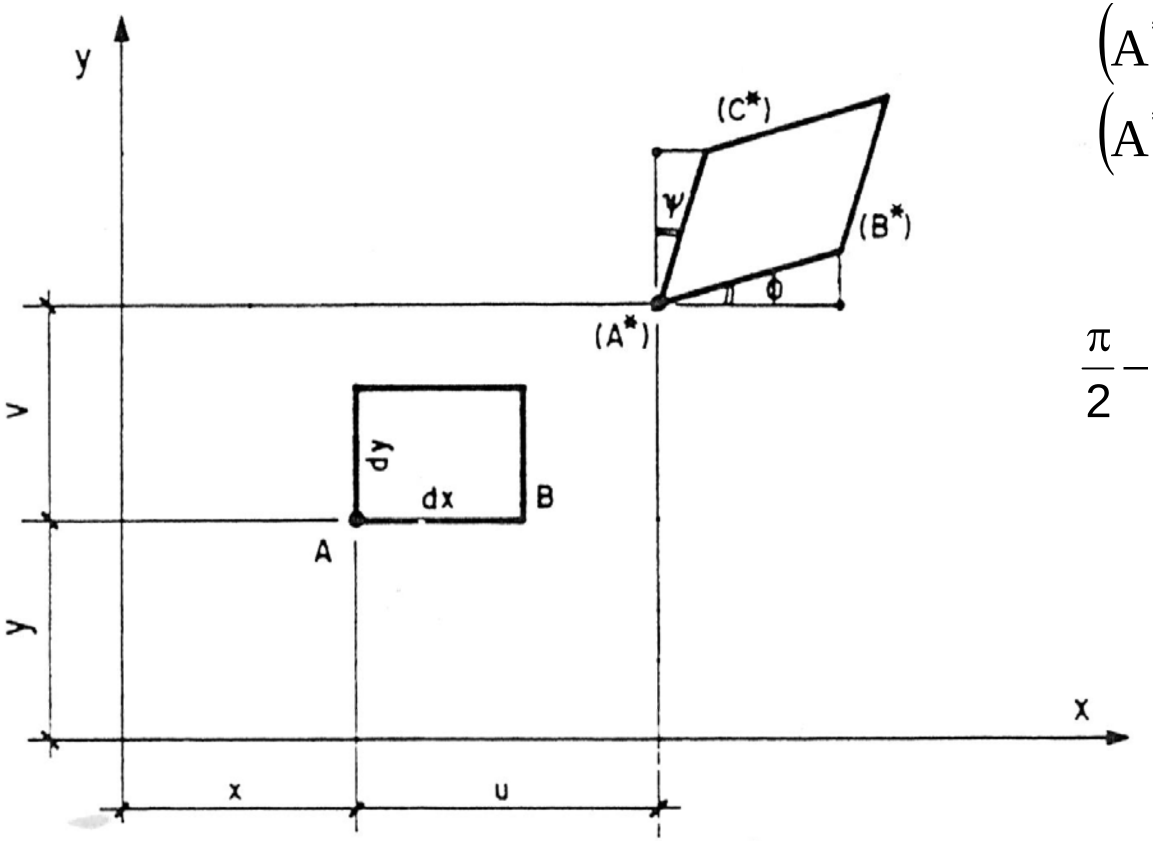
$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{(A^*)(B^*)}$$

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{(A^*)(C^*)}$$

Relações Deformação - Deslocamento

$\Rightarrow$ Hipótese de pequenas mudanças de configuração;

$\Rightarrow$ Componentes de deformação consideradas muito pequenas em presença da unidade;



$$\left(A^*\right)\left(B^*\right) \cong A^*B^* = dx\left(1+\varepsilon_x\right)$$

$$\left(A^*\right)\left(C^*\right) \cong A^*C^* = dy\left(1+\varepsilon_y\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - \left(C^*\right)\left(\hat{A}^*\right)\left(B^*\right) \cong \frac{\pi}{2} - C^*\hat{A}^*B^* = \gamma_{xy}$$

$$\operatorname{sen}\phi \cong \phi;\ \cos\phi \cong 1$$

$$\operatorname{sen}\psi \cong \psi;\ \cos\psi \cong 1$$

Relações Deformação - Deslocamento

⇒ Reescrevendo-se as equações, tem-se:

$$dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = u + \left(A^*\right)\left(B^*\right)\mathbf{cos}\,\phi \cong u + dx\left(1 + \varepsilon_x\right) \Rightarrow$$

$$dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy = v + \left(A^*\right)\left(C^*\right)\mathbf{cos}\,\psi \cong v + dy\left(1 + \varepsilon_y\right) \Rightarrow$$

$$\phi + \psi = \frac{\pi}{2} - \left(C^*\right)\left(\hat{A}^*\right)\left(B^*\right) \cong \gamma_{xy} \Rightarrow \phi + \psi = \gamma_{xy}$$

$$\phi \cong \mathrm{sen}\phi = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{\left(A^*\right)\left(B^*\right)} \cong \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx\left(1 + \varepsilon_x\right)} \cong \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\psi \cong \mathrm{sen}\psi = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{\left(A^*\right)\left(C^*\right)} \cong \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy\left(1 + \varepsilon_y\right)} \cong \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}}$$

⇒ Com as projeções nos outros dois planos cartesianos, são obtidas as demais expressões das relações deformação-deslocamento.

Relações Deformação – Deslocamento ***Lineares***

Na notação cartesiana:

$$x_1, x_2, x_3 \rightarrow x, y, z$$

$$u_1, u_2, u_3 \rightarrow u, v, w$$

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \ldots \rightarrow \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \ldots$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \varepsilon_{xz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \varepsilon_{yz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{yz} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ε_x é o alongamento relativo da projeção em x de um segmento elementar originalmente na direção x.

$\Rightarrow$ ε_x é o alongamento relativo de um segmento elementar na direção x.

