

# Vibrações Livres de Sistemas Discretizados

## Graus de Liberdade

número de graus de liberdade de uma estrutura com massas concentradas (postas concentradas) é número de coordenadas independentes, necessárias para definir a posição de todas essas massas.

Assim, a coluna da Fig. 11.1.1 suporta em *A* uma massa.

No caso geral, tem 6 graus de liberdade (3 translações e 3 rotações de *A*). Se admitirmos como significativas apenas as deformações axiais das colunas e as deformações por flexão no plano e as deformações por torção há 3 graus de liberdade (coordenadas 1, 2 e 3, na Fig. 11.1.1).

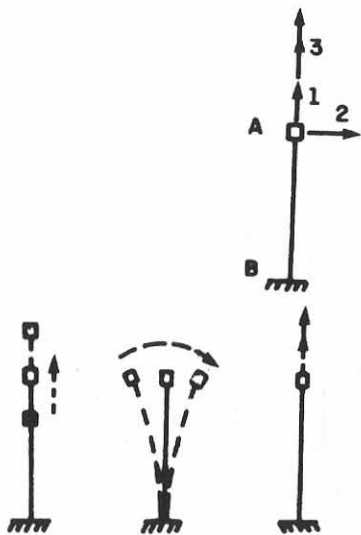


Fig. 11.1.1

Um quadro com viga rígida tem 3 graus de liberdade (coordenadas 1, 2 e 3), se forem consideradas todas as deformações planas das colunas. Desprezando-se

as deformações axiais das colunas, tem apenas 1 grau de liberdade (coordenada 2), ilustrado na Fig. 11.1.1b.

Uma viga com massa distribuída continuamente tem um número infinito de graus de liberdade.

Se as massas são concentradas, as equações do movimento são equações diferenciais ordinárias, cuja solução recai em sistemas de equações algébricas, lineares e simultâneas. As estruturas com distribuição *contínua* de massa dão lugar a sistemas de equações diferenciais de derivadas parciais, cuja solução analítica é difícil. Em tais casos, é usual discretizar o problema, concentrando

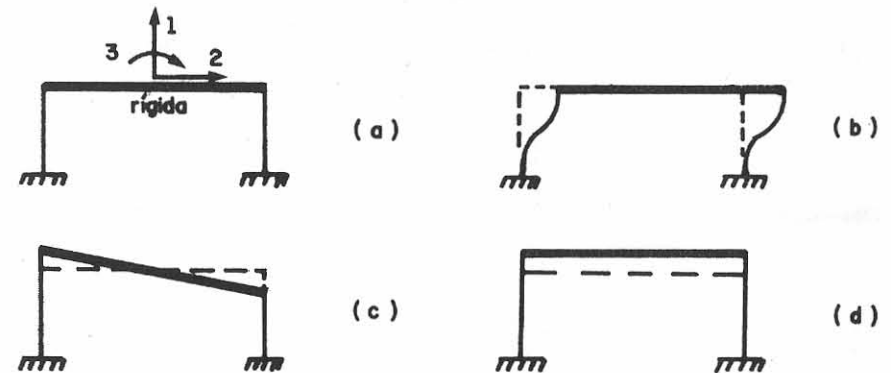


Fig. 11.1.2

as massas em determinados pontos, de sorte a permitir o tratamento ora em estudo.

## 11.2. Vibrações Livres de Sistemas com Um Grau de Liberdade

Estruturas tais como as das Figs. 11.2.1a e b recaem no modelo da Fig. c: uma massa *M* com 1 movimento possível, submetida a uma *ligação elástica linear* de constante *k* (rigidez).

