II.1.3 – Vibrações Livres Amortecidas

- Equação de equilíbrio:

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0}$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0 \qquad \Rightarrow \ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x} \cdot (t) + \omega^2 x(t) = 0$$

$$\text{onde } \omega^2 = \frac{k}{m}, \text{ e } \xi = \frac{c}{2m \cdot \omega}$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot e^{st}$$

Substituindo na equação anterior:

$$s^2 + 2\xi\omega \cdot s + \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow s = -\xi \cdot \omega \pm i\omega\sqrt{1 - \xi^2} \qquad \text{(II.1)}$$

$$\Rightarrow x(t) = A_1 \cdot e^{\left(-\xi \cdot \omega + i\omega\sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot t} + A_2 \cdot e^{\left(-\xi \cdot \omega - i\omega\sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \left[A_1 \cdot e^{\left(i\omega\sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot t} + A_2 \cdot e^{\left(-i\omega\sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot t} \right] \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \qquad \text{(II.2)}$$

$\xi = 1 \quad \Rightarrow$ radical da equação (II.1) se anula $\Rightarrow$ duas raízes iguais

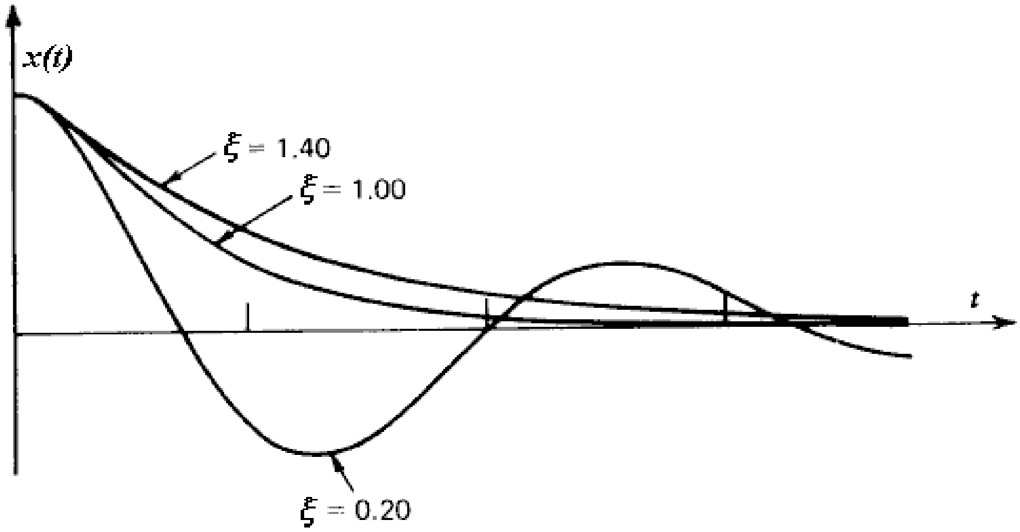
$\Rightarrow$ função <u>real</u>, sem oscilação, tendendo assintoticamente a zero, conforme comanda o fator exponencial $e^{-\xi \cdot \omega \cdot t}$;

$\Rightarrow \xi = \dfrac{c}{2m \cdot \omega} = 1 \;\Rightarrow\; c = c_c = 2m \cdot \omega$ (coeficiente de amortecimento)

$\Rightarrow c_c \equiv$ amortecimento crítico

$\Rightarrow \xi = \dfrac{c}{c_c} \equiv$ taxa de amortecimento

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = 1 & \text{amortecimento crítico} \\ \xi < 1 & \text{sistema sub-amortecido (estruturas usuais)} \\ \xi > 1 & \text{sistema super-amortecido (automóveis)} \end{cases}$$



