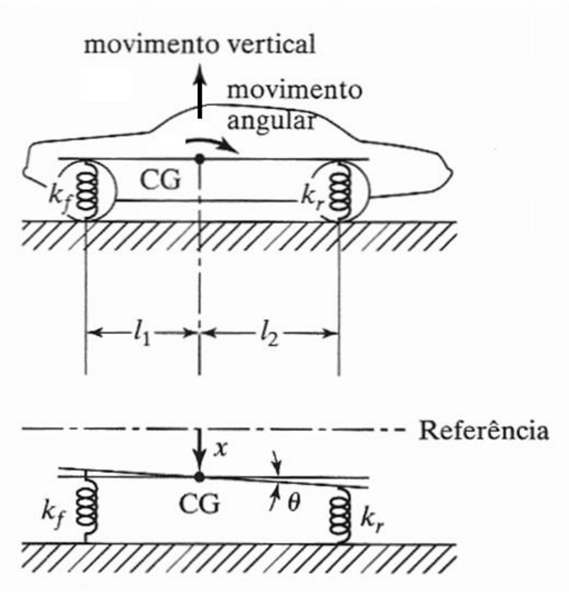
LISTA DE EXERCÍCIOS PARA A VF

1) Seja o modelo simplificado não amortecido de um carro apresentado abaixo:



Massa = 1.000kg

Raio de giração = 0,9m

Dist. entre o eixo dianteiro e o CG(l_1) = 1,0m

Dist. entre o eixo traseiro e o CG(l_2) = 1,5m

Rigidez da mola dianteira (k_f) = 18kN/m

Rigidez da mola traseira (k_r) = 22kN/m

a) Mostre, a partir da representação esquemática do movimento do sistema segundo seus GL (translação vertical para cima e rotação no sentido horário, respectivamente) e equilíbrios de forças, que sua matriz de rigidez é igual a:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_r + k_f & -\left(k_r l_2 - k_f l_1\right) \\ -\left(k_r l_2 - k_f l_1\right) & k_f l_1^2 + k_r l_2^2 \end{bmatrix}$$

b) Obtenha a matriz de massa concentrada;

c) Determine as frequências naturais (em Hz) e as formas modais, ilustrando-as.

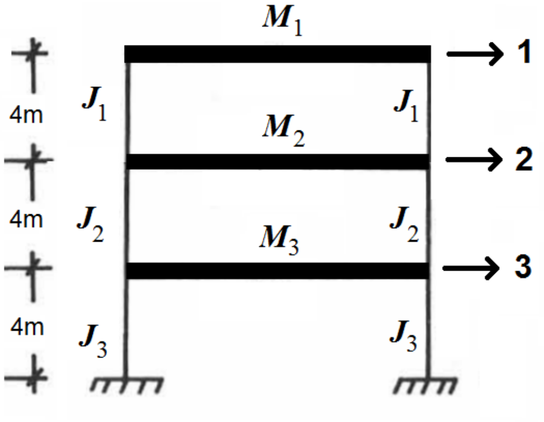
LISTA DE EXERCÍCIOS PARA A VF

2) Para o modelo (*shear building*) de três graus de liberdade apresentado a seguir, pede-se:

a) A matriz de rigidez e a matriz de massa do sistema;

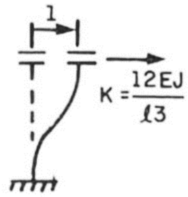
b) As frequências naturais, em Hz;

c) As formas modais (autovetores normalizados em relação à maior coordenada e **esboço**);



$$EJ_3 = EJ_2 = EJ_1 = 16.000\,kNm^2$$

$$M_1 = 2M_2 = 2M_3 = 10.000kg$$



LISTA DE EXERCÍCIOS PARA A VF

3) Ainda referindo-se ao modelo estrutural apresentado na questão anterior, e admitindo-se a existência de ações perturbadoras aplicadas em todos os graus liberdades da estrutura, na forma do vetor de forças $\{Q(t)\}$:

$$\{Q(t)\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \cos \overline{\omega} t$$

a) Mostre que o vetor dos deslocamentos dinâmicos máximos $\{X_0\}$ pode ser colocado como:

$$\{X_0\} = [\Phi] \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1^2 - \overline{\omega}^2} & & \\ & \dfrac{1}{\lambda_2^2 - \overline{\omega}^2} & \\ & & \dfrac{1}{\lambda_3^2 - \overline{\omega}^2} \end{bmatrix} \cdot [\Phi]^t \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

onde $[\Phi]$ é a matriz modal com as colunas (autovetores) normalizados em relação à matriz de massa, ou seja, $[\Phi] \cdot [M] \cdot [\Phi]^t = [I]$, e λ_i são os autovalores do sistema;

b) Para $\{Q(t)\} = \begin{Bmatrix} 10{,}0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos(12{,}0t)\, kN$, referente à existência de uma máquina vibratória na cobertura da estrutura, utilizando-se os parâmetros encontrados na questão anterior, e a equação citada no item anterior, determine qual será o modo de vibração determinante no movimento, e quais serão os deslocamentos máximos observados na estrutura.