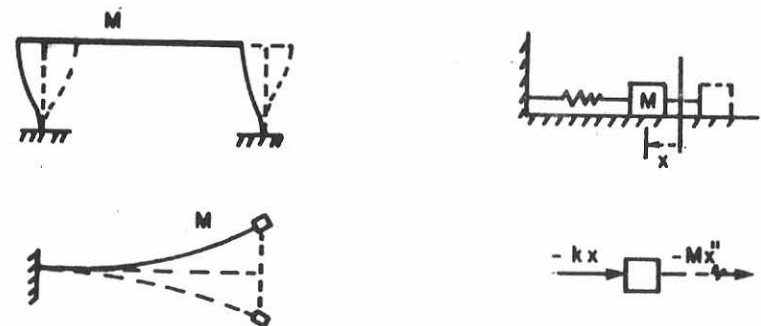


Fig. 11.2.1

Se não houver outras forças e a massa estiver afastada da sua posição de equilíbrio, obtêm-se, omitindo (pelo fato de se anularem) o peso e a reação esta:

1. força elástica  $-kx$ ;
2. força de inércia (d'Alembert)

$$-M\ddot{x} = -M \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Aplicando o Teorema de d'Alembert, chega-se a um problema de equilíbrio:

$$\Sigma X = 0 \quad \therefore \quad \boxed{-M\ddot{x} - kx = 0.} \quad (13)$$

*Observação.* Se houvesse força externa  $F(t)$ , a equação não seria homogênea:

$$-M\ddot{x} - kx + F(t) = 0$$

$$\boxed{M\ddot{x} + kx = F(t).}$$

Estão sendo estudadas vibrações livres sem amortecimento e, portanto,

$$\boxed{M\ddot{x} + kx = 0.} \quad (14)$$

Para simplificar esta equação diferencial homogênea, faz-se

$$\boxed{\frac{k}{M} = p^2,} \quad (15)$$

le  $p$  (pulsão ou frequência circular) tem a dimensão de uma velocidade angular

$$\therefore \quad \boxed{\ddot{x} + p^2x = 0.}$$

A solução clássica, pela substituição  $x=e^r$ , conduz à equação  $r^2 + p^2 = 0$

$$\therefore \quad r = \pm i p \quad e$$

$$\boxed{x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt.}$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  dependem das condições iniciais. Se no instante inicial  $t = 0$  houver uma deflexão  $x_0$  e velocidade  $x'_0$ , chega-se a

$$C_1 = x_0 \quad e \quad C_2 = \frac{x'_0}{p}$$

$$\boxed{x = x_0 \cos pt + \frac{x'_0}{p} \sin pt}$$

e, por uma transformação simples e clássica,

$$\boxed{x = x_m \cos (pt + \varphi_0)} \quad (16)$$

$$\begin{cases} x_m - \text{amplitude;} \\ \varphi_0 \text{ (constante) - ângulo de fase.} \end{cases}$$

Derivando (16) chega-se à velocidade e à aceleração:

$$\boxed{v = \dot{x} = -p x_m \sin (pt + \varphi_0)} \quad (17)$$

e

$$\boxed{\ddot{x} = -p^2 x_m \cos (pt + \varphi_0) = -p^2 x.} \quad (18)$$

O movimento é harmônico simples, com frequência

$$\boxed{f = \frac{p}{2\pi}} \quad (19)$$

e período

$$\boxed{\mathcal{T} = \frac{2\pi}{p}.} \quad (20)$$

amplitude é  $x_m$ .

Se o movimento for de rotação, tem-se

$$-I\ddot{\theta} - k\theta = 0$$

$$p^2 = \frac{k}{I}$$

$$\theta = \theta_m \cos(pt + \varphi_0)$$

$k$  da suspensão, no caso do pórtico da Fig. 11.2.2a, é a força estática para manter a deflexão unitária:

