I – INTRODUÇÃO[1]

O principal objetivo deste curso é apresentar metodologias para analisar tensões e deslocamentos desenvolvidos por um dado sistema estrutural quando o mesmo está sujeito à um carregamento dinâmico arbitrário. Para os propósitos deste curso, a terminologia “dinâmica” será definida simplesmente como variável no tempo, logo, um carregamento dinâmico consiste em qualquer tipo de carregamento cuja magnitude, direção e/ou posição varia no tempo.

Em geral, a resposta estrutural a qualquer carregamento dinâmico é expressa basicamente em termos dos deslocamentos da estrutura. Então, uma análise determinística conduz diretamente aos deslocamentos a longo do tempo (“time-history”) a partir de um carregamento conhecido e também variável no tempo. Outras respostas desejáveis, como tensões, deformações, forças internas, e outras, são geralmente obtidas numa segunda fase da análise.

Por outro lado, uma análise não-determinínstica (ou randômica) provê apenas informação estatística sobre os deslocamentos resultantes de carregamentos definidos estatisticamente, como é o caso do estudo de terremotos.

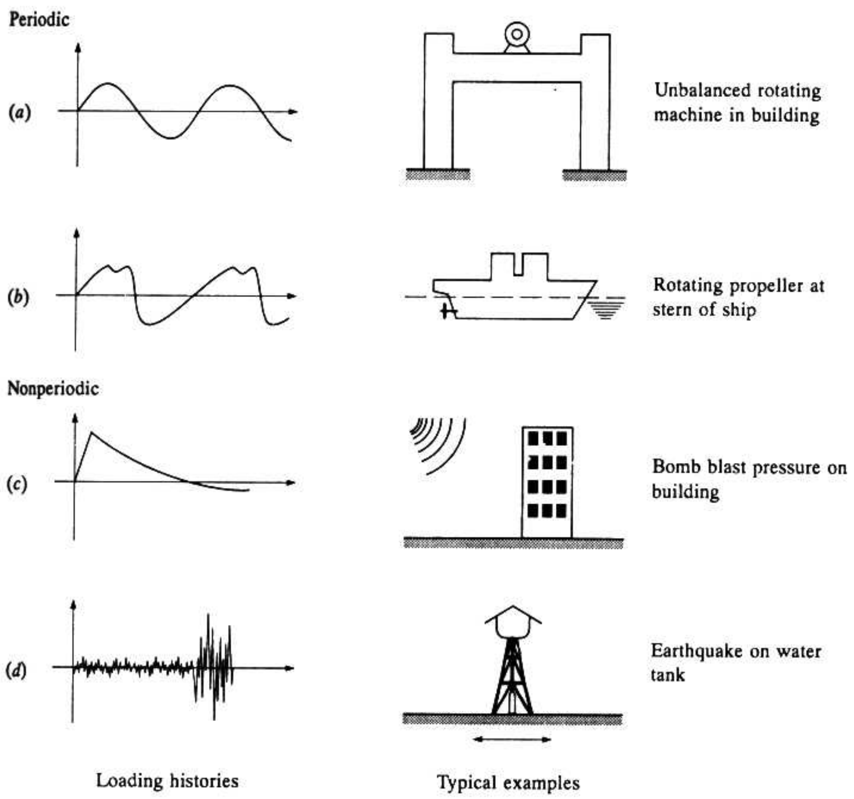


FIGURE 1-1
Characteristics and sources of typical dynamic loadings: (a) simple harmonic; (b) complex; (c) impulsive; (d) long-duration.

[1] Extraído do Livro “Dynamics of Structures”, 2ª ed., Clough, Penzien, 1993.

Na análise de uma estrutura linear, é conveniente distinguir entre os componentes estáticos e dinâmicos de um conjunto de carregamentos aplicados, e avaliar a resposta a cada tipo de carregamento separadamente, e então superpor os efeitos a fim de se obter a solicitação final.

Um problema estrutural dinâmico difere da sua abordagem de carregamento estático em dois importantes aspectos.

