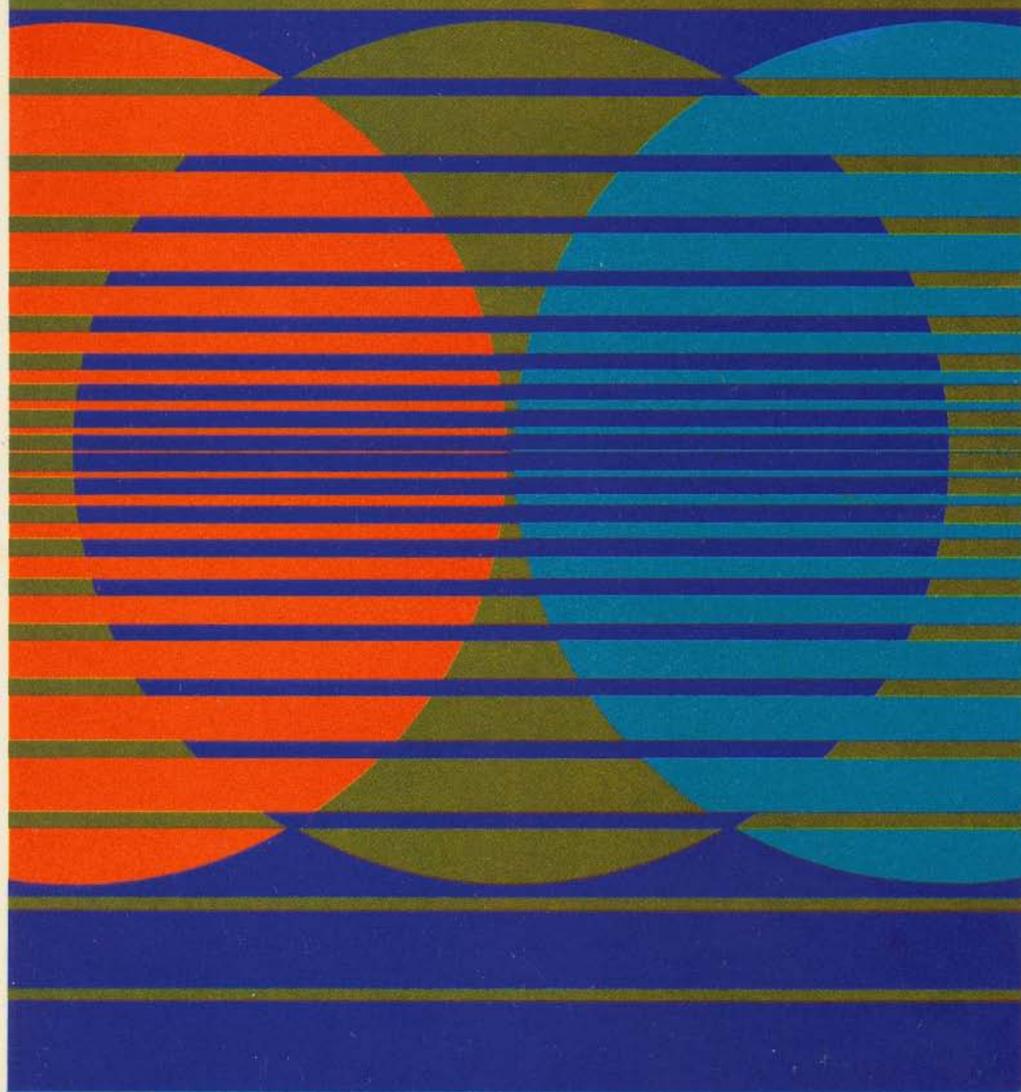


Análise Matricial das Estruturas

DOMICIO FALCÃO MOREIRA



LTC/EDUSP

30 μ

**Análise
Matricial
das
Estruturas**

José Álvaro José - 1977

OBRAS DO NOSSO FUNDO EDITORIAL

- ALMEIDA AZEVEDO, J. Carlos de — *Mecânica Clássica*
DIAS, Donaldo de Souza e outros — *Programação para Estudantes de Ciências e Engenharia*
FIGUEIREDO, Djairo Guedes de — *Análise I*
FREIRE, José de Mendonça — *Tecnologia Mecânica* (5 vols.)
HEHL, Maximilian Emil — *Fortran — Técnicas Práticas e Eficientes em Programação**
KREYSZIG, Erwin — *Matemática Superior* (4 vols.)
MASON, Jayme — *Pontes Metálicas e Mistas em Viga Reta*
MASON, Jayme — *Concreto Armado Protendido*
MAYNARD, Jeff — *Programação Modular*
MERIAM, James L. — *Dinâmica*
MERIAM, James L. — *Estática*
O'CONNOR, Colin — *Pontes — Superestruturas* (2 vols.)*
OLIVEIRA, Myriam Marques e GORFIN, Bernardo — *Estruturas Isostáticas*
PACCITTI, Tércio e Atkinson, Cyril P. — *Programação e Métodos Computacionais* (2 vols.)
PFEIL, Walter — *Concreto Armado — Dimensionamento**
PFEIL, Walter — *Estruturas de Aço*
PFEIL, Walter — *Ponte Presidente Costa e Silva — Métodos Construtivos*
PUCCINI, Abelardo de Lima — *Introdução à Programação Linear*
RUDENKO, N. — *Máquinas de Elevação e Transporte*
SEELEY, Robert T. — *Cálculo de uma Variável* (2 vols.)
VALLE, Cyro Eyer — *Implantação de Indústrias*



Obra publicada
com a colaboração da

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Orlando Marques de Paiva

EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Presidente: Prof. Dr. Mário Guimarães Ferri

Comissão Editorial:

Presidente: Prof. Dr. Mário Guimarães Ferri (Instituto de Biociências). Membros: Prof. Dr. Antonio Brito da Cunha (Instituto de Biociências), Prof. Dr. Carlos da Silva Lacaz (Faculdade de Medicina), Prof. Dr. Pérsio de Souza Santos (Escola Politécnica) e Prof. Dr. Roque Spencer Maciel de Barros (Faculdade de Educação).

* Obras publicadas com a colaboração da Editora da Universidade de São Paulo

Análise Matricial das Estruturas

DOMICIO FALCÃO MOREIRA

Professor Titular da Universidade Federal Fluminense