Relações Deformação – Deslocamento ***Lineares***

Na notação cartesiana:

$$x_1, x_2, x_3 \rightarrow x, y, z$$

$$u_1, u_2, u_3 \rightarrow u, v, w$$

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \ldots \rightarrow \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \ldots$$

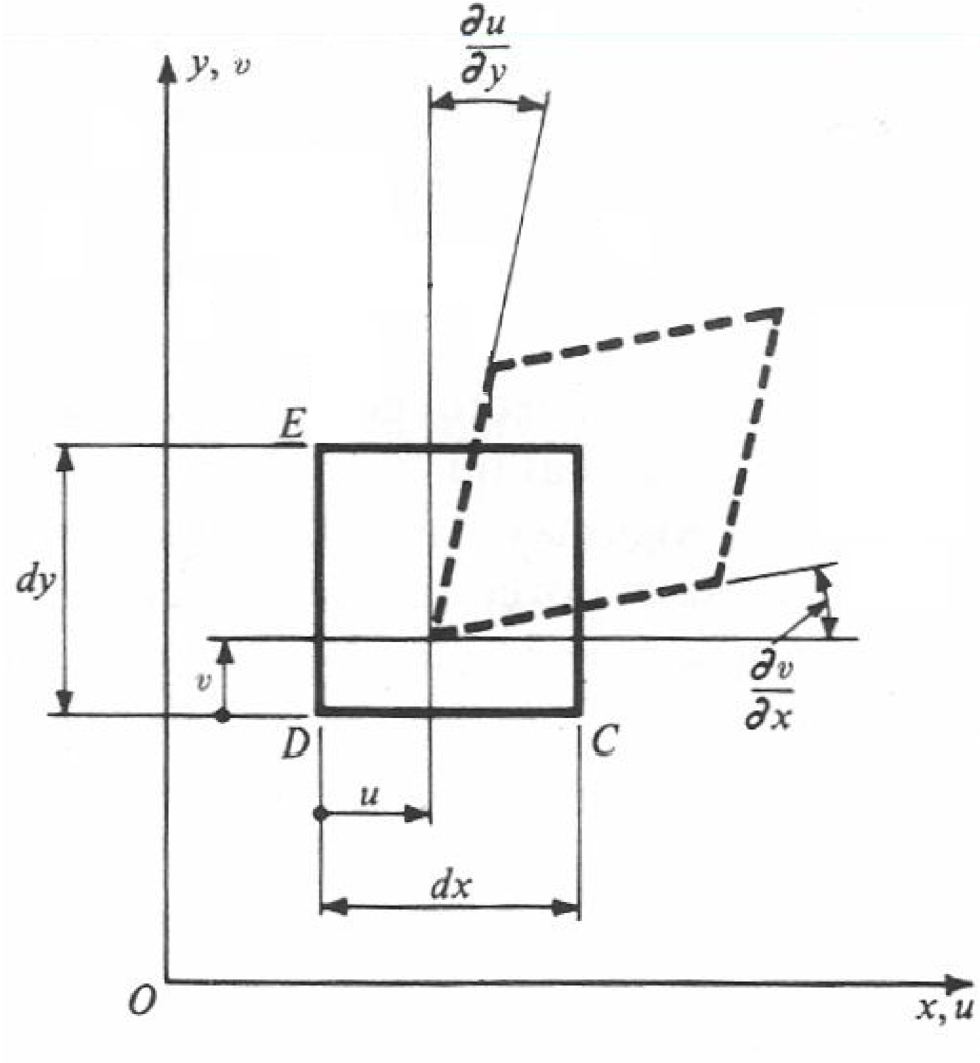
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ ε_x é o alongamento relativo da projeção em x de um segmento elementar originalmente na direção x.

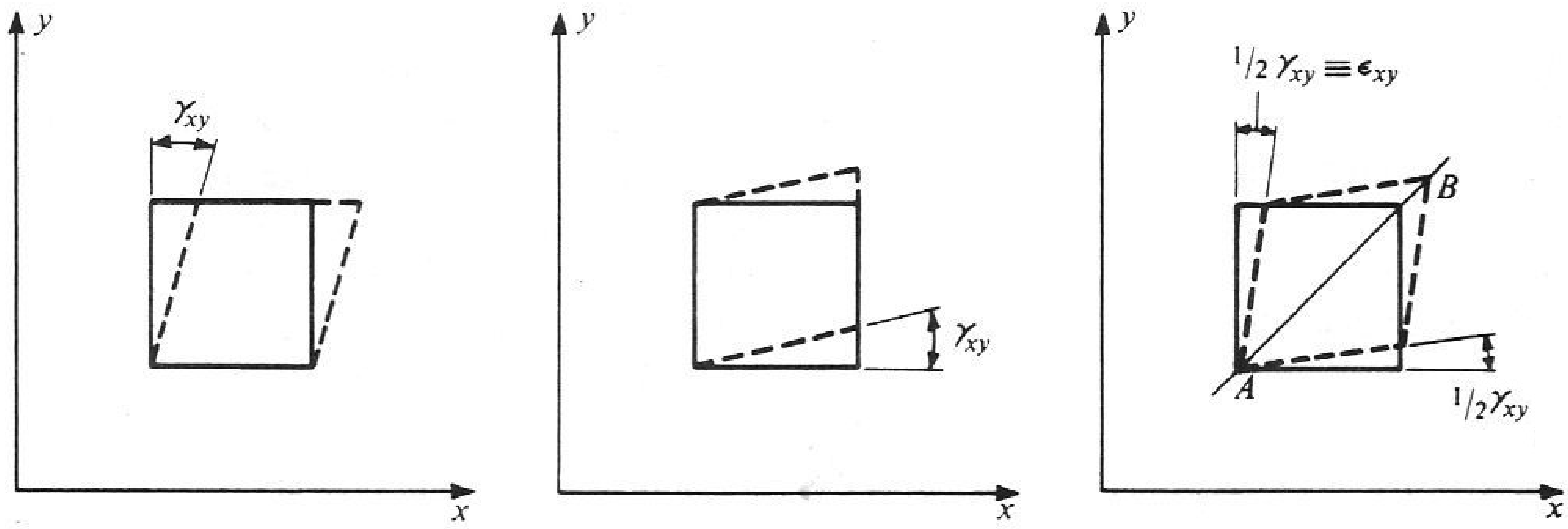
$\Longrightarrow$ ε_x é o alongamento relativo de um segmento elementar na direção x.

Deformações angulares

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$



Deformações angulares



É conveniente imaginar uma rotação de corpo rígido do elemento em torno do eixo transversal de forma a se obter uma deformação angular igual sofrida por cada uma das faces transversais, com magnitude igual à metade de distorção total no plano.

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{xy} = \dfrac{1}{2}\gamma_{yx} \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{xz} = \dfrac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{yz} = \dfrac{1}{2}\gamma_{zy} \end{cases}$$

Tensor

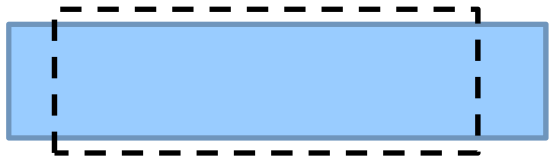
Assim, modificando-se as relações para deformações angulares para ε_{xy} , ε_{yz} e ε_{xz} , obtém-se o tensor (de deformações), que é uma entidade matemática que obedece a certas leis de transformação:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

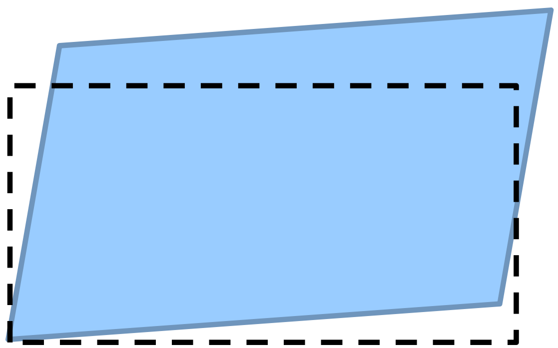
Notar que os termos da diagonal principal representam as deformações lineares enquanto os termos situados fora da diagonal, cujos valores são simétricos em relação à diagonal, são as deformações transversais (angulares).

