II.2 – Vibrações Forçadas

II.2.1 – Reposta não amortecida a um carregamento harmônico

- Equação do movimento:

FORÇA EXTERNA DINÂMICA: $p(t) = p_0 \cdot sen\,\overline{\omega}t$

Onde $\overline{\omega}$ = frequência circular da força excitadora

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = p_0 \cdot sen\,\overline{\omega}t}$$

Solução homogênea (vibração livre não amortecida):

$$\Rightarrow x_h(t) = A \cdot cos\,\omega t + B \cdot sen\,\omega t$$

Solução particular:

$\Rightarrow x_p(t) = C \cdot sen\,\overline{\omega}t$ (a resposta da estrutura está em fase com a força)

Substituindo a solução particular na equação do movimento:

$$C = \frac{p_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2}$$

Solução geral:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A \cdot cos\,\omega t + B \cdot sen\,\omega t + \frac{p_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2} \cdot sen\,\overline{\omega}t$$

Para condições iniciais: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$\boxed{x(t) = \frac{p_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2} \cdot \left[sen\,\overline{\omega}t - \left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2 \cdot sen\,\omega t \right]}$$

Deflexão estática	=	deslocamento que produziria o carregamento p_0 aplicado estaticamente	$= x_{est} = \frac{p_0}{k}$

II.2.2 – Reposta amortecida a um carregamento harmônico

- Equação do movimento:

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = p_0 \cdot sen\,\overline{\omega} t}$$

Solução homogênea (vibração livre amortecida):

$$\Rightarrow x_h(t) = (A \cdot cos\,\omega_D t + B \cdot sen\,\omega_D t) \cdot e^{-\xi\omega t}$$

Solução particular:

$$\Rightarrow x_p(t) = C_1 \cdot cos\,\overline{\omega} t + C_2 \cdot sen\,\overline{\omega} t$$

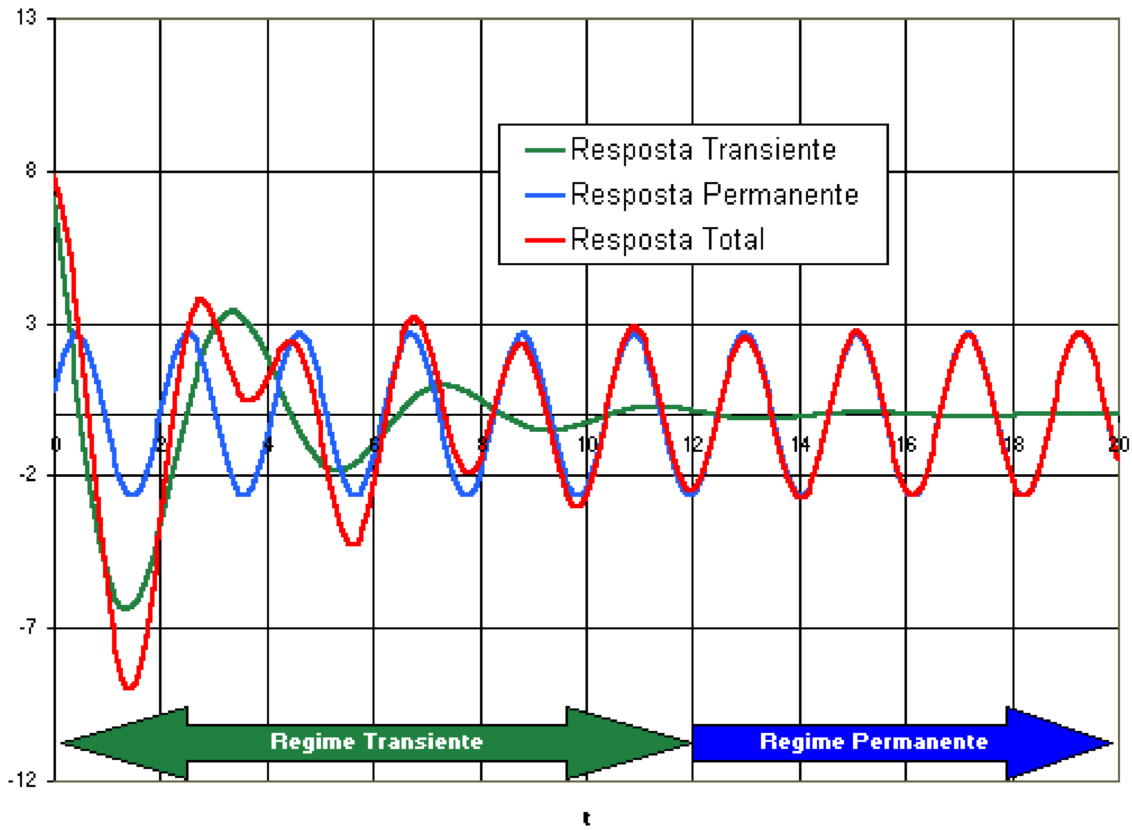
(em função do amortecimento, a resposta da estrutura não deve estar em fase com a força excitadora)