e da Escola de Engenharia de Volta Redonda.
Professor Conferencista do Instituto Militar de Engenharia
e da Fundação Rosemar Pimentel.

EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA S.A.
Rio de Janeiro — 1977

Copyright © 1977 by DOMICIO FALCÃO MOREIRA
Direitos Reservados 1977 por LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA S.A.
Rio de Janeiro/Brasil

IMPRESSO NO BRASIL/PRINTED IN BRAZIL

CAPA/ag comunicação visual Ltda

(Preparada pelo Centro de Catalogação-na-fonte do
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ)

M837a Moreira, Domicio Falcão.
Análise matricial das estruturas. Rio de Janeiro,
Livros Técnicos e Científicos; São Paulo, Editora da
Universidade de São Paulo, 1977.
404p. ilustr.

Bibliografia.

1. Teoria das estruturas 2. Teoria das estruturas —
Métodos matriciais I. Título

CDD — 624.171
624.1710183
CDU — 624.04
624.04 : 681.3

77-0021

LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA S.A.

Av. Venezuela, 163 — ZC-05 — CP 823

Rio de Janeiro — RJ

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem a finalidade principal de divulgar assunto que, em cerca de década e meia, vem envolvendo uma transformação radical no ensino, no aprendizado, na aplicação e até na própria filosofia da Teoria das Estruturas. Embora não seja um livro de técnica de programação aplicada à Análise Estrutural, sua meta é, principalmente, apresentar uma visão panorâmica, em caráter prático, das bases em que se fundamenta o grande impacto que a presença do computador representou para aquela ciência da Engenharia.

De fato, até algum tempo atrás — na geração a que pertence o autor — estudava-se e praticava-se a Hiperestática dentro de uma metodologia geral, porém a ênfase ficava com os artifícios e processos destinados a minimizar as dificuldades da resolução das equações lineares simultâneas. Brilhantes artifícios e processos, alguns grafoanalíticos, como o dos pontos fixos, outros iterativos — como os de Cross e Kani — se por um lado cumpriam na época a sua finalidade e honravam a inteligência de seus autores, por outro lado desviavam a atenção dos métodos gerais, quase sempre proibitivos nas aplicações.