Convenção de sinais nas deformações

Deformação linear positiva:
extensão do comprimento unitário

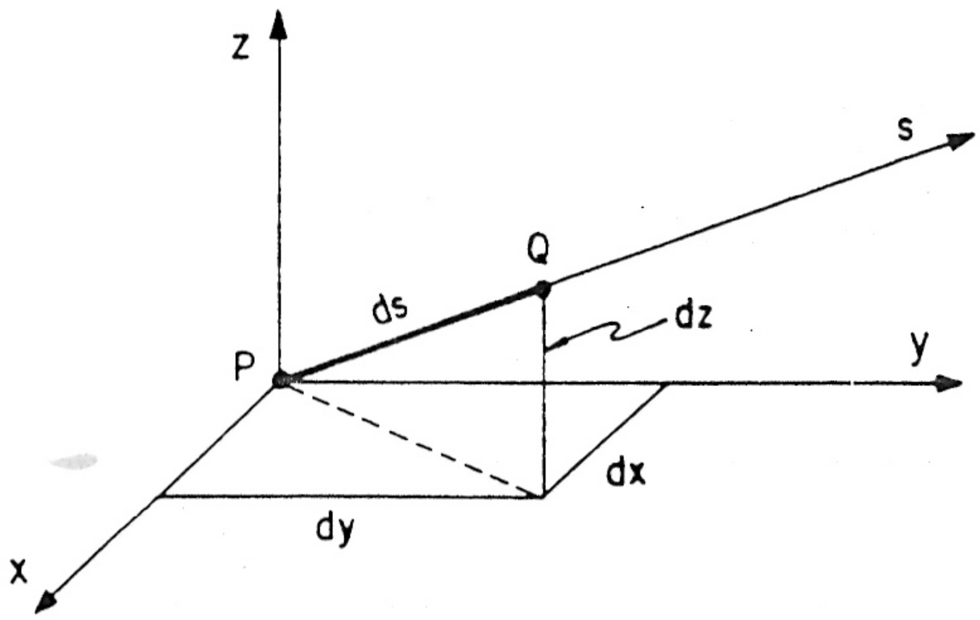


Deformação angular positiva:
redução do ângulo originariamente reto



Deformação linear numa direção qualquer

Na figura abaixo, um segmento elementar PQ de comprimento ds e direção s é representado na sua configuração inicial.



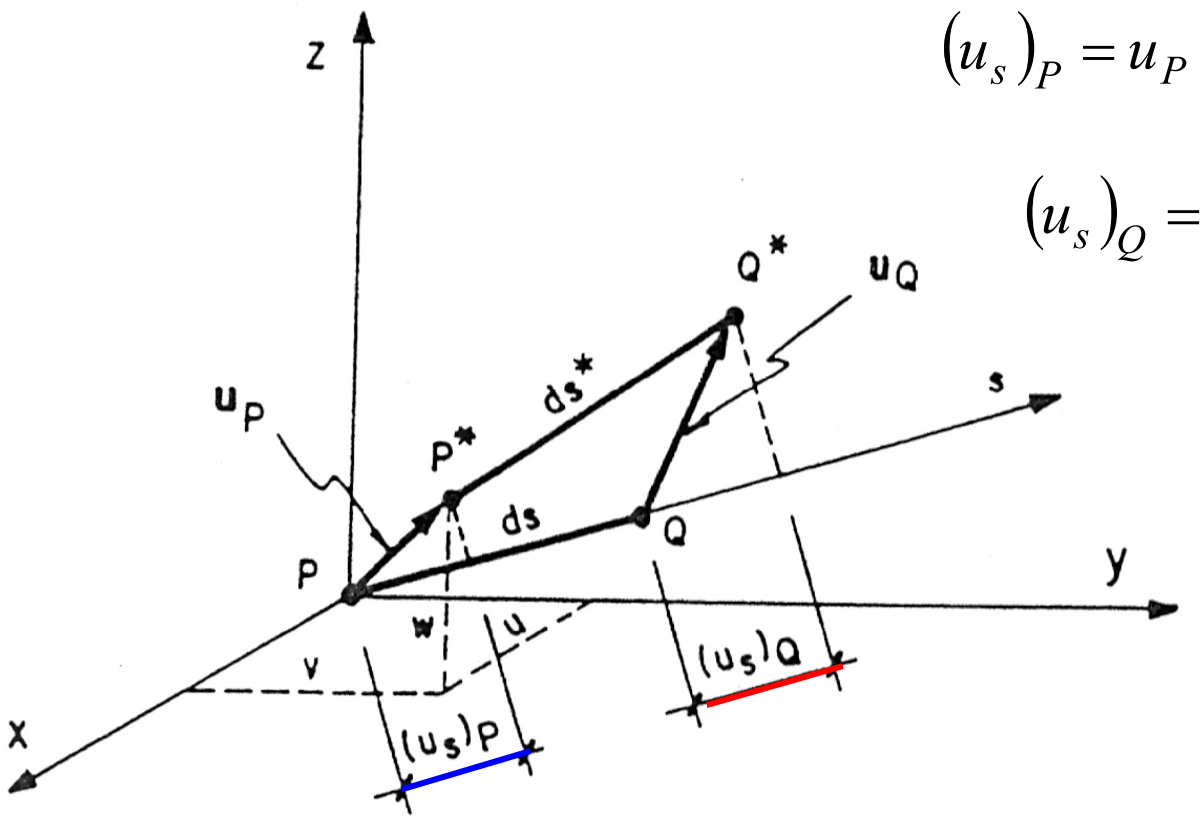
co-senos diretores:

$$\vec{\ell} = \begin{cases} \ell = \dfrac{dx}{ds} = \cos(s,x) \\ m = \dfrac{dy}{ds} = \cos(s,y) \\ n = \dfrac{dz}{ds} = \cos(s,z) \end{cases}$$

Deformação linear numa direção qualquer

Após a deformação o segmento passa para a posição P*Q* de comprimento ds*.