LISTA DE EXERCÍCIOS PARA A VF

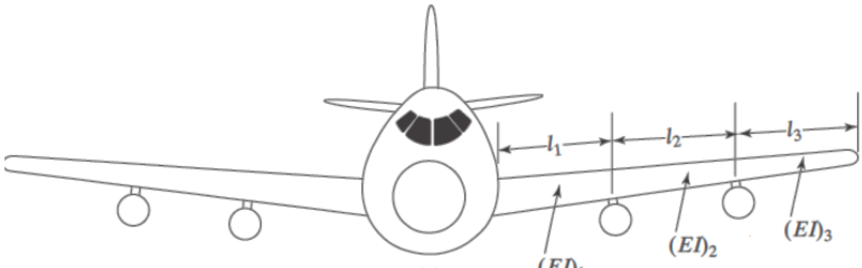
4) Para o modelo estrutural de três graus de liberdade apresentado a seguir, pede-se:

a) Mostre que se $[K]=[F]^{-1}$, então $\left\{\frac{1}{\omega^2} I-[F][M]\right\}\phi=0$;

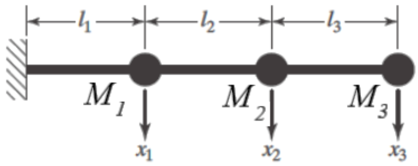
b) As frequências naturais, em Hz;

c) As formas modais (autovetores normalizados em relação à maior coordenada e **esboço**);

d) A matriz modal com os autovetores normalizados em relação à matriz de massa.



(a)



(b)

$$EI_1 = EI_2 = EI_3 = EI = 16.000kNm^2$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = M = 4.000kg$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = L = 4m$$

$$[F] = \frac{L^3}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 16 & 28 \\ 8 & 28 & 54 \end{bmatrix}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS PARA A VF

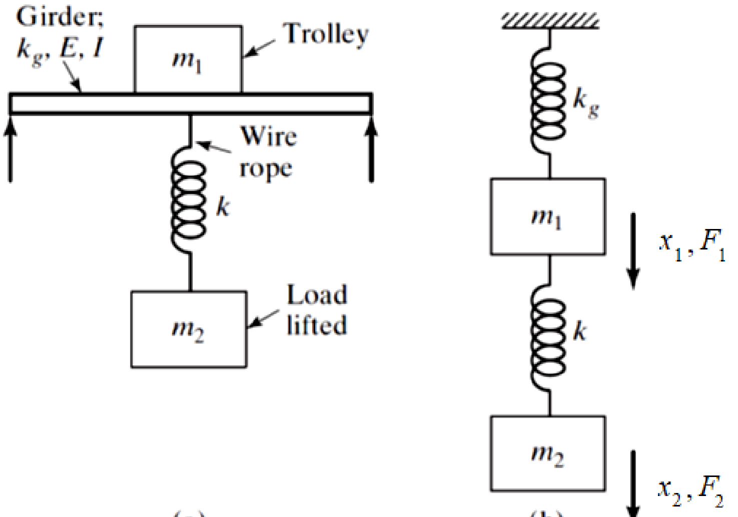
5) Para o modelo de ponte rolante apresentado na figura (a), pede-se:

a) A equação do movimento na forma matricial (discriminando a matriz de rigidez e a matriz de massa) para o modelo idealizado conforme figura (b);

b) As frequências naturais, em *Hz*;

c) As formas modais (autovetores normalizados em relação à maior coordenada);

d) A equação do movimento (em função de x_1, x_2 e a excitação de base y) da ponte rolante, admitindo-se que ambos apoios da ponte rolam sobre trilhos sinuosos (senoidais) a uma velocidade constante de 0,15 *m/s* conforme mostrado na figura (c).