Com a mecanização do cálculo, ao surgir o computador, toda importância voltou a ser dada aos dois métodos gerais, uma vez que o problema das equações simultâneas deixou de ser o centro de interesse. E da própria necessidade de comunicação com a máquina, para explorar melhor os seus recursos imensos, resultou que se fosse buscar, no acervo da Matemática, a matriz — como meio de descrever de forma compacta as cargas, deslocamentos e propriedades elásticas das estruturas e, principalmente, como operador de transformação linear muito útil nas diversas etapas da análise hiperestática. Mudou o formalismo, alterou-se a filosofia deste ramo da Mecânica aplicada, em benefício da automatização.

Nem de longe o autor pretende subestimar o tratamento convencional do problema, ou considerá-lo inútil. O engenheiro estrutural teria sempre necessidade dos processos clássicos, para aplicá-los sem os requintes da computação automática na fase do anteprojeto e, ainda, no projeto, para não perder de vista o que acontece fisicamente na estrutura tendo sempre à mão um meio de acompanhar, fiscalizar e interpretar os resultados. Nem parece prudente — dada esta conveniência de "sentir" a estrutura — que o aluno de graduação principie a estudar Hiperestática no formalismo matricial. O assunto deste trabalho ficaria bem situado na faixa que vai da parte final do curso de graduação ao início do de pós-graduação.

Crandall, em sua obra *Engineering Analysis*, classifica em três grupos as aplicações de processos numéricos no campo da Engenharia: (1) problemas de equilíbrio; (2) problemas de valores característicos; (3) problemas de valor inicial.

Para ordenar a matéria deste trabalho, o autor julgou conveniente aplicar (no que cabe aqui) a citada classificação. Assim, fez-se a divisão em três partes: a primeira, envolvendo as bases do formalismo matricial na análise de estruturas; a segunda, abrangendo o estudo dos dois métodos gerais de abordagem dos problemas de equilíbrio, seguido de aplicação ao processo iterativo de Cross; a terceira, tratando da aplicação aos principais problemas estruturais de valores característicos — o da análise de vibrações e o da instabilidade elástica.

Não obstante a espantosa potencialidade do tratamento matricial — quando aplicado no computador — foram evitados no texto exemplos de estruturas complexas, cuja solução apresentaria maior volume de cálculos, sem servir aos objetivos visados.

O assunto apresentado não é, evidentemente, original. Argyris, Pestel, Livesley, Asplund, Rubinstein, Gere, Przemieniecki, Meek, Wang e tantos outros grandes nomes da moderna análise estrutural lançaram as bases desta notável aplicação da Álgebra Linear. Isto não significa, entretanto — excluindo o texto básico introdutório da 3ª Parte, onde foi considerado conveniente fazer uma revisão despreziosa do problema dos valores característicos — que o tratamento dado à matéria deixe de ser pessoal, na apresentação e na exemplificação, forjado que foi nas tentativas e observações feitas em cursos de pós-graduação e de especialização, na PUC do Rio de Janeiro, na Universidade Federal Fluminense e no Instituto Militar de Engenharia — este na graduação.

São contribuições do autor os tópicos dos itens 7.2.2 (Efeitos de Temperatura), 9.2 (Tratamento Matricial do Processo de Cross no Caso de Estruturas Deslocáveis) e parte do item 13.4 (Obtenção da Matriz de Rigidez Geométrica Usando as Integrais de Mohr).

Dedicando este trabalho a seus alunos, o autor agradece a valiosa contribuição daqueles que colaboraram na sua impressão e pretende, acima de tudo, que a matéria explanada venha a ter maior penetração nos cursos de Engenharia Civil da nossa pátria, a cuja grandeza todos almejam servir.

O Autor

Rio de Janeiro, outubro de 1976

SUMÁRIO

1ª PARTE – CONSIDERAÇÕES GERAIS

1. Idealização Estrutural	3
1.1. A divisão em elementos	3
1.2. Natureza dos elementos e exatidão dos resultados	3
1.3. Sistemas de coordenadas — Vetores das ações mecânicas e dos deslocamentos	5
2. Relações entre Ações Mecânicas e Deslocamentos — Matrizes de Flexibilidade e Rigidez	9
2.1. Coeficientes de flexibilidade e de rigidez	9
2.2. Matrizes de flexibilidade e de rigidez	11
2.3. Dependência linear entre coordenadas — Conseqüências	16
3. Condições de Compatibilidade Estática ou Cinemática	21
3.1. Matriz de incidência estática	21
3.2. Matriz de compatibilidade ou de incidência cinemática	24
4. Trabalho das Forças Exteriores e Energia de Deformação	30
4.1. Expressões do trabalho e da energia de deformação no formalismo matricial	30