As projeções dos deslocamentos $\mathbf{u_p}$ e $\mathbf{u_q}$ sobre a direção s são dadas por:



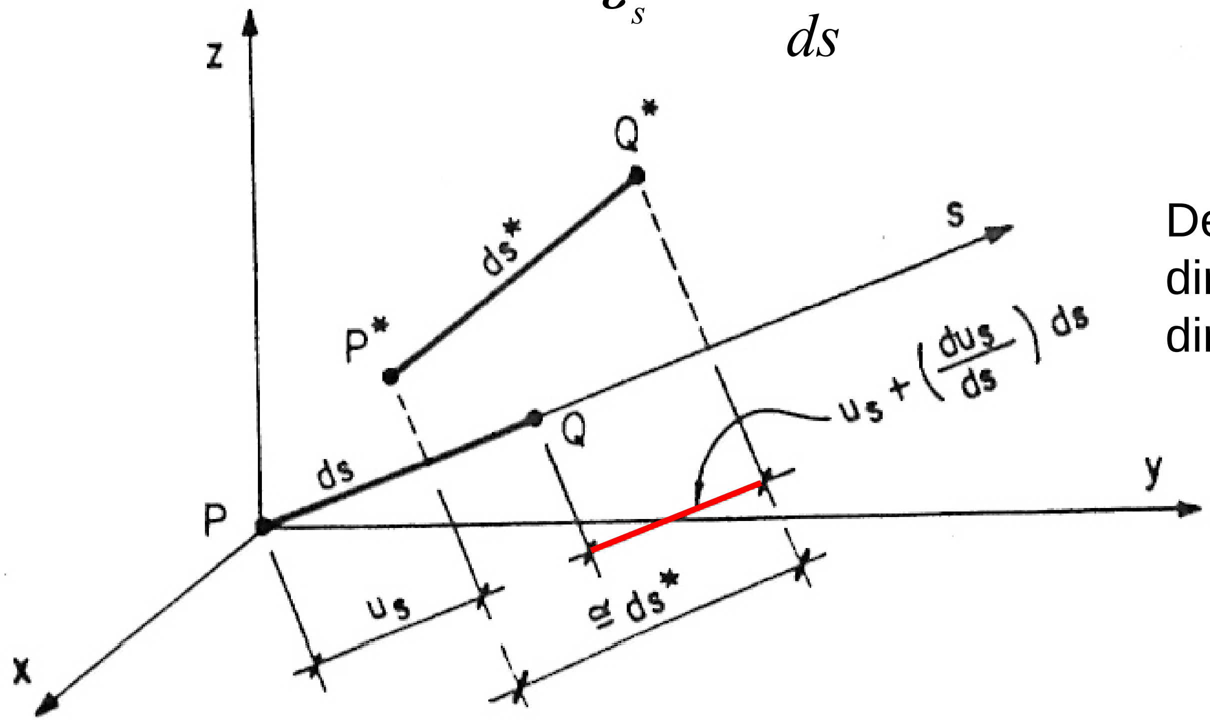
$$(u_s)_P = u_P \cdot \vec{\ell} = u\ell + vm + wn$$

$$(u_s)_Q = (u_s)_P + \left(\frac{du_s}{ds}\right)ds$$

Deformação linear numa direção qualquer

Considerando-se a hipótese de pequenas mudanças de configuração:

$$\varepsilon_s = \frac{ds^* - ds}{ds} = \frac{ds + u_s + \left(\dfrac{du_s}{ds}\right)ds - u_s - ds}{ds} = \frac{du_s}{ds}$$



Desenvolvendo a derivada direcional da função u na direção s....

Deformação linear numa direção qualquer

Desenvolvendo a derivada direcional da função u na direção s....

$$\boxed{\varepsilon_s = \frac{du_s}{ds} = \left(\frac{du_s}{dx}\right)\frac{dx}{ds} + \left(\frac{du_s}{dy}\right)\frac{dy}{ds} + \left(\frac{du_s}{dz}\right)\frac{dz}{ds} = \nabla u_s \cdot \vec{\ell}}$$

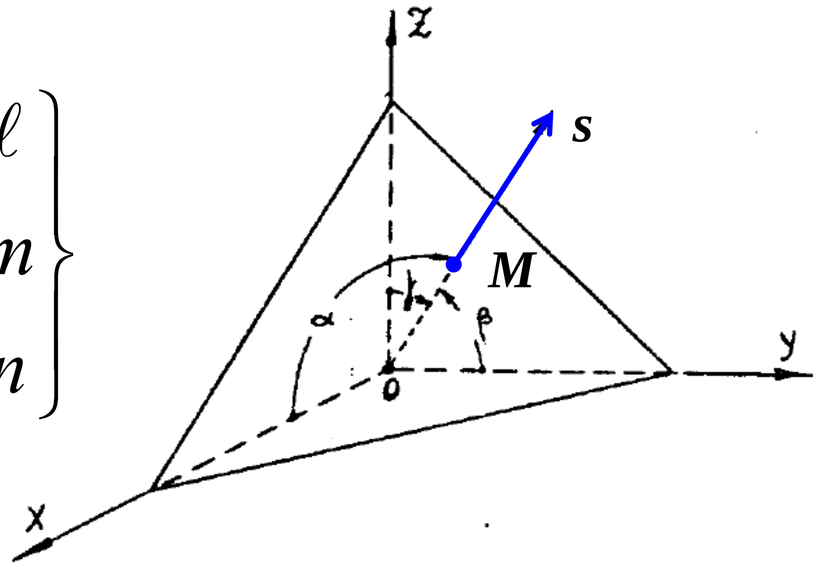
$$= \left(\frac{d(u\ell + vm + wn)}{dx}\right)\ell + \left(\frac{d(u\ell + vm + wn)}{dy}\right)m + \left(\frac{d(u\ell + vm + wn)}{dz}\right)n$$

$$= \frac{du}{dx}\ell^2 + \frac{dv}{dy}m^2 + \frac{dw}{dz}n^2 + \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\ell m + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\ell n + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)mn$$

$$\Rightarrow \varepsilon_s = \varepsilon_x \ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy}\ell m + \gamma_{xz}\ell n + \gamma_{yz} mn$$

Deformação linear numa direção qualquer

$$\Rightarrow \varepsilon_s = \begin{Bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$



$$\varepsilon_s = \varepsilon_x \ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} \ell m + \gamma_{xz} \ell n + \gamma_{yz} mn$$

Deformação linear numa direção qualquer

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x \ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} \ell m + \gamma_{xz} \ell n + \gamma_{yz} mn$$

A expressão acima nos dá a deformação linear em torno de um **ponto** em uma **direção** qualquer (definida pelos seus co-senos diretores) em função das deformações lineares segundo os **eixos coordenados** e das distorções nos planos coordenados.