Solução geral:

$$x(t) = x_h(t) + \underbrace{\frac{p_0}{k} \cdot \left[\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\right] \cdot \left[(1-\beta^2) sen\,\overline{\omega} t - 2\xi\beta\, cos\,\overline{\omega} t\right]}$$

Resposta Transiente (desaparece no tempo) | Resposta Permanente (steady state)

onde $\beta = \dfrac{\overline{\omega}}{\omega}$

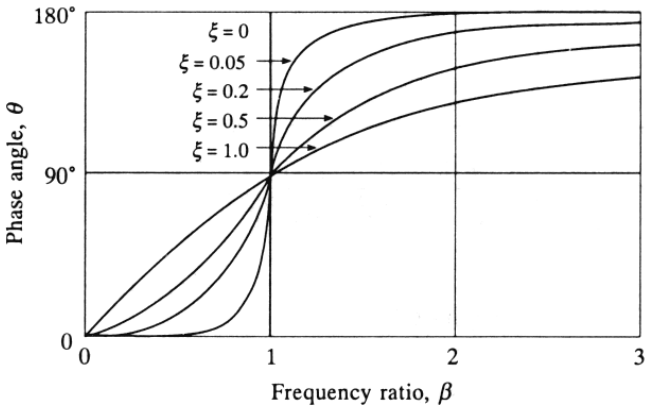


Passado o regime transiente, a resposta consiste na solução particular:

$$\Rightarrow x_p(t) = \rho \cdot sin(\overline{\omega}t - \theta)$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{p_0}{k} \cdot \left[\left(1 - \beta^2\right)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$ (amplitude da resposta permanente)

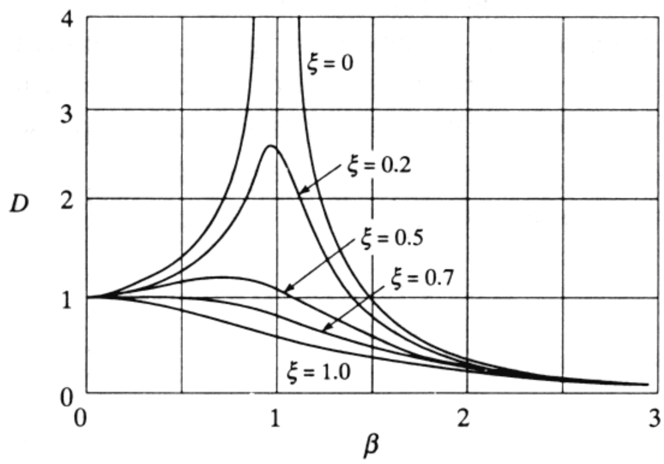
$$\Rightarrow \theta = arctg\left[\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \right]$$ (ângulo fase entre a resposta e a excitação)



Variation of phase angle with damping and frequency.