$$k = 2k' = 2 \times \frac{12EJ}{l^3} = \frac{24EJ}{l^3}$$

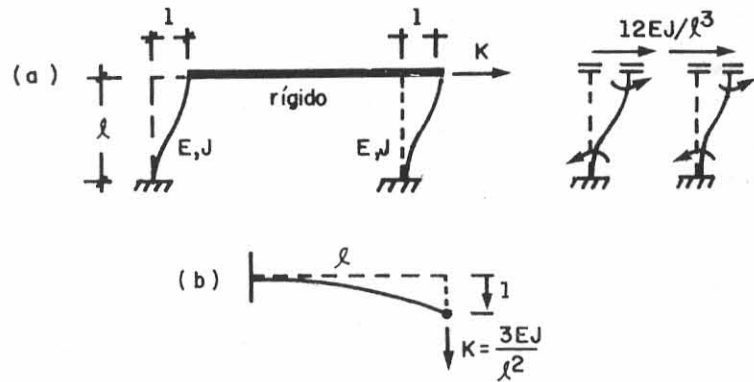


Fig. 11.2.2

o da viga em balanço,

∴  $b$ , é

$$k = \frac{3EJ}{l^3}$$

Assim no caso simples de sistemas com 1 grau de liberdade, pode-se caracterizar o problema de autovalor. De fato, na equação diferencial

$$x'' + \frac{k}{M}x = 0,$$

obtida a solução

$$x = x_m \cos(pt + \varphi_0),$$

substituindo-se  $x'' = -p^2 x_m \cos(pt + \varphi_0)$ .

$$-p^2 x_m \cos(pt + \varphi_0) + \frac{k}{M} x_m \cos(pt + \varphi_0) = 0.$$

Só haverá solução não trivial se o valor característico  $p^2 = \lambda$  for  $p^2 = \frac{k}{M}$ .

11.3. Caso das Estruturas com um Número Finito de Graus de Liberdade

Sejam  $1, 2, 3 \dots n$  as coordenadas que assinalam as deflexões das massas  $M_1, M_2 \dots M_n$  (Fig. 11.3.1);

$k_{ij}$  = coeficiente de rigidez que dá a ação mecânica (força) segundo a coordenada  $j$ , associada à configuração deformada com  $x_i = 1$  e demais  $x = 0$ .

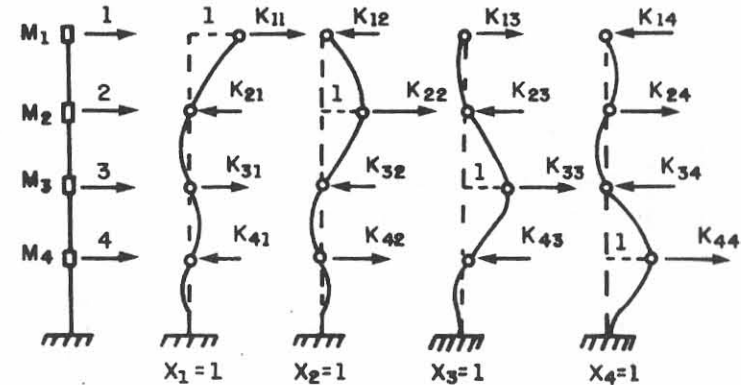


Fig. 11.3.1

Considere-se a estrutura vibrando, num instante  $t$ , na posição assinalada por abscissas  $x_1, x_2 \dots$ , com acelerações  $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2 \dots$ .

Cada massa  $M_i$  estará sujeita a duas forças:

$$F_i = -k_{i1}x_1 - k_{i2}x_2 \dots - k_{in}x_n$$

(força elástica, tendendo a anular a elongação  $x_i$ );

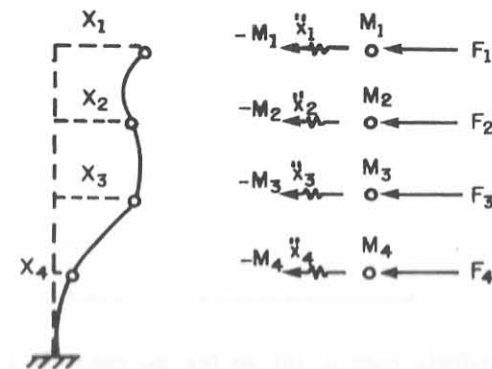


Fig. 11.3.2

$$= -M_i''x_i \text{ (força de inércia).}$$

As equações de equilíbrio (d'Alembert) são:

$$\begin{aligned} -M_1''x_1 - k_{11}x_1 - k_{12}x_2 - \dots - k_{1n}x_n &= 0 \\ -M_2''x_2 - k_{21}x_1 - k_{22}x_2 - \dots - k_{2n}x_n &= 0 \\ \dots & \\ -M_n''x_n - k_{n1}x_1 - k_{n2}x_2 - \dots - k_{nn}x_n &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \text{ (vetor dos deslocamentos);}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{bmatrix} \text{ (matriz das massa que neste caso é uma matriz diagonal, sendo de notar que, quando } x_i \text{ for rotação, a grandeza associada é } I_i, \text{ momento de inércia);}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \text{ (matriz de rigidez da estrutura, que funciona como um sistema de molas elásticas).}$$