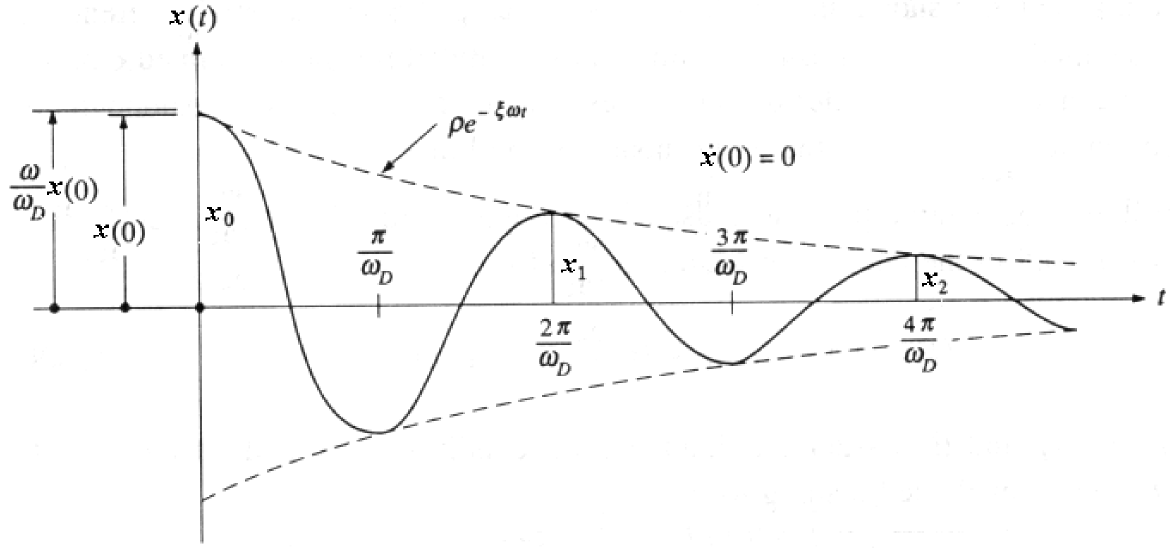
Response of a viscous-damped SDOF system with various damping levels.

O amortecimento crítico representa a menor magnitude de amortecimento para a qual nenhuma oscilação (ciclo) ocorre, em sistemas estruturais submetidos a vibrações livres.

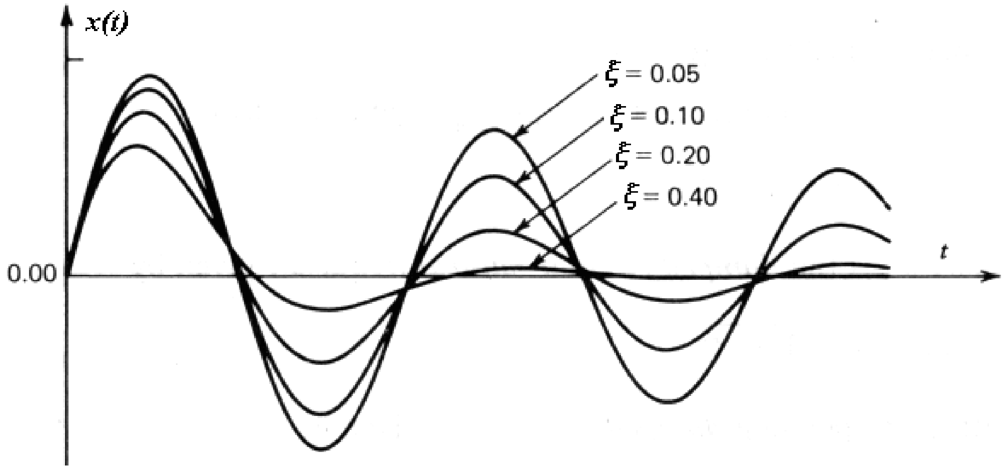
- Sistemas sub-amortecidos ($0 < \xi < 1$) :

Definindo $\boxed{\omega_D \equiv \omega \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$ como frequência circular amortecida, e substituindo na equação (II.2) , obtém-se:

$$\Rightarrow x(t) = \left[A_1 \cdot e^{i \cdot \omega_D \cdot t} + A_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_D \cdot t}\right] \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t}$$



Free-vibration response of undercritically-damped system.



Effect of damping level on free vibration.