Fator de amplificação dinâmica	=	representa o efeito de amplificação do carregamento harmônico em relação ao efeito estático	$= D = \left[\left(1 - \beta^2\right)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{-1/2}$

- Ressonância:

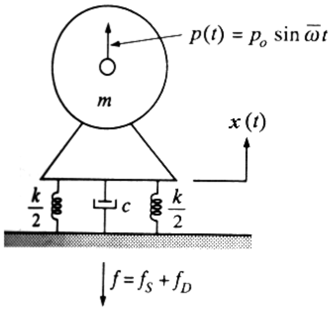


Variation of dynamic magnification factor with damping and frequency.

Ressonância $\Rightarrow \beta = 1$ (para $\xi \cong 0$) $\Rightarrow D \to \infty$

II.2.2 – Isolamento de vibrações

- Prevenção contra efeitos prejudiciais de vibrações induzidas por máquinas instaladas na própria estrutura;
- Proteção de equipamentos sensíveis à vibrações induzidas na estrutura.



vibration-isolation system
(applied loading).

Resposta no regime permanente:

$$x_p(t) = \frac{p_0}{k} D \cdot sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

Força elástica transmitida à base:

$$f_s(t) = k \cdot x(t) = p_0 D \cdot sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

Força de amortecimento transmitida à base:

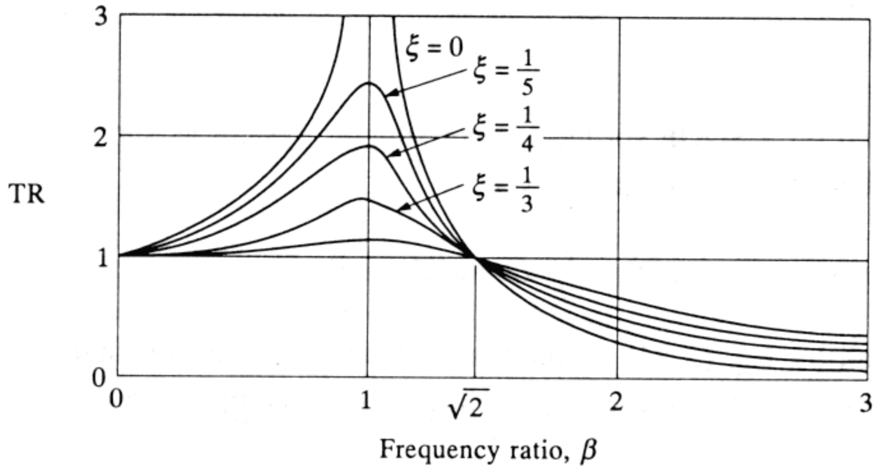
$$f_D(t) = c \cdot \dot{x}(t) = \frac{c \cdot p_0 \cdot D \cdot \bar{\omega}}{k} \cos(\bar{\omega} t - \theta) = 2\xi \cdot \beta \cdot p_0 \cdot D \cdot \cos(\bar{\omega} t - \theta)$$

Por estarem $f_S(t)$ e $f_D(t)$ defasadas de 90º, tem-se:

$$\vec{f} = \vec{f}_S + \vec{f}_D \quad \Rightarrow f = \sqrt{f_S^2 + f_D^2}$$

$$\Rightarrow f_{max}(t) = p_0 \cdot D \cdot \left[1 + (2\xi\beta)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Transmissibilidade do sistema	$\equiv$	relação entre a máxima força transmitida aos apoios e a amplitude da força excitadora	$\equiv TR \equiv \frac{f_{max}(t)}{p_0} = D \cdot \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$



Vibration-transmissibility ratio (applied loading or support excitation).

Conclusões:

- $\beta < \sqrt{2} \Rightarrow \uparrow \xi \Rightarrow \downarrow TR \Rightarrow \uparrow$ isolamento
- $\beta > \sqrt{2} \Rightarrow \uparrow \xi \Rightarrow \uparrow TR \Rightarrow \downarrow$ isolamento

  $\Rightarrow \beta = \dfrac{\overline{\omega}}{\omega} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \omega \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{\omega} \Rightarrow k \leq \dfrac{m \cdot \overline{\omega}^2}{2}$ (molas macias)
- Operar em frequência $\overline{\omega} \geq \sqrt{2} \cdot \omega$ **X** passagem pela frequência de ressonância