As (21) podem ser escritas;

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$[M] \{x''\} + [K] \{x\} = \{0\}.$$

*Solução.* Por analogia com o que se fez no caso de 1 grau de liberdade multiplique-se por  $[M]^{-1}$  (a matriz de massas não é singular), obtendo

$$\{\ddot{X}\} + [M]^{-1}[K] \{X\} = \{0\} \quad (23)$$

ou

$$\{\ddot{X}\} + [D] \{X\} = \{0\}, \quad (24)$$

onde

$$[D] = [M]^{-1}[K] \quad (25)$$

é a "matriz dinâmica" (alguns autores assim designam a sua inversa).

As Eqs. (24), lineares e homogêneas, admitem soluções da forma:

$$\{X\} = \{\bar{X}\} \cos(pt + \phi_0) = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{Bmatrix} \cos(pt + \phi_0),$$

onde  $\bar{x}_i$  é uma amplitude.

De fato, derivando vem  $\{\ddot{X}\} = -p^2\{\bar{X}\} \cos(pt + \phi_0) = -p^2\{X\}$ .

A substituição nas Eqs. (24) dá:

$$-p^2\{\bar{X}\} + [D] \{\bar{X}\} = \{0\},$$

(simplificando  $\cos(pt + \phi_0)$  que é fator comum).

Para

$$p^2 = \lambda \quad (26)$$

tem-se

$$[D] \{\bar{X}\} = \lambda \{\bar{X}\}. \quad (27)$$

As Eqs. (27) mostram que se trata de um problema de valores característicos:

$$\begin{bmatrix} (D_{11} - \lambda) & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & (D_{22} - \lambda) & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & (D_{nn} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \dots \\ \bar{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

A cada valor característico  $\lambda_i$  corresponde uma freqüência circular  $p_i = \sqrt{\lambda_i}$  um vetor modal

$$\{\bar{X}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_{1i} \\ \bar{x}_{2i} \\ \dots \\ \bar{x}_{ni} \end{Bmatrix} \quad (\text{modo natural de vibração}):$$

$$\lambda_i \rightarrow p_i \rightarrow \text{freqüência natural} \quad f_i = \frac{p_i}{2\pi} \rightarrow \text{modo natural} \quad \{\bar{X}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_{1i} \\ \bar{x}_{2i} \\ \dots \\ \bar{x}_{ni} \end{Bmatrix}$$

As equações gerais do movimento (solução geral do sistema de equações diferenciais) são:

$$X = C_1 \{\bar{X}_1\} \cos(p_1 t + \phi_1) + C_2 \{\bar{X}_2\} \cos(p_2 t + \phi_2) + \dots + C_n \{\bar{X}_n\} \cos(p_n t + \phi_n).$$

Como se vê, o movimento vai participar de todos os modos naturais. Os coeficientes constantes  $C_1, C_2 \dots C_n$  dessa combinação linear dependem das condições que provocaram a vibração.

Na prática, interessam os modos correspondentes a *freqüências naturais mais baixas* (menores  $\lambda$ ), porque essas freqüências são mais facilmente atingidas pelas forças excitadoras (vento, forças excêntricas de máquinas, terremotos etc.), vindo perigo de ressonância.

11.3.1. Exemplos

Determinar as freqüências e os modos naturais de vibração da estrutura da Fig. 11.3.3 (*shear building*) com vigas rígidas e colunas iguais com  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$  e  $J = 0,00248 \text{ m}^4$ .

massas concentradas nos níveis dos tetos são iguais  $M = \frac{P}{g} = \frac{19,6 \text{ t}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 2$  unidades técnicas de massa (sistema m-tf-s).

