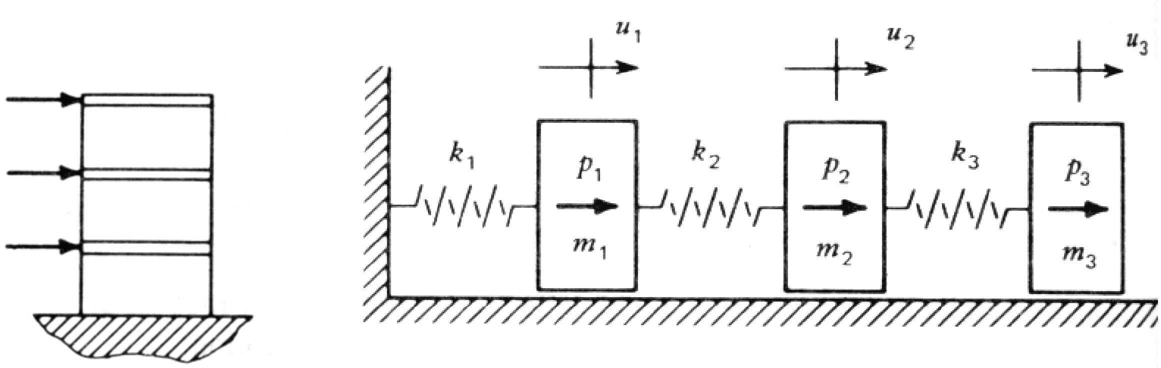
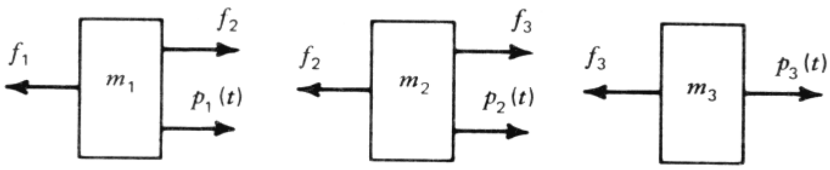
III. Estruturas com Vários Graus de Liberdade

III.1 Equações do Movimento

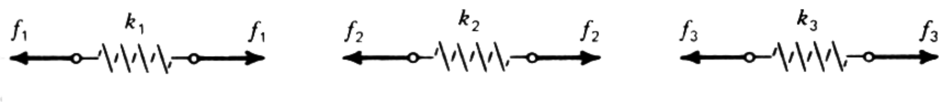


- No exemplo de três graus de liberdade (GLs) longitudinais, para cada uma das partículas, temos:



$$\sum F_x = m_1\ddot{u}_1 = p_1 + f_2 - f_1$$
$$\sum F_x = m_2\ddot{u}_2 = p_2 + f_3 - f_2$$
$$\sum F_x = m_3\ddot{u}_3 = p_3 - f_3$$

- As forças elásticas podem ser entendidas como:



$$f_1 = k_1 u_1$$
$$f_2 = k_2(u_2 - u_1)$$
$$f_3 = k_3(u_3 - u_2)$$

- Combinando as equações:

$$m_1\ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)\cdot u_1 - k_2 u_2 = p_1(t)$$
$$m_2\ddot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3)\cdot u_2 - k_3 u_3 = p_2(t)$$
$$m_3\ddot{u}_3 - k_3 u_2 + k_3 u_3 = p_3(t)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[\mathbf{M}] \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{P}(\mathbf{t})\}}$$

onde:

$[\mathbf{M}]$ é a matriz de massa do sistema estrutural, no caso de estruturas com massas concentradas é uma matriz diagonal (lumped mass matrix);

$[\mathbf{K}]$ é a matriz de rigidez, segundo os GLs (coordenadas), sendo idêntica à matriz de rigidez do problema estático;

$\{\mathbf{u}\}$ é o vetor de deslocamentos

$\{\mathbf{P}(\mathbf{t})\}$ é o vetor de carregamentos

- Para vibrações <u>amortecidas</u> poderíamos escrever:

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}] \cdot \{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{P}(\mathbf{t})\}$$

Onde $[\mathbf{C}]$ é a matriz de amortecimento do sistema estrutural

III.2 – Solução da Vibração Livre Não-Amortecida

$$[\mathbf{M}]\cdot\{\ddot{\mathbf{u}}\}+[\mathbf{K}]\cdot\{\mathbf{u}\}=\{\mathbf{0}\}$$