(a) (b)

$$k_g = \frac{48EI}{L_{viga}^3}$$

$$k = \frac{EA}{L_{cabo}}$$

$m_1 = 4.000\ kg$

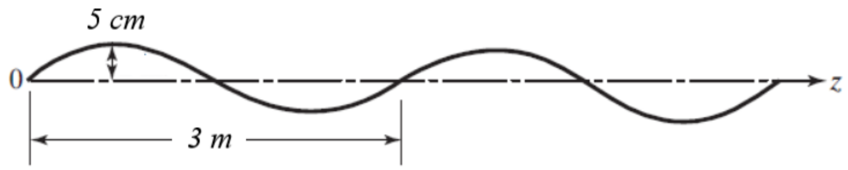
$m_2 = 1.000\ kg$

$L_{viga} = 9{,}0\ m$

$L_{cabo} = 5{,}0\ m$

$EI = 32.000\ kNm^2$

$EA = 120.000\ kN$



(c)

FORMULÁRIO: Problema de Autovalor-Autovetor:

$$\left\{[K] - \omega^2 [M]\right\}\phi = 0$$

$$\left\{[M]^{-1}[K] - \omega^2 I\right\}\phi = 0$$

$$\left.\begin{aligned}[D] &= [M]^{-1}[K] \\ \omega^2 &= \lambda\end{aligned}\right\} \Rightarrow [D]\phi = \lambda\,\phi$$

REF: Rao, Singiresu - Mechanical vibrations, 5th ed.

6.26 Determine the flexibility matrix of the uniform beam shown in Fig. 6.31. Disregard the mass of the beam compared to the concentrated masses placed on the beam and assume all $l_i = l$.

6.27 Derive the flexibility and stiffness matrices of the spring-mass system shown in Fig. 6.32 assuming that all the contacting surfaces are frictionless.

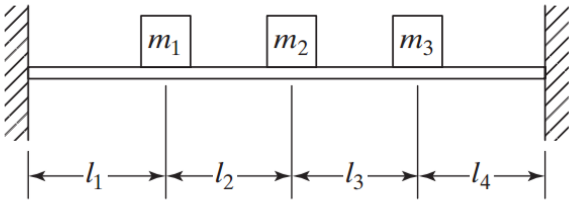


FIGURE 6.31

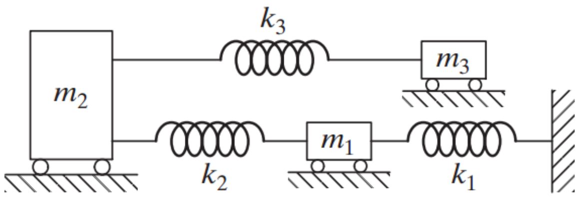


FIGURE 6.32

6.81 Find the free-vibration response of the spring-mass system shown in Fig. 6.32 for $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k$, and $k_3 = 2k$ corresponding to the initial conditions $\dot{x}_3(0) = \dot{x}_{30}$, and $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

6.54* (a) Find the natural frequencies of the system shown in Fig. 6.31 with $m_1 = m_2 = m_3 = m$ and $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l/4$. (b) Find the natural frequencies of the beam when $m = 10$ kg, $l = 0.5$ m, the cross section is a solid circular section with diameter 2.5 cm, and the material is steel. (c) Consider using a hollow circular, solid rectangular, or hollow rectangular cross section for the beam to achieve the same natural frequencies as in (b). Identify the cross section corresponding to the least weight of the beam.

Resposta - 6.26

$$[a] = \frac{l^3}{EI}\begin{bmatrix} 9/64 & 1/6 & 13/192 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 13/192 & 1/6 & 9/64 \end{bmatrix}$$

Resposta - 6.27

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}; \quad [a] = \begin{bmatrix} 1/k_1 & 1/k_1 & 1/k_1 \\ 1/k_1 & \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) & \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \\ 1/k_1 & \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) & \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right) \end{bmatrix}$$

Resposta - 6.81

$$\omega_1 = 0.386289\sqrt{k/m}$$
$$\omega_2 = 1.414214\sqrt{k/m}$$
$$\omega_3 = 1.830514\sqrt{k/m}$$

$$\vec{X}^{(1)} = X_1^{(1)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.850781 \\ 2.0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{X}^{(2)} = X_1^{(2)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ -0.5 \end{Bmatrix}, \quad \vec{X}^{(3)} = X_1^{(3)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -1.350781 \\ 2.0 \end{Bmatrix}$$

Resposta - 6.54-a

$$\omega_1 = 48.71082 \sqrt{EI/(m l^3)}$$

$$\omega_2 = 29.62329 \sqrt{EI/(m l^3)}$$

$$\omega_3 = 11.15116 \sqrt{EI/(m l^3)}$$

Resposta - 6.54-b

$$\omega_3 = 48.71082\,(56.3505) = 2744.8791 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_2 = 29.62329\,(56.3505) = 1669.2872 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_1 = 11.15116\,(56.3505) = 628.3734 \text{ rad/sec}$$