Solução. A estrutura tem 2 graus de liberdade (translação dos 2 tetos, coordenadas 1 e 2 da Fig. 11.3.4).

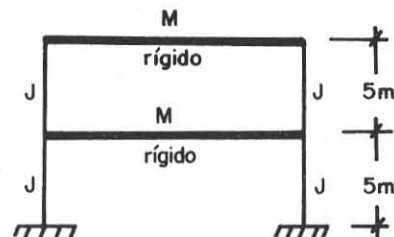
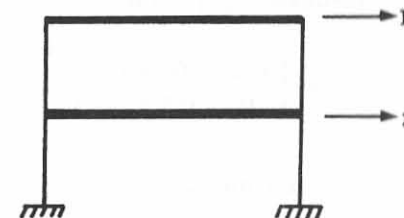


Fig. 11.3.3



(coordenadas)

Fig. 11.3.4

A rigidez de cada coluna é

$$k = \frac{12EJ}{l^3} \approx 500 \text{ t/m}.$$

A matriz de rigidez da estrutura pode ser obtida como se vê na Fig. 11.3.5 (rigidez direta).

$$K = 1000 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

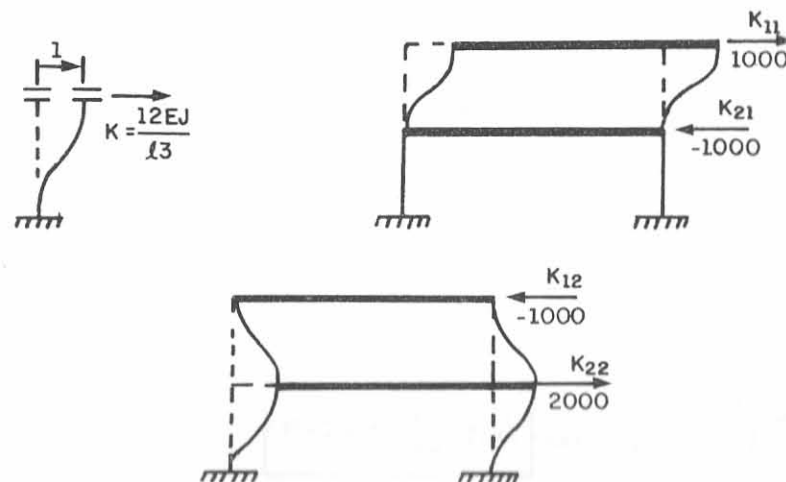


Fig. 11.3.5

matriz das massas:  $[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

matriz dinâmica:  $[D] = [M]^{-1}[K] =$

$$= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times 1000 = 500 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Equações do movimento vibratório livre:

$$\{\ddot{X}\} + 500 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \{X\} = \{0\}.$$

Para  $\lambda = p^2$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} (500 - \lambda) & -500 \\ -500 & (1000 - \lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

Equação característica;

$$\begin{vmatrix} (500 - \lambda) & -500 \\ -500 & (1000 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1500\lambda + 250\,000 = 0.$$

$$\lambda = 750 \mp 559 \begin{cases} \lambda_1 = p_1^2 = 191 \\ \lambda_2 = p_2^2 = 1309 \end{cases} \quad (\text{autovalores}).$$

1.º modo (Fundamental):

Corresponde a  $\lambda_1 = p_1^2 = 191$

$$\therefore p_1 = 13,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = 2,2 \text{ c/s.}$$

vetor modal correspondente: arbitrando  $\bar{x}_1 = 1,000$  e para  $\lambda_1 = 191$ , uma das equações (\*) dá:  $\bar{x}_2 = 0,618$ .

1.º modo:

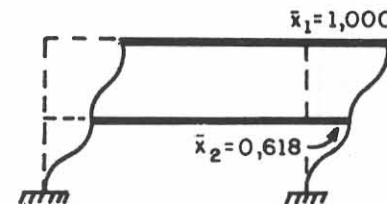
$$\{\bar{X}_1\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0,618 \end{Bmatrix} \quad (\text{ver a Fig. 11.3.6}).$$

2.º modo:

$$\lambda_2 = p_2^2 = 1309$$

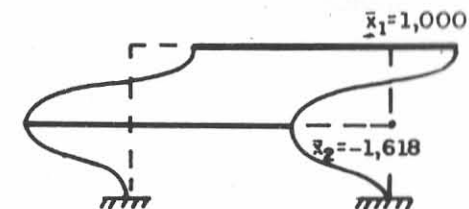
$$p_2 = 36,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$f_2 = \frac{p_2}{2\pi} = 5,8 \text{ c/s}$$



1º Modo

Fig. 11.3.6



2º Modo

Fig. 11.3.7

para  $\lambda = 1039$  e  $\bar{x}_1 = 1,000$ , tem-se

$$\bar{x}_2 = -1,618.$$

3.º modo:

$$\{\bar{X}_2\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -1,618 \end{Bmatrix}$$

Verificação da ortogonalidade dos modos naturais;

$$\{\bar{X}_1\}^T [K] \{\bar{X}_2\} = [1,000 \ 0,618] \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 2000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -1,618 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\{\bar{X}_1\}^T [M] \{\bar{X}_2\} = [1,000 \ 0,618] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -1,618 \end{Bmatrix} = 0$$

Normalização de  $\{\bar{X}_1\}$ :

$$\{\bar{X}_1\}^T [M] \{\bar{X}_1\} = 2,764 \quad (\text{valor que se pretende tornar unitário})$$

$$\{\bar{\bar{X}}_1\} = \frac{1}{\sqrt{2,764}} \{\bar{X}_1\} = \begin{Bmatrix} 0,600 \\ 0,372 \end{Bmatrix} \quad (\text{normalizado}).$$

Normalização de  $\{\bar{X}_2\}$ :

$$\{\bar{X}_2\}^T [M] \{\bar{X}_2\} = 7,336$$

$$\{\bar{\bar{X}}_2\} = \frac{1}{\sqrt{7,336}} \{\bar{X}_2\} = \begin{Bmatrix} 0,372 \\ -0,600 \end{Bmatrix}$$

Matriz modal:

$$[\bar{\bar{X}}] = \begin{Bmatrix} 0,600 & 0,372 \\ 0,372 & -0,600 \end{Bmatrix}$$

Observação. (Emprego do Quociente de Rayleigh na Solução).

Os autovalores e modos poderiam ser determinados por aproximação, empregando o quociente de Rayleigh.

As equações obtidas são:

$$1000 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

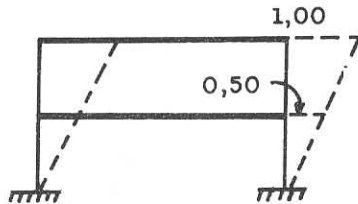


Fig. 11.3.8

1.º modo:

Arbitrando  $\{X\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,50 \end{Bmatrix}$ , tem-se:

$$\lambda_R = \frac{\{X\}^T [K] \{X\}}{\{X\}^T [M] \{X\}} = \frac{[1,00 \ 0,50] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,50 \end{Bmatrix} \times 1000}{[1,00 \ 0,50] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,50 \end{Bmatrix}} = \frac{500}{2,50} = 200 = \lambda_1$$

11.3. CASO DAS ESTRUTURAS

A equação  $\begin{bmatrix} (500-\lambda) & -500 \\ -500 & (1000-\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^{(*)}$  dá  $300x_1 - 500x_2 = 0$ ;

fazendo  $x_1 = 1,00$  vem  $x_2 = 0,60$ .

Para  $\{X\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,60 \end{Bmatrix}$ , 0

quociente de Rayleigh dá  $\lambda_R = \frac{520}{2,72} = 191$

e a equação (\*) dá

$$\{X_1\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0,618 \end{Bmatrix}$$

2.º modo:

O 2.º modo costuma ter um "nó". Arbitrando  $\{X\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,00 \end{Bmatrix}$  chega-se a  $\lambda_R = \frac{5000}{4} =$

$1,250$ . Este valor de  $\lambda$  dá, na 1.ª equação,  $-500x_1 - 250x_2 = 0$ ; para  $x_1 = 1,00$  vem  $x_2 = -2,00$ .