4.2. Teoremas de reciprocidade do Betti-Maxwell — Simetria das matrizes de flexibilidade e de rigidez	31
4.3. Teoremas de Castigliano — Formulação das matrizes de flexibilidade e de rigidez em termos da energia de deformação	32
<hr/>	
5. Princípio dos Trabalhos Virtuais e suas Aplicações na Análise Matricial das Estruturas	40
<hr/>	
5.1. Formulação matricial do princípio	40
5.2. Resolução do 1º problema clássico	41
5.3. Resolução do 2º problema clássico	42
5.4. Princípio da contragradência (Clebsh)	44
5.5. Exemplos	45
5.6. Teorema da redução	51
<hr/>	
6. Transformações Usuais na Análise Matricial das Estruturas	53
<hr/>	
6.1. Cargas fora dos nós — Carregamento nodal equivalente	53
6.2. Associação dos elementos de uma estrutura — Matrizes [F] e [K] para o conjunto	53
6.3. Modificação das matrizes [F] e [K] no caso de mudança de sistema de coordenadas — Generalização	57
6.4. Resumo das transformações na análise matricial das estruturas	62
6.5. Exercícios propostos	62
<hr/>	
2ª PARTE — APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO	
<hr/>	
7. Método da Flexibilidade (Método das forças)	73
<hr/>	
7.1. Matriz de flexibilidade de uma barra	73
7.2. Aplicação às estruturas isostáticas	92
7.3. Aplicação às estruturas hiperestáticas com cargas exteriores	109

7.4. Aplicação às estruturas hiperestáticas sujeitas a variações de temperatura ou a modificações iniciais	123
7.5. Aplicação às estruturas hiperestáticas submetidas a recalques de apoios	128
7.6. Efeitos de carregamento e tensões de montagem	131
7.7. Mudança de sistema principal	135
7.8. Escolha do sistema principal	138
7.9. Emprego dos fatores-escala para obter uma solução bem condicionada	140
7.10. A troca do sistema principal em parte da solução	146
7.11. As grandezas hiperestáticas como grupos de ações — Simplificações peculiares às estruturas simétricas	149
7.12. Exercícios propostos	156
<hr/>	
8. Método da Rigidez (Método dos deslocamentos)	163
<hr/>	
8.1. Matriz de rigidez de uma barra	163
8.2. Grau de indeterminação cinemática	165
8.3. Solução geral pelo método da rigidez	165
8.4. Processo da rigidez direta	170
8.5. Efeitos de recalques de apoios	178
8.6. O método da rigidez nos casos de variações de temperatura e modificações de montagem	182
8.7. Subdivisão da matriz de rigidez	187
8.8. Estruturas com peças rígidas	192
8.9. Emprego das épuras de deslocamentos (Williot) quando se desprezam as deformações pelo esforço normal	206
8.10. Consideração dos efeitos do esforço normal	212
<hr/>	
9. Tratamento Matricial do Processo de Cross	224
<hr/>	
9.1. Introdução	224
9.2. Aplicação às estruturas que só têm rotações nodais (sem deslocabilidade linear)	224
9.3. Aplicação às estruturas com deslocabilidades lineares dos nós	231

3ª PARTE – APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE VALORES CARACTERÍSTICOS. DINÂMICA E INSTABILIDADE ELÁSTICA DE ESTRUTURAS DISCRETIZADAS

10. Considerações Gerais Sobre os Problemas de Valores Característicos – Análise Modal **245**

- 10.1. Definições 245
 10.2. Propriedades de valores e vetores característicos 251
-

11. Vibrações Livres de Sistemas Discretizados **258**

- 11.1. Graus de liberdade 258
 11.2. Vibrações livres de sistemas com um grau de liberdade 259
 11.3. Caso das estruturas com um número finito de graus de liberdade 263
 11.4. Acoplamento estático e dinâmico 288
 11.5. Coordenadas normais – Desacoplamento 288
-

12. Vibrações Forçadas com Excitação Atuando Harmonicamente **291**

- 12.1. Vibração forçada – Caso geral 291
 12.2. Caso em que a ação exterior atua harmonicamente 292
 12.3. Observações – Ressonância 294
 12.4. Aplicações 294
 12.5. Forças perturbadoras com diferenças de fase – Efeitos estáticos máximos 298
 12.6. Deslocamento do solo ou referencial, segundo lei harmônica 303
-