- Por analogia com o caso da vibração livre com um grau de liberdade, assume-se uma solução harmônica na forma:

$$u_i = U_i \cdot cos(\omega t-\alpha)$$

ou ainda:

$$\{\mathbf{u}\}=\{\mathbf{U}\}\cdot cos(\omega t-\alpha)$$

- Substituindo a solução suposta na equação do movimento:

$$-\omega^2[\mathbf{M}]\cdot\{\mathbf{U}\}\cos(\omega t-\alpha)+[\mathbf{K}]\cdot\{\mathbf{U}\}\cos(\omega t-\alpha)=\{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow\{\ [\mathbf{K}]-\omega^2[\mathbf{M}]\ \}\cdot\{\mathbf{U}\}=\{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow\left([\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]\right)\cdot\{\mathbf{U}\}=\omega^2\cdot\{\mathbf{U}\}$$

$$\Rightarrow[\mathbf{D}]\cdot\{\varphi\}=\lambda\cdot\{\varphi\}\qquad\text{(Problema de Autovalor/Autovetor)}$$

onde:

$[\mathbf{D}]$ é a matriz dinâmica, igual à $[\mathbf{M}]^{-1}\cdot[\mathbf{K}]\cdot$

$\{\phi\}$ é o autovetor do prob. valores característicos (formas modais de vibração)

$\lambda=\omega^2$ é o autovalor do problema de valores característicos (freq. naturais)

- Solução da estrutura:

$$\{\mathbf{u}\}=\{\mathbf{U}\}\cdot\cos(\omega t-\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}u_1(t)\\ \dots\\ u_n(t)\end{Bmatrix}=C_1\cdot\begin{Bmatrix}U_1\\ \dots\\ U_n\end{Bmatrix}_1\cdot\cos(\omega_1 t-\alpha_1)+\dots+C_n\cdot\begin{Bmatrix}U_1\\ \dots\\ U_n\end{Bmatrix}_n\cdot\cos(\omega_n t-\alpha_n)$$

onde C_i e α_i dependem das condições iniciais do movimento.

III.3 - Obtenção das Frequências Naturais e Formas Modais

$$\left\{[\mathbf{K}]-\omega^2[\mathbf{M}]\right\}\cdot\{\mathbf{U}\}=\{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \left([\mathbf{D}]-\lambda\cdot[\mathbf{I}_n]\right)\cdot\{\phi\}=\{\mathbf{0}\}$$

- O sistema de equações da vibração livre pode ser colocado na forma:

$$\begin{bmatrix} (D_{11}-\lambda) & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & (D_{22}-\lambda) & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & (D_{33}-\lambda) \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

Para que o autovetor não seja nulo, ou seja, para que a solução trivial não seja a única solução do sistema de equações lineares, deve-se garantir que:

$$\begin{vmatrix} (D_{11}-\lambda) & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & (D_{22}-\lambda) & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & (D_{33}-\lambda) \end{vmatrix}=0$$

A equação acima (polinômio característico) implica na resolução de uma equação polinomial de grau *n*, com *n* soluções, onde *n* é o número de graus de liberdade da estrutura:

$$c_1\lambda^n + c_2\lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$$

Ou seja, se a estrutura tem *n* graus de liberdade:

1. As matrizes $[\mathbf{K}]$ e $[\mathbf{M}]$ serão de ordem (nxn);
2. Os vetores $\{\mathbf{U}\}$, $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$ serão de ordem *n*;
3. Haverá *n* frequências naturais, correspondentes aos *n* autovalores $\lambda=\omega^2$;
4. Haverá *n* modos naturais $\{\phi\}=\{\mathbf{U}\}$, cada um deles correspondentes a uma frequência natural.

⇒ <u>Solução numérica</u> do problema de Autovalores/Autovetores através do algoritmo de <u>Jacobi</u>, ou pela técnica do <u>Subespaço</u> (Bathe).

III.4 – Método da Superposição Modal

A propriedade mais importante dos modos naturais de vibração é a propriedade de ortogonalidade (em relação à matriz de massa e rigidez), própria do problema de autovalores:

$$[\phi]_i \cdot [\mathbf{M}] \cdot [\phi]_j = 0$$
$$[\phi]_i \cdot [\mathbf{K}] \cdot [\phi]_j = 0 \qquad i \neq j$$

Define-se Matriz Modal como a matriz obtida pela justaposição das formas modais:

$$[\Phi] = [\phi_1 \ldots \phi_n]$$

Diz-se que os modos estão normalizados (em relação à matriz de massa) quando:

$$\Rightarrow [\Phi]^t \cdot [\mathbf{M}] \cdot [\Phi] = \mathbf{I}_n$$

onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem *n*.

Logo, se m_j (massa modal) é:

$$\Rightarrow \{U\}_j^t \cdot [\mathbf{M}] \cdot \{U\}_j = m_j$$

Então o autovetor normalizado pode ser obtido:

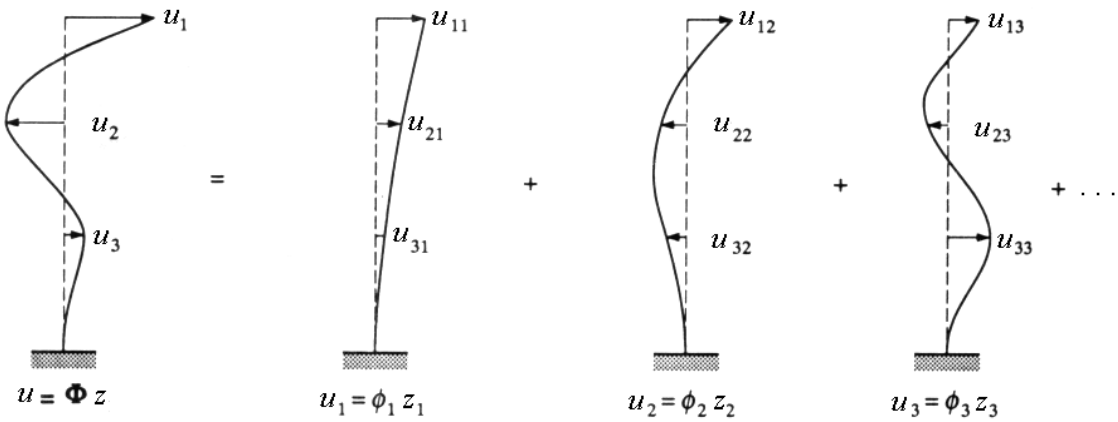
$$\Rightarrow \{\phi\}_j = \frac{1}{\sqrt{m_j}} \cdot \{U\}_j$$

Fazendo: $[\Phi]^t \cdot [\mathbf{M}] \cdot [\Phi] = \mathbf{I}_n$

Podendo-se ainda mostrar que:

$$[\Phi]^t \cdot [\mathbf{K}] \cdot [\Phi] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad \text{(Matriz Espectral)}$$

Considerando-se que uma resposta dinâmica genérica de uma estrutura pode ser colocada como uma combinação linear das diferentes formas de vibração:



O vetor de deslocamentos da estrutura pode então ser colocado como:

$$\{\mathbf{u}\} = \{\phi\}_1 \cdot z_1 + \{\phi\}_2 \cdot z_2 + \ldots + \{\phi\}_n \cdot z_n = [\Phi] \cdot \{\mathbf{z}\}$$

O que corresponde à seguinte transformação de coordenadas:

$$\{\mathbf{u}\} = [\Phi] \cdot \{\mathbf{z}\}$$

Substituindo na equação de equilíbrio:

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{P}(\mathbf{t})\}$$

$$\Rightarrow [\mathbf{M}] \cdot [\Phi] \cdot \{\ddot{\mathbf{z}}\} + [\mathbf{K}] \cdot [\Phi] \cdot \{\mathbf{z}\} = \{\mathbf{P}(\mathbf{t})\}$$

$$\Rightarrow [\Phi]^t \cdot ([\mathbf{M}] \cdot [\Phi] \cdot \{\ddot{\mathbf{z}}\} + [\mathbf{K}] \cdot [\Phi] \cdot \{\mathbf{z}\}) = [\Phi]^t \cdot \{\mathbf{P}(\mathbf{t})\}$$

$$\Rightarrow [\Phi]^t \cdot [\mathbf{M}] \cdot [\Phi] \cdot \{\ddot{\mathbf{z}}\} + [\Phi]^t \cdot [\mathbf{K}] \cdot [\Phi] \cdot \{\mathbf{z}\} = [\Phi]^t \cdot \{\mathbf{P}(\mathbf{t})\}$$

$$\Rightarrow \{\ddot{\mathbf{z}}\} - \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \cdot \{\mathbf{z}\} = \{\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{t})\}$$

Obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias (2ª ord) <u>desacopladas</u>:

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{z}_1 + \omega_1^2 \cdot z_1 = \overline{P}_1(t) \\ \ddot{z}_2 + \omega_2^2 \cdot z_2 = \overline{P}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{z}_n + \omega_n^2 \cdot z_n = \overline{P}_n(t) \end{cases} \quad \Rightarrow z_1(t), \ldots, z_n(t) \quad \Rightarrow u_1(t), \ldots, u_n(t)$$

$\Rightarrow$Solução numérica pelo algoritmo de <u>Runge-Kutta</u> de 4ª ordem, ou por <u>Newmark</u>.