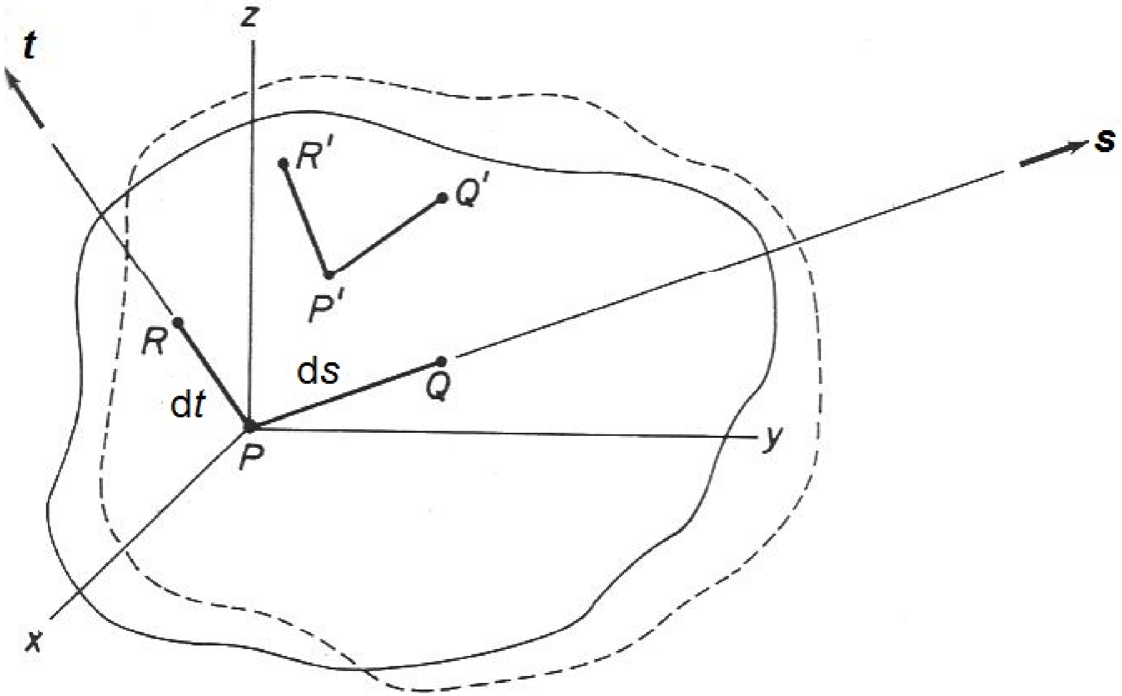
Vê-se assim que as deformações segundo três eixos coordenados, ou seja, um tensor de deformações, é suficiente para definir o

ESTADO DE DEFORMAÇÃO

em torno de um ponto qualquer (assim como nas tensões).

Deformação angular numa direção qualquer

Analogamente, pode-se demonstrar que a distorção entre duas direções ***s*** e ***t*** pode ser colocada como:



$$\gamma_{st} = 2\varepsilon_x \ell_s \ell_t + 2\varepsilon_y m_s m_t + 2\varepsilon_z n_s n_t + \gamma_{xy}\left(\ell_s m_t + m_s \ell_t\right)$$
$$+ \gamma_{xz}\left(\ell_s n_t + n_s \ell_t\right) + \gamma_{yz}\left(m_s n_t + n_s m_t\right)$$

Deformações Principais

Pode-se mostrar pela análise das expressões anteriores de deformação linear e distorção segundo direções arbitrárias, ou pelas propriedades dos Tensores, que o Tensor deformação segundo três novas coordenadas ***x', y', z'*** pode ser colocado como:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} & \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{y'x'} & \varepsilon_{y'y'} & \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{z'x'} & \varepsilon_{z'y'} & \varepsilon_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{x'x} & \ell_{x'y} & \ell_{x'z} \\ \ell_{y'x} & \ell_{y'y} & \ell_{y'z} \\ \ell_{z'x} & \ell_{z'y} & \ell_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_{x'x} & \ell_{y'x} & \ell_{z'x} \\ \ell_{x'y} & \ell_{y'y} & \ell_{z'y} \\ \ell_{x'z} & \ell_{y'z} & \ell_{z'z} \end{bmatrix}$$

onde:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{x'x} & \ell_{x'y} & \ell_{x'z} \\ \ell_{y'x} & \ell_{y'y} & \ell_{y'z} \\ \ell_{z'x} & \ell_{z'y} & \ell_{z'z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x',x) & \cos(x',y) & \cos(x',z) \\ \cos(y',x) & \cos(y',y) & \cos(y',z) \\ \cos(z',x) & \cos(z',y) & \cos(z',z) \end{bmatrix}$$

Lei de Transformação do Tensor de 2ª ordem: $\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{R}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{R}^t$

Deformações Principais

Tal como na análise de tensões, pode-se considerar por hipótese que num ponto de um sólido em estado de deformação existem três direções ortogonais (principais) em relação às quais a distorção é nula.

As deformações lineares em tais direções são as deformações principais:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \qquad \left(\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3\right)$$

Pelas propriedades dos tensores, as três direções principais (ortogonais) correspondem à representação do tensor deformação segundo uma matriz diagonal.

Logo, as raízes da equação característica do tensor de deformações correspondem às deformações principais, e seus coeficientes são denominados de invariantes do estado de deformação.

Deformações Principais

Seja a direção "e" uma direção principal, onde há apenas uma deformação sem distorções:

$$\Rightarrow \{\varepsilon_e\} = \varepsilon_e \begin{Bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_e & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_e & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{Bmatrix} \qquad \Rightarrow \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{xyz} - \varepsilon_e \mathbf{I}\right) \begin{Bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0$$

As deformações principais são os autovalores da matriz (tensor) de deformações

Deformações Principais

$$\mathbf{det}\left(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_e \boldsymbol{I}\right)=0 \;\Rightarrow \begin{vmatrix} \varepsilon_x-\varepsilon_e & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y-\varepsilon_e & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z-\varepsilon_e \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_e^3-J_1\varepsilon_e^2+J_2\varepsilon_e-J_3=0$$

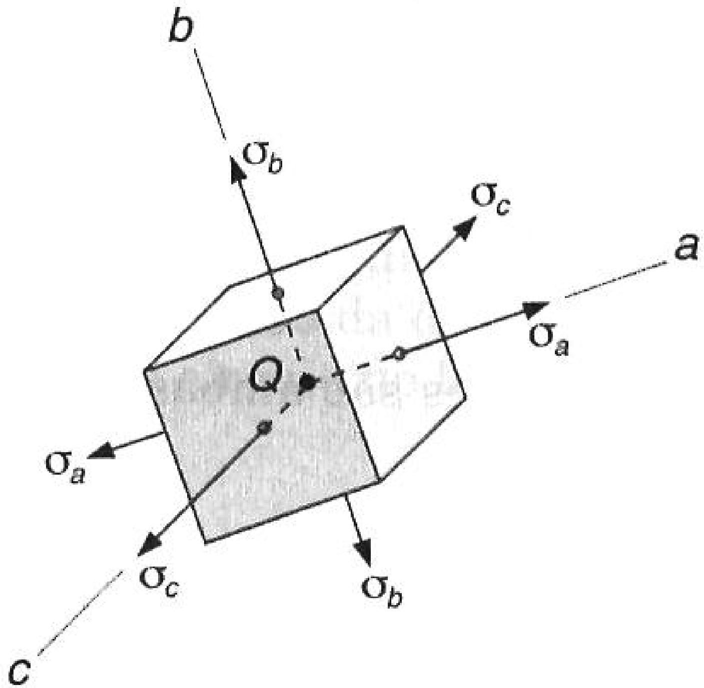
$$J_1=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_{ii}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