A primeira diferença a ser percebida, trata-se da natureza de variação no tempo do problema dinâmico. Devido ao fato de tanto o carregamento quanto a resposta da estrutura variarem no tempo é evidente que o problema dinâmico não tem uma única solução, ao contrário do problema estático. O projetista deverá então estabelecer uma sucessão de soluções correspondentes à todo o período de interesse. Logo, uma análise dinâmica é claramente mais complexa e demorada do que uma análise estática.

A segunda e fundamental distinção, refere-se ao fato de que em uma estrutura sujeita a um carregamento estático, os esforços internos e flechas assumidas dependem somente do carregamento imposto e podem ser calculados por equilíbrio de forças elásticas. Por outro lado, se o carregamento é aplicado dinamicamente, os deslocamentos resultantes da estrutura não dependem somente do carregamento, mas também das forças inerciais que se opõem às acelerações que as produzem.

Em geral, se as forças inerciais representarem uma porção significativa do carregamentos total equilibrado pelos esforços internos elásticos da estrutura, então o caráter dinâmico do problema deve ser considerado na solução do problema. Entretanto, se os movimentos são tão lentos que as forças de inércia apresentam-se muito pequenas, a análise da resposta da estrutura para qualquer instante pode ser realizada simplesmente pela análise estática, apesar do carregamento e resposta serem variáveis no tempo.

II – SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE

II.1 – VIBRAÇÕES LIVRES

II.1.1 - Equação do Equilíbrio Dinâmico – Equação do Movimento

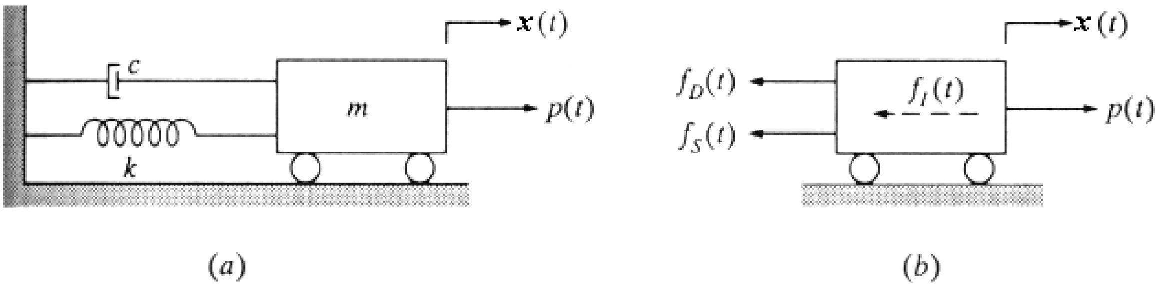
- Grandezas físicas envolvidas:

  MASSA (m)

  PROPRIEDADES ELÁSTICAS (k)

  AMORTECIMENTO (c)

  FORÇA EXTERNA DINÂMICA (p(t))



Idealized SDOF system: (a) basic components; (b) forces in equilibrium.

- Princípio de d'Alembert:

"A massa m desenvolve uma força de inércia proporcional a sua aceleração e oposta a ela."

$$p(t) - m\ddot{x}(t) = 0$$

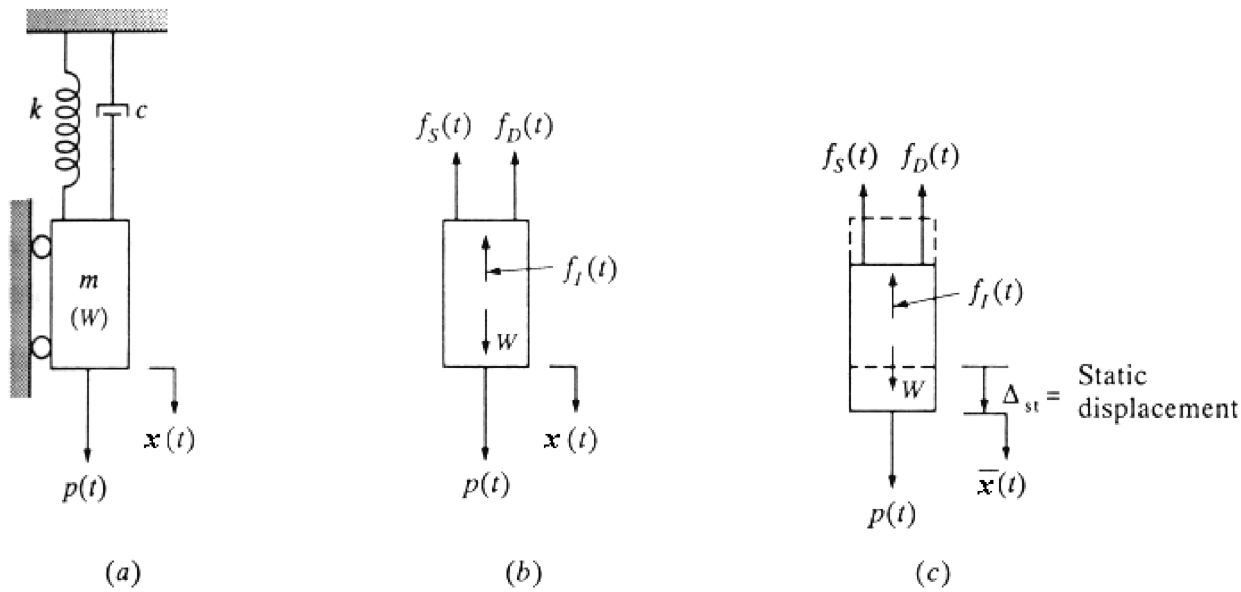
- Equação de equilíbrio:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t)$$

FORÇAS DE INÉRCIA:	$f_I(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$	
FORÇAS DE AMORTECIMENTO:	$f_D(t) = c \cdot \dot{x}(t)$	(Viscoso)
FORÇAS ELÁSTICAS:	$f_S(t) = k \cdot x(t)$	

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = p(t)}$$

- Influência da força gravitacional:



Influence of gravity on SDOF equilibrium.

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = p(t) + W}$$

FORÇA PESO: $W = m \cdot g$

DEFORMAÇÃO DA MOLA: $\Delta_{st} = W / k$

DESLOCAMENTO TOTAL: $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta_{st}$

FORÇAS ELÁSTICAS: $f_S(t) = k \cdot \bar{x}(t) + k \cdot \Delta_{st}$

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot \bar{x}(t) + k \cdot \Delta_{st} = p(t) + W$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{\bar{x}}(t) + c \cdot \dot{\bar{x}}(t) + k \cdot \bar{x}(t) = p(t)$$

A equação de movimento expressa em relação à posição do equilíbrio estático do sistema dinâmico não é afetada por forças gravitacionais.

Logo, as flechas totais, tensões máximas, etc, serão obtidas pela adição das respostas estáticas aos resultados obtidos da análise dinâmica.

II.1.2 – Vibrações Livres Não-Amortecidas

- Equação de equilíbrio:

VIBRAÇÕES LIVRES: $p(t) = 0$
VIBRAÇÕES NÃO-AMORTECIDAS: $c \to 0$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0}$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0 \quad \Rightarrow \ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0 \qquad \text{onde } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot e^{st}$$

Substituindo na equação anterior:

$$s^2 + \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow s = \pm i\omega$$

$$\Rightarrow x(t) = A_1 \cdot e^{i\omega t} + A_2 \cdot e^{-i\omega t}$$

Onde A_1 e A_2 são constantes de integração, dependendo dos valores iniciais de deslocamento $x(0)$ e velocidade $\dot{x}(0)$.

$$\Rightarrow x(t) = A_1 \cdot e^{i\omega t} + A_2 \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow x(t) = A_1 \cdot (\cos\omega t + i\, sen\,\omega t) + A_2 \cdot (\cos\omega t - i\, sen\,\omega t)$$

$$\Rightarrow x(t) = \cos\omega t (A_1 + A_2) + sen\,\omega t \cdot i(A_1 - A_2)$$

$$\Rightarrow x(t) = \cos\omega t \cdot (A \cdot \cos\phi) + sen\,\omega t \cdot (A \cdot sen\,\phi)$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot (\cos\omega t \cdot \cos\phi + sen\,\omega t \cdot sen\,\phi)$$

$$\boxed{\Rightarrow x(t) = A \cdot \cos(\omega t - \phi)}$$

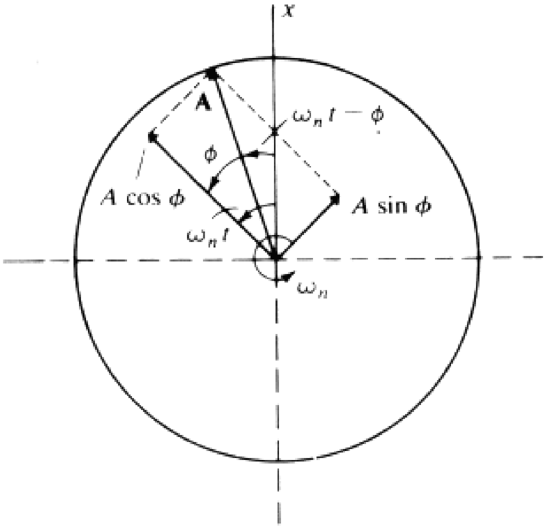
AMPLITUDE DO MOVIMENTO: $A = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right]^2}$

ÂNGULO FASE: $\phi = arctg\left[\frac{-\dot{x}(0)}{\omega \cdot x(0)}\right]$

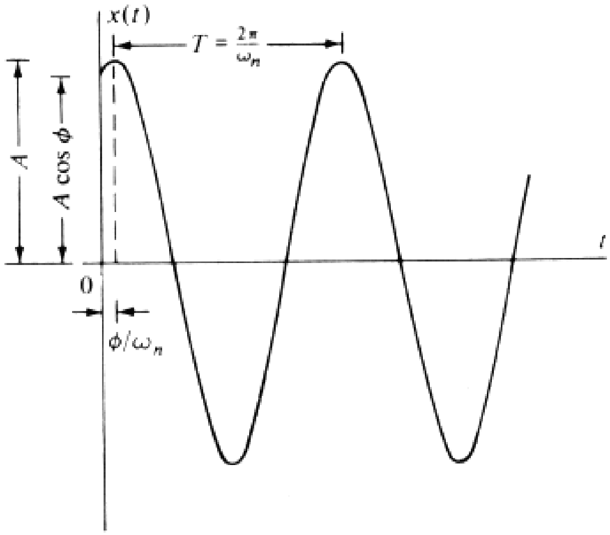
O sistema realiza oscilação harmônica simples (OHS ou MHS) com frequência $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

O termo ω é conhecido como <u>frequência natural</u>, pois, quando colocado em movimento através de condições iniciais não-nulas de deslocamento e/ou velocidade, livre de carregamentos e sem amortecimento, sempre oscilará com a mesma frequência ω.

- Deslocamento no tempo (item b):



(a)



(b)

FREQUÊNCIA CIRCULAR: ω (rad/s)

FREQUÊNCIA CÍCLICA OU DE MOVIMENTO: $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ $\left(s^{-1} \equiv Hz\right)$

PERÍODO DE OSCILAÇÃO/VIBRAÇÃO: $T = \dfrac{1}{f}$ (s)

- Representação do movimento no plano imaginário, através de um vetor em rotação no sentido anti-horário com velocidade angular ω (item a):

AMPLITUDE: $A = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[\dfrac{\dot{x}(0)}{\omega}\right]^2}$

ÂNGULO FASE: $\phi = arctg\left[\dfrac{-\dot{x}(0)}{\omega \cdot x(0)}\right]$