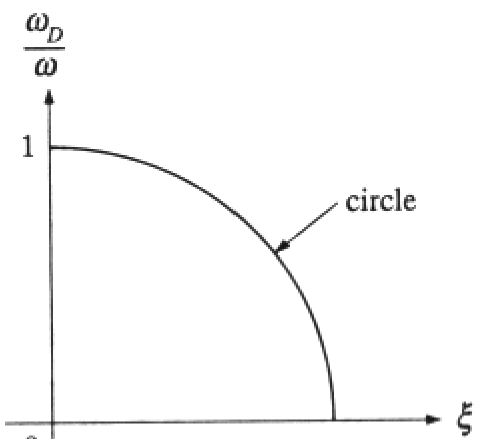
A equação do movimento pode ainda ser colocada na seguinte forma:

$$\Rightarrow x(t) = \rho \cdot cos(\omega_D \cdot t + \theta) \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t}$$

Esta equação corresponde à representação do vetor que rotaciona, de forma similar ao caso da vibração livre não amortecida, entretanto numa frequência circular ω_D e com o comprimento do vetor diminuindo exponencialmente enquanto a estrutura amortece.

Os sistemas de amortecimento das estruturas são muito complexos de serem definidos. Desta forma, é comum expressar o valor do amortecimento de estruturas reais em termos de um amortecimento viscoso equivalente, o qual deve apresentar as mesmas taxas de decaimento quando submetido a vibrações livres.

Para os valores usuais de amortecimentos estruturais, $\xi < 20\%$, $\Rightarrow \omega_D \cong \omega$.



Relationship between frequency ratio and damping ratio.

- Estimação experimental do amortecimento:

DOIS PICOS SUCESSIVOS: ocorrerão em $t = n \cdot T_D = n\left(\frac{2\pi}{\omega_D}\right)$ e $t = (n+1)\left(\frac{2\pi}{\omega_D}\right)$

NA EQ. DO MOVIMENTO: $\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\xi\omega T_D} = e^{\frac{2\pi\xi\omega}{\omega_D}}$

$$\boxed{\delta \equiv \underline{\textit{decremento logarítmico do amortecimento}} = ln\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi\xi\omega}{\omega_D} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

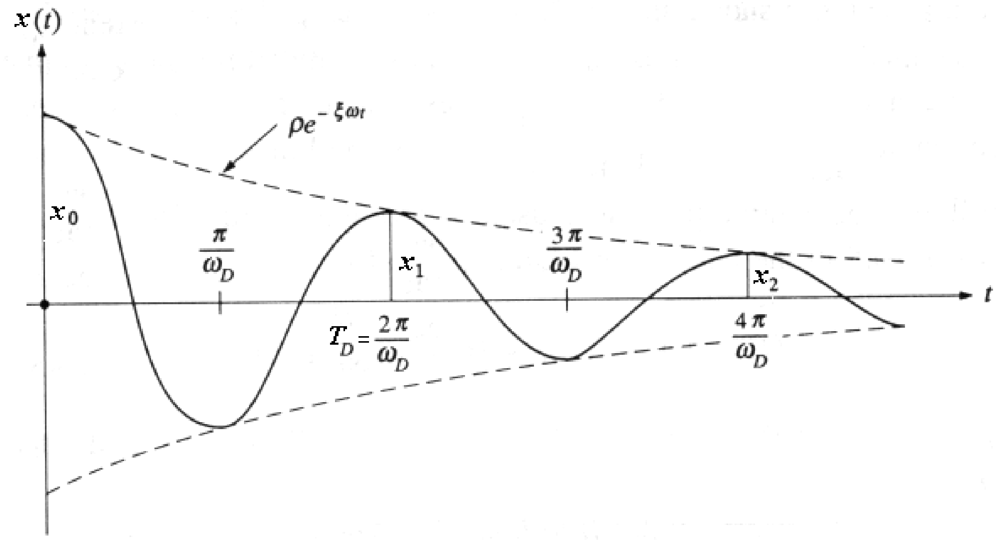
$$\boxed{\Rightarrow \xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \approx \frac{\delta}{2\pi}}$$

PARA BAIXOS VALORES DE AMORTECIMENTO (ξ): $\delta \approx 2\pi\xi$

CONSIDERANDO DOIS PICOS SEPARADOS POR *m* CICLOS:

$$\Rightarrow \frac{x_n}{x_{n+m}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} \cdots \frac{x_{n+m-1}}{x_{n+m}} = \left(e^{\xi\omega T_D}\right)^m = e^{m\xi\omega T_D}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{1}{m} \cdot ln\frac{x_n}{x_{n+m}}}$$



Decaimento exponencial de sistemas amortecidos