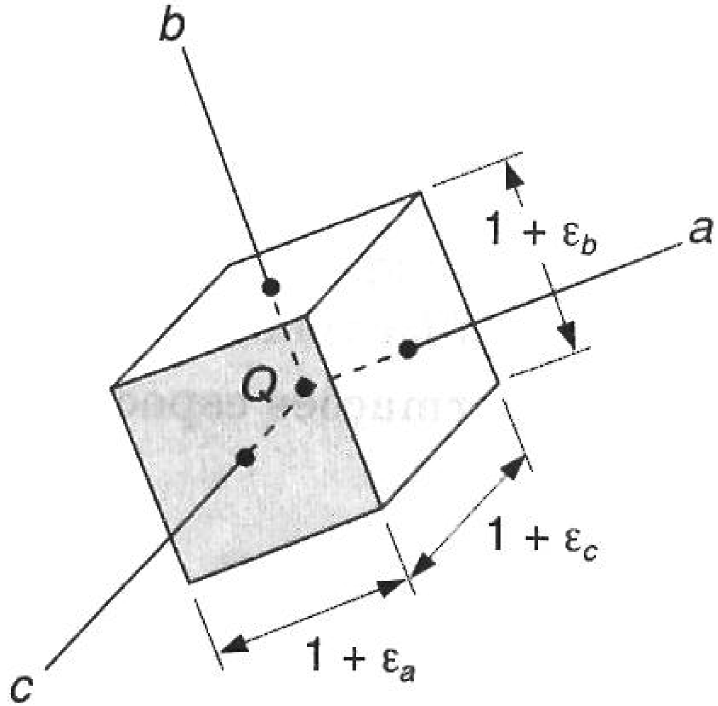
$$J_2=\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3$$

$$J_3=\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}=\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

Deformações Principais: sólidos isotrópicos

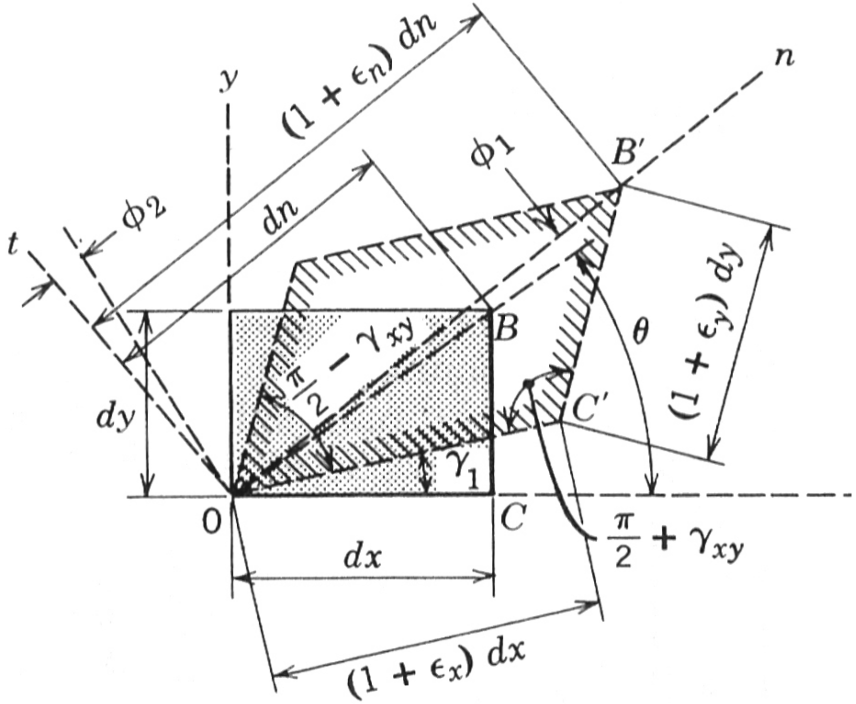
Tensões Principais, Deformações principais, Direções Principais