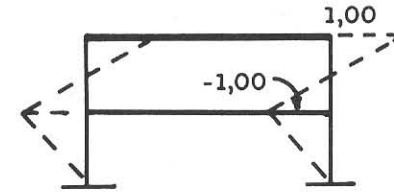


Fig. 11.3.9

O novo vetor  $\begin{Bmatrix} 1,00 \\ -2,00 \end{Bmatrix}$  dá

$$\lambda_R = \frac{13000}{10} = 1300$$

A equação (\*) dá  $\{X\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,66 \end{Bmatrix}$ .

Este vetor conduz a  $\lambda_R = \frac{9890}{5,55} = 1310$

$$\{X_2\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -1,618 \end{Bmatrix}$$

Nota. As próprias figuras sugerem que o 2.º modo (de maior frequência natural) envolve energia de deformação bem maior do que a desenvolvida no 1.º.

modo imita, em geral, a elástica produzida por forças estáticas.

2. Reservatório elevado na extremidade de uma coluna, deslocando-se por rotação (coordenada 1) ou rotação (coordenada 2) no plano da Fig. 11.3.10 (aus de liberdade). São dados:

— coluna:  $E = 2,1 \times 10^6 \frac{t}{m^2}$ ;  $J = 0,0305 m^4$ , massa desprezível;

— reservatório: peso = 19,6 t; massa =  $\frac{19,6}{9,8} = 2$  (u.t.m.);

de giração  $\rho = 0,5 m$ .  $I = 2 \times 0,5^2 = 0,5$  (em unidades de momento nércia no sistema m-tf-s).

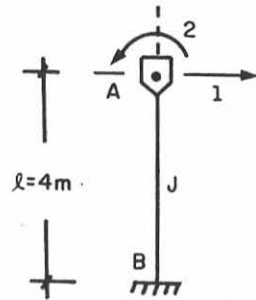


Fig. 11.3.10

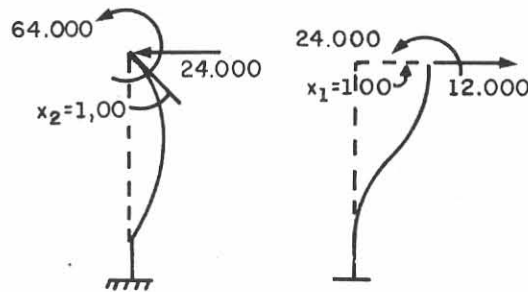


Fig. 11.3.11

Solução.

Matriz das massas:

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez:

$$[K] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 4l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\ 000 & 24\ 000 \\ 24\ 000 & 64\ 000 \end{bmatrix}$$

Matriz  $[D]$ :

$$[D] = [M]^{-1}[K] = \begin{bmatrix} 6\ 000 & 12\ 000 \\ 48\ 000 & 128\ 000 \end{bmatrix}$$

Cálculo dos valores característicos:

$$\begin{vmatrix} (6\ 000 - \lambda) & 12\ 000 \\ 48\ 000 & (128\ 000 - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 - 134\ 000\lambda + 192\ 000 = 0$$

$$\lambda_1 = p_1^2 = 1\ 450; \quad \lambda_2 = p_2^2 = 132\ 550.$$

1.º modo de vibração

$$\lambda_1 = 1\ 450; \quad f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{38,1}{2\pi} = 6,06 \text{ c/s.}$$

Para  $x_1 = 1,00 \rightarrow x_2 = -0,379$ ;

— normalização:  $\{\bar{X}_1\}^T [M] \{\bar{X}_1\} = 1,928$ ;

$$\text{— modo normalizado } \{\bar{\bar{X}}_1\} = \frac{1}{\sqrt{1,928}} \begin{Bmatrix} 1\ 000 \\ -0,379 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,719 \\ -0,272 \end{Bmatrix}.$$

2.º modo de vibração

$$\lambda_2 = p_2^2 = 132\ 550; \quad f_2 = \frac{p_2}{2\pi} = 57,90 \text{ c/s.}$$

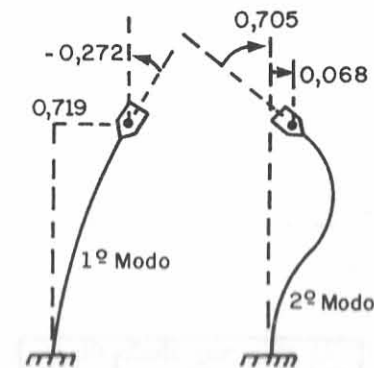


Fig. 11.3.12



$$x_2 = 1\,000 \rightarrow x_1 = 0,095;$$

$$\{X_2\}^T [M] \{\bar{X}_2\} = 2,005;$$

$$\{\bar{X}_2\} = \frac{1}{\sqrt{2,005}} \begin{Bmatrix} 0,095 \\ 1,000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,068 \\ 0,705 \end{Bmatrix}.$$

ig. 11.3.12 mostra os dois modos.

**11.3.2. Iteração Segundo a Técnica de Stodola-Vianello**

Já foi observado que o cálculo de vibrações livres em sistemas discretos,  $n$  graus de liberdade é laborioso, porque envolve:

1. a resolução de uma equação característica do grau  $n$ :  $\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + \dots + C_n = 0$ , para que se determinem as freqüências naturais;
2. para cada freqüência, a resolução de um sistema de  $(n - 1)$  equações res simultâneas, a fim de que se obtenha o vetor modal  $\{\bar{X}_i\}$ .

Na prática, interessa conhecer os primeiros modos (de menor freqüência), mais s de serem atingidos pelas condições de excitação externa.

A grande massa de trabalho deste problema, quando  $n$  cresce, impõe a con- cência de substituir a solução direta, pelos processos de iteração, que darão não s autovalores  $p_i^2 = \lambda_i$ , como também os modos  $\{\bar{X}_i\}$ .

Acontece que nos processos iterativos (e especificamente no de Stodola- nello, que será estudado) a solução converge para o modo de autovalor mais do.

Ora, a solução vista acarreta as equações

$$[K] \{X\} = p^2 [M] \{X\} \quad \text{ou} \quad [D] \{X\} = \lambda \{X\} \quad (27)$$

$$[D] = [M]^{-1} [K] \quad (25) \quad \text{e} \quad p^2 = \lambda. \quad (26)$$

A iteração feita com esta formulação conduzirá às freqüências mais eleva- o que não se deseja.

As equações acima podem ser transformadas. Pré-multiplicando a pri- a por  $\frac{1}{p^2} [K]^{-1}$  tem-se:

$$[K]^{-1} [M] \{X\} = \frac{1}{p^2} \{X\} \quad (29)$$

ou

$$[E] \{X\} = \mu \{X\} \quad (30)$$

que é também um problema de autovalores,

$$\mu = \frac{1}{p^2} \quad (31)$$

e

$$[E] = [K]^{-1} [M] = [F] [M] \quad (32)$$

(sendo  $[F]$  a matriz de flexibilidade).

A iteração com base nas Eqs. (30) atende aos objetivos visados, porque converge para o maior  $\mu$ , ou menor freqüência.

Técnica de Stodola-Vianello — Iteração para obter a freqüência fundamental e o 1.º modo

$$1. \text{ Arbitre-se, por intuição, um vetor } \{X\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix}, \text{ considerando-o}$$

1.ª aproximação do 1.º modo  $\{\bar{X}_1\}$ .

2. Pré-multiplique-se por  $[E]$ :

$[E] \{X\}^{(1)} = \{X''\}$ ; normalize-se o resultado (dividindo todos os termos pelo primeiro,  $x_1$ ), para que o 1.º termo seja unitário:

$$\{X^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}.$$

3. Pré-multiplique-se novamente por  $[E]$  e normalize-se, obtendo novo vetor:

$$[E] \{X^{(2)}\} = \{X'''\} \rightarrow \text{dividindo por } x_1''': \{X^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}.$$