13. Instabilidade Elástica de Estruturas Discretizadas **303**

- 13.1. Sistemas de peças rígidas com ligações elásticas. O problema dos valores característicos 303
 13.2. Matriz de rigidez geométrica – Sua determinação segundo considerações energéticas 313

- 13.3. Instabilidade de estruturas com barras deformáveis – Soluções empregando a análise matricial 334
 13.4. 1ª Solução – Discretização com elementos linearizados 335
 13.5. 2ª Solução – Consideração da não-linearidade. Funções de estabilidade 351
-

Apêndice **376**

Bibliografia **388**

Índice Remissivo **389**

CONSIDERAÇÕES GERAIS

Idealização Estrutural

1.1. A Divisão em Elementos

O problema da Análise Estrutural envolve quatro tipos de grandezas:

- a. as ações mecânicas aplicadas (ativas ou reativas);
- b. as ações mecânicas internas (esforços seccionais ou tensões localizadas em elementos de área orientados);
- c. os deslocamentos dos pontos da estrutura (podendo ser lineares ou angulares);
- d. as deformações (ou deslocamentos relativos das extremidades de porções elementares interiores).

Em geral, o objetivo é determinar os esforços e deslocamentos. Para atingi-lo, o método clássico parte de elementos infinitesimais da estrutura, tão pequenos que seja possível exprimir matematicamente com simplicidade as suas relações "solicitação-deformação". Por integração, chega-se ao comportamento da estrutura.

O método dos elementos finitos (do qual o *Cálculo Matricial das Estruturas* poderia ser considerado como um primeiro capítulo, aplicável às estruturas de barras) resolve o problema com outra seqüência. Considera a estrutura dividida em partes ou elementos que já não são infinitesimais, ligados entre si em pontos nodais, onde se supõem concentradas todas as forças de ligação entre elementos. Sendo as solicitações e deformações discretizadas nos nós, o comportamento elástico e mecânico de cada elemento pode ter expressão matemática tão simples quanto a dos elementos infinitesimais da solução clássica. A composição desses elementos de tamanho finito para constituir a estrutura considerada dá lugar a sistemas de equações facilmente tratados por via matricial.

1.2. Natureza dos Elementos e Exatidão dos Resultados

A. Nas estruturas formadas por barras (que sempre podem ser reduzidas a linhas), o nó pode ser qualquer ponto do eixo da barra.

Os elementos podem ser barras inteiras, partes de barras ou até associações de barras (funcionando como subestruturas). No caso do pórtico da Fig. 1.2.1 a subdivisão em elementos poderia ser feita como se vê nas Figs. 1.2.2, 1.2.3 e 1.2.4. Cada elemento deve ser tão simples que se possam exprimir com facilidade (ou até encontrar tabeladas) as suas relações solitação-deformação.

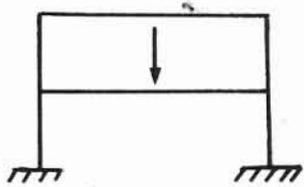


Fig. 1.2.1

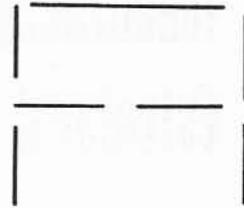


Fig. 1.2.2

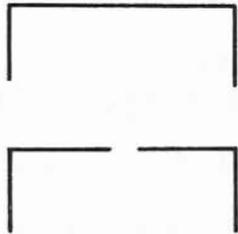


Fig. 1.2.3

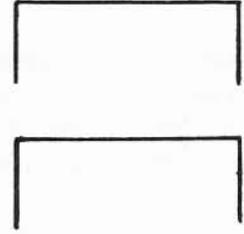


Fig. 1.2.4

Por outro lado, o número grande de elementos acarreta operações sobre grandes matrizes. Onde houver carga exterior ou deslocamento a calcular, deve haver nó, pois os elementos são praticamente reduzidos aos seus nós extremos. No caso da Fig. 1.2.4, admitiu-se um elemento envolvendo toda a barra central, mas neste caso, a sua carga terá de ser transformada em carregamento nodal.

Por este modo, as estruturas constituídas de barras terão solução com a mesma exatidão matemática obtida na teoria clássica das estruturas, porque os nós têm existência real.

B. Para as estruturas com ligações contínuas em duas ou três dimensões — caso das placas, cascas e blocos — a idealização estrutural é mais difícil, pois não existem fisicamente os elementos com ligações discretas.

Para aplicar o mesmo tratamento visto é necessário fazer uma simulação.

A estrutura é decomposta em elementos que passam a só entrar em contato entre si nos pontos nodais. Estes elementos podem ser planos (triangulares, quadrados etc.) ou espaciais (tetraedros), conforme o caso. As forças e os deslocamentos dos pontos nodais não correspondem a forças e deslocamentos existentes nesses pontos: são fictícios e seus valores são obtidos pela compatibilização

da energia de deformação. A solução é, neste caso, aproximada, mas converge para a solução exata quando se aumenta o número de elementos. O tratamento deste caso é objetivo do Método dos Elementos Finitos.

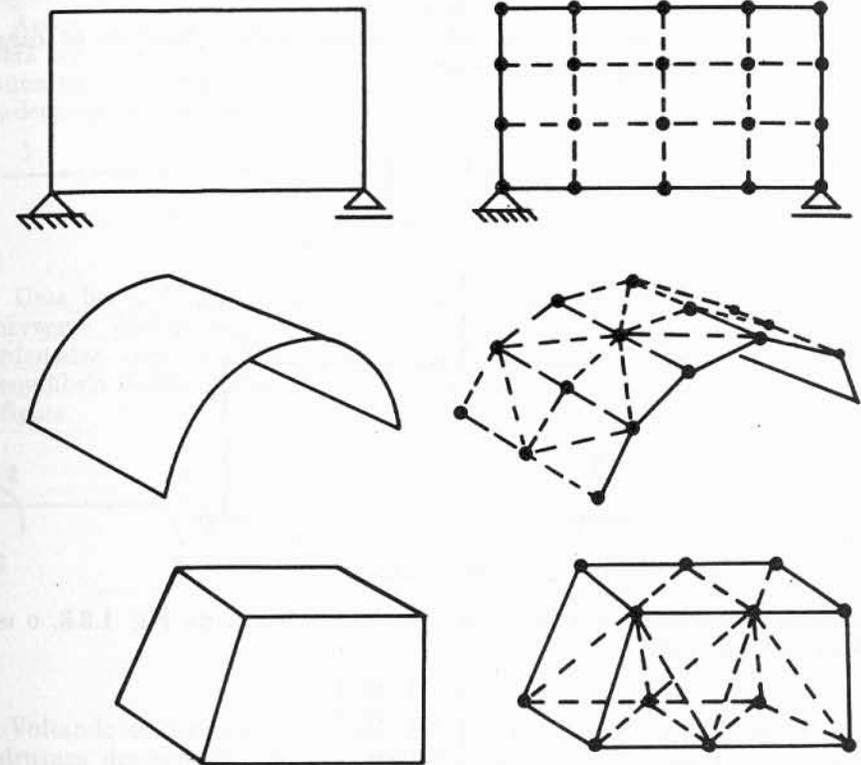


Fig. 1.2.5

1.3. Sistemas de Coordenadas — Vetores das Ações Mecânicas e dos Deslocamentos

Com o fim de identificar e ordenar matricialmente as ações mecânicas (forças e momentos) e os deslocamentos (lineares ou angulares) existentes nos nós de uma estrutura integrada ou nas extremidades de um elemento — quando subdividida a estrutura —, impõe-se seja fixado *a priori* um sistema de coordenadas.

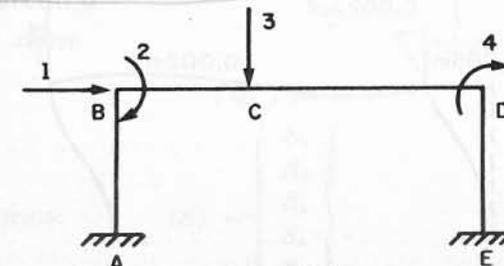


Fig. 1.3.1

Por exemplo, para a estrutura da Fig. 1.3.1, onde interessa assinalar solicitações e deslocamentos nos nós B, C e D, escolheu-se o sistema de coordenadas indicado. As setas indicam os sentidos positivos de forças ou deslocamentos lineares (em 1 e 3) e de momentos ou rotações (em 2 e 4).

Fixadas estas coordenadas, quando a estrutura for submetida às cargas, