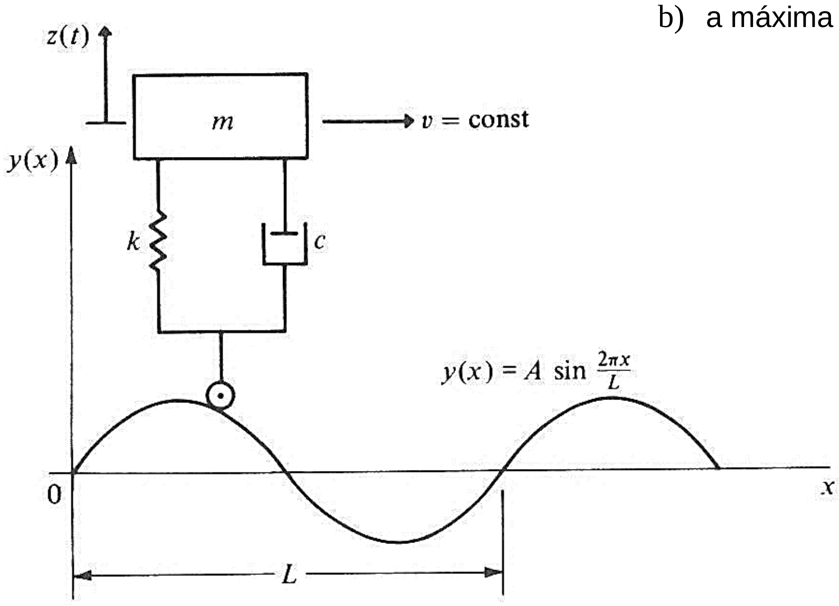
EXERCÍCIO RESOLVIDO #2 – VIBRAÇÕES FORÇADAS

O sistema ilustrado a seguir simula um veículo viajando com velocidade constante em um pavimento com imperfeições. Pedem-se:

a) a resposta do veículo z(t);
b) a máxima força aplicada no pavimento.



Dados Veículo:
- v = 60 *km/h*
- m = 800 *kg*
- k = 60 *kN/m*
- c = *9,0 kNs/m*

Dados Estrada:
- *A = 100 mm*
- *L= 8 m*

SOLUÇÃO:

Equação do equilíbrio dinâmico:

$$m\ddot{x}_{inercial} + c\dot{x}_{relativo} + kx_{relativo} = 0$$

onde:

$$x_{inercial} = x_{relativo} + y$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_{relativo} + m\ddot{y} + c\dot{x}_{relativo} + kx_{relativo} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_{relativo} + c\dot{x}_{relativo} + kx_{relativo} = -m\ddot{y}$$

mas

$$y = A\,sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = A\,sin\left(\frac{2\pi vt}{L}\right) = A\,sin(\bar{\omega}t) = 0{,}1\,sin(13{,}09t)$$

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi v}{L} = \frac{2\pi \cdot 60.000/3600}{8} = 13{,}09\,rad/s$$

$$\Rightarrow \dot{y} = A\bar{\omega}\,cos(\bar{\omega}t)$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = -A\bar{\omega}^2\,sin(\bar{\omega}t)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO #2 – VIBRAÇÕES FORÇADAS (Continuação)

logo,

$$\Rightarrow m\ddot{x}_{relativo} + c\dot{x}_{relativo} + kx_{relativo} = -mA\frac{4\pi^2 v^2}{L^2} sin\left(\frac{2\pi v t}{L}\right)$$

$$\Rightarrow p(t) = -mA\bar{\omega}^2\, sin(\bar{\omega}t)$$

$$\Rightarrow p_0 = -mA\bar{\omega}^2 = 800 \cdot 0{,}1 \cdot 13{,}09^2 = -13.708N$$

a) Vibração forçada no regime permanente:

$$x_p(t) = \frac{p_0}{k}\, D\;\; sen(\bar{\omega}t - \theta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{60.000}{800}} = 8{,}66\, rad/s$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{13{,}09}{8{,}66} = 1{,}51$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{9.000}{2 \cdot 800 \cdot 8{,}66} = 0{,}650$$

$$D = \left[\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}\right] = 0{,}426$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1\text{-}\beta^2}\right) = -0{,}991\, rad$$

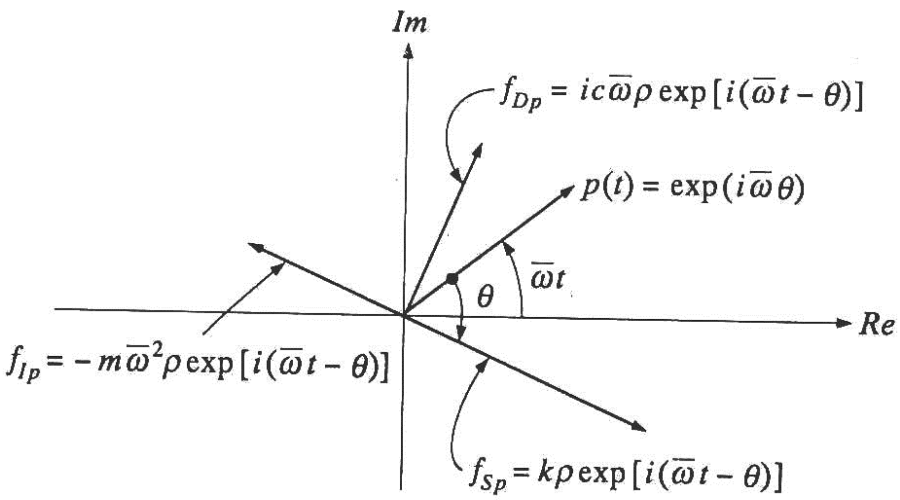
$$x_p(t) = \frac{p_0}{k}\, D\;\; sen(\bar{\omega}t - \theta) = -0{,}0974\;\; sen(13{,}09t + 0{,}991)$$

$$z(t) = x_{inercial} = x_{relativo} + y = -0{,}0974\;\; sen(13{,}09t + 0{,}991) + 0{,}1\, sen(13{,}09t)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO #2 – VIBRAÇÕES FORÇADAS (Continuação)

b) A máxima reação vertical entre o veículo e o pavimento:

A reação vertical dinâmica se dá através da força elástica (da mola) e a força de amortecimento. Como são defasadas entre si de 90º no Plano de Argand, o valor máximo da combinação das duas se dará pela sua soma vetorial:



A reação máxima deve incluir ainda a força peso estática:

$$F_{max} = P + \sqrt{f_S^2 + f_D^2}$$

$$f_S = k\, x_{relativo} = p_0 D\ sen(\bar{\omega}t - \theta)$$

$$f_D = c\, \dot{x}_{relativo} = \bar{\omega}\,(2\, m\, \omega\, \xi)\left(\frac{p_0}{k} D\right) cos(\bar{\omega}t - \theta) = 2\, \xi\, \beta\, p_0\, D\, cos(\bar{\omega}t - \theta)$$

$$\sqrt{f_S^2 + f_D^2} = \sqrt{(p_0 D\,)^2 + (2\,\xi\,\beta\, p_0\, D\,)^2} = p_0 D\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

$$= 13.708 \cdot 0{,}426\,\sqrt{1 + (2 \cdot 0{,}650 \cdot 1{,}51)^2} = 12.865\ N$$

$$F_{max} = mg + \sqrt{f_S^2 + f_D^2} = 800 \cdot 9{,}8 + 12.865 = 20.705N = 20{,}7kN$$