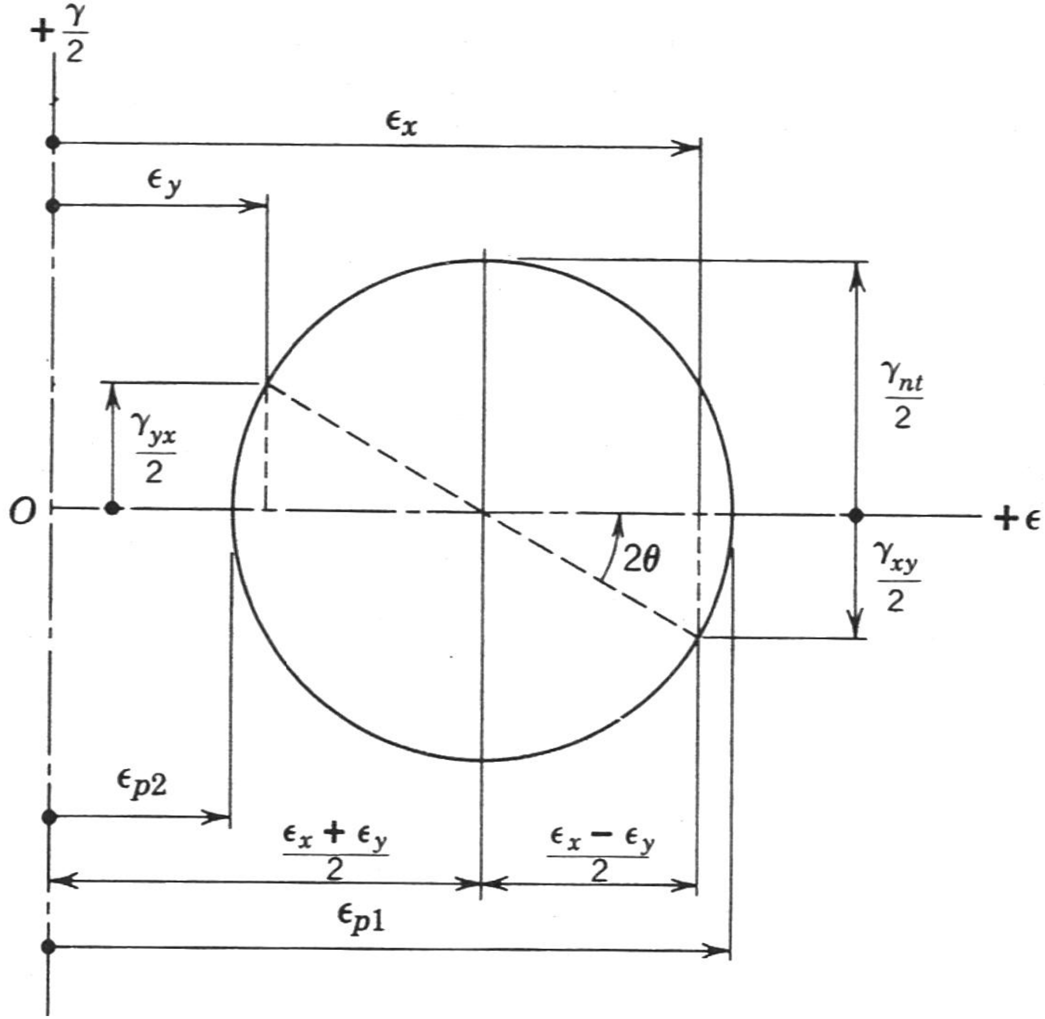




Deformações Principais: sólidos isotrópicos

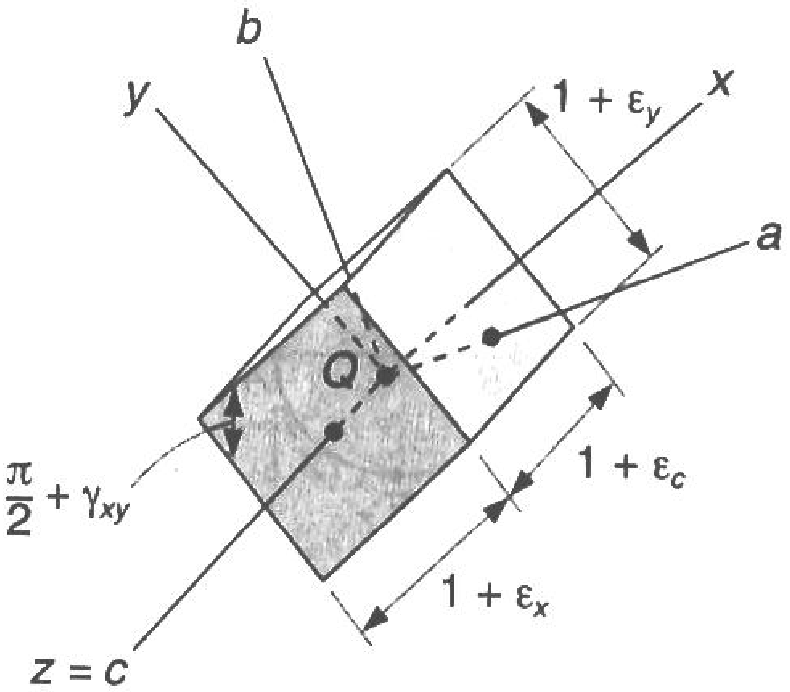
Tensões Principais, Deformações principais, Direções Principais

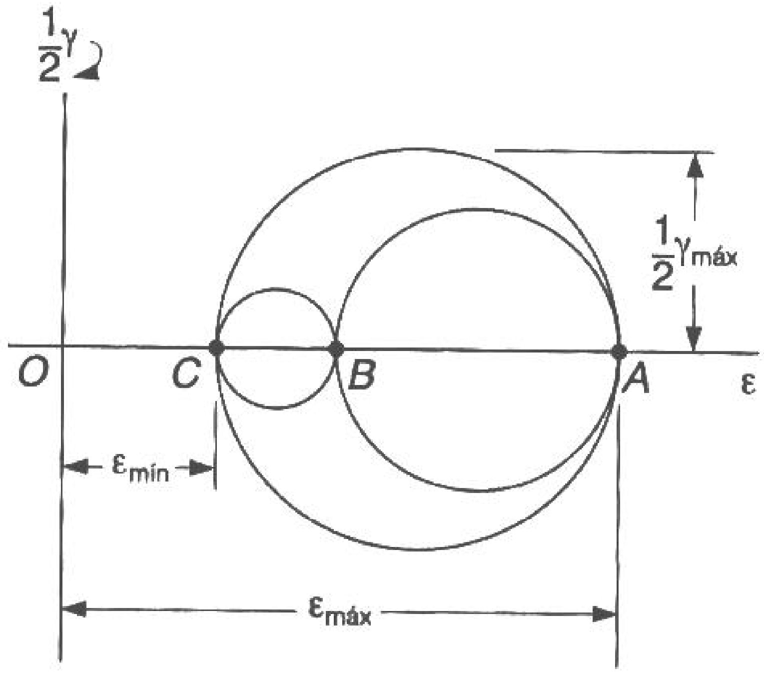




Deformações Principais: sólidos isotrópicos

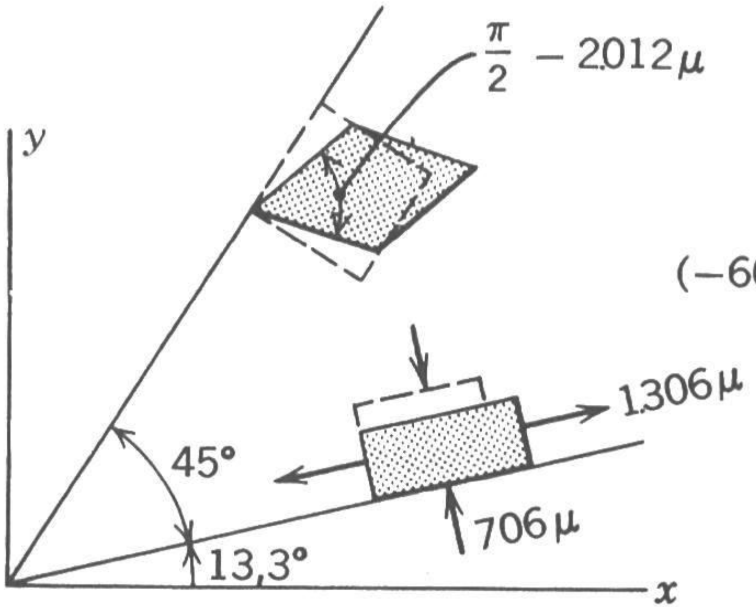
Tensões Principais, Deformações principais, Direções Principais



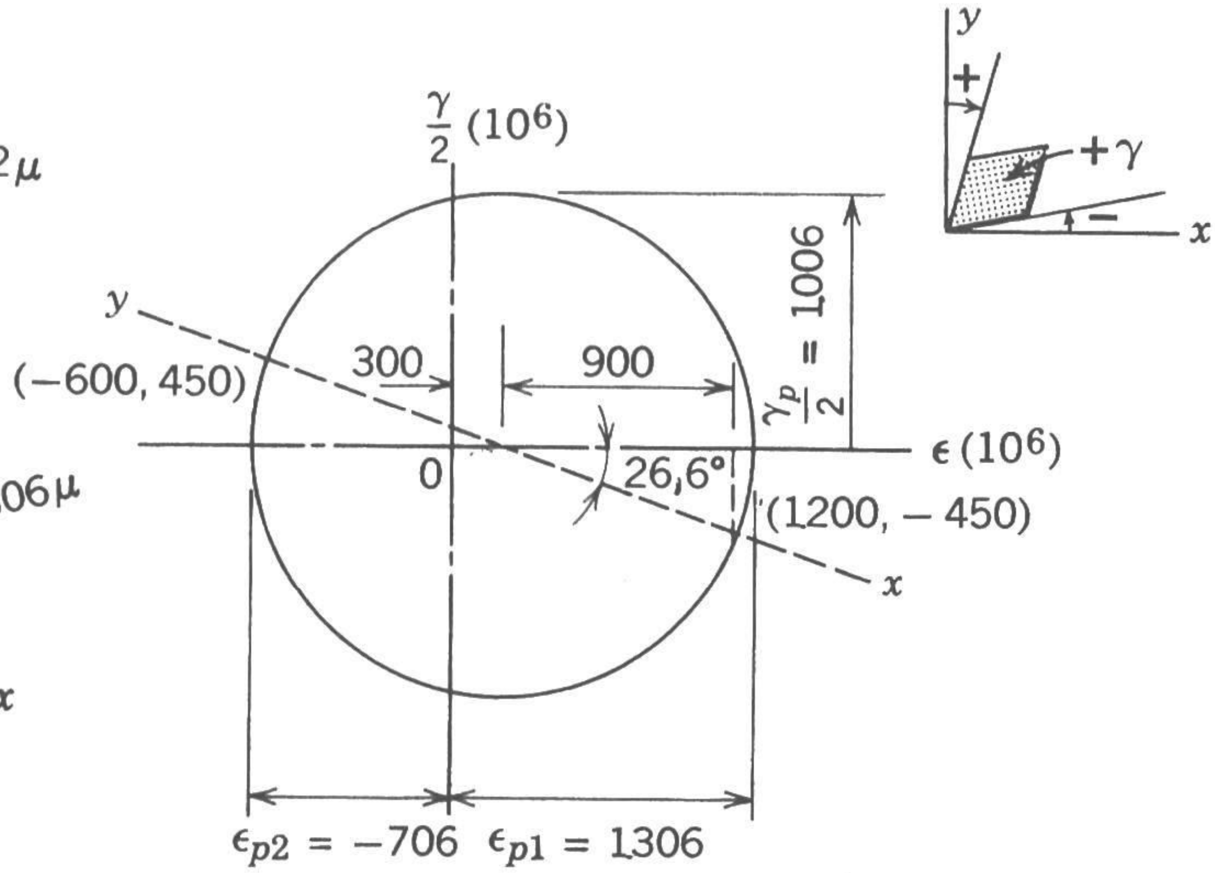


Deformações Principais: sólidos isotrópicos

Tensões Principais, Deformações principais, Direções Principais

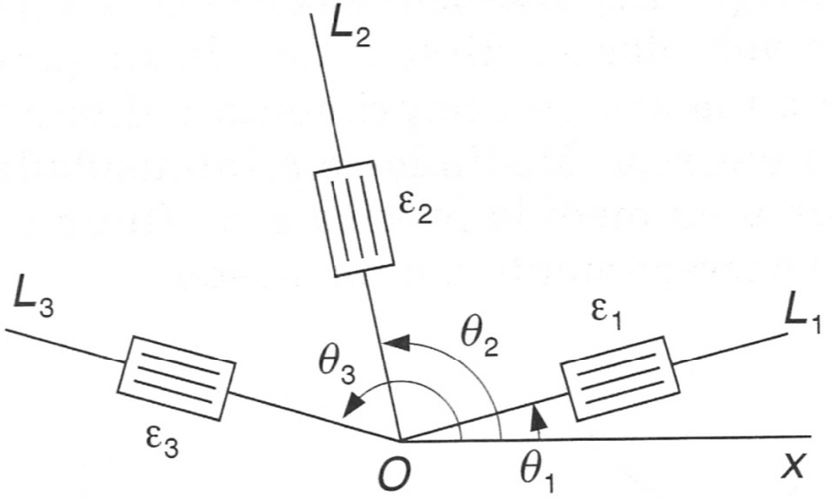


(a)



(b)

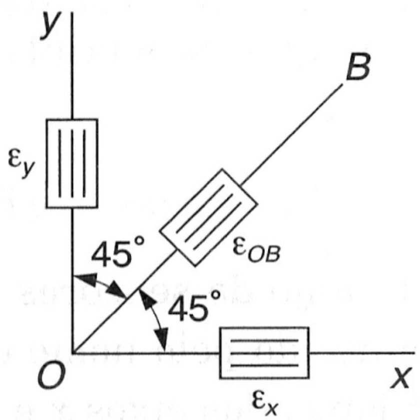
Rosetas de Deformações



$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x \cos^2\theta_1 + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_1 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x \cos^2\theta_2 + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_2 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_x \cos^2\theta_3 + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_3 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_3 \cos\theta_3$$



$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{OB} - \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$$

Compatibilidade de Deformações

- é preciso garantir a integrabilidade das relações deformações-deslocamentos;
- obtenção de um campo de deslocamentos cinematicamente admissível, representado por funções contínuas e unívocas;
- preservação do meio sólido no processo (de forma a não surgirem trincas ou fissuras);
- uma maneira de se assegurar que as deformações sejam compatíveis é iniciar um campo de deslocamentos contínuo e unívoco e desenvolver as deformações a partir deste campo de conformidade.

Compatibilidade de Deformações

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \varepsilon_{xz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \varepsilon_{yz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{yz} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \end{aligned}\right\} \boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \\ &\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 \\ &\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \end{aligned}}$$

Bibliografia Complementar

- Exemplos numéricos práticos:
  - Shames, I. H., Introdução à Mecânica dos Sólidos, Prentice Hall, 1983 (*Cap. 3 e 12*)

- Propriedades dos Tensores:
  - Reddy, J.N., "*Energy Principles and Variationl Methods in Applied Mechanics*", John Wiley & Sonx, 2nd Ed., 2002 (*Capítulo 2.3*)

- Círculo de Mohr
  - Beer Johnston, Resistência dos Materiais
  - Riley, Mecânica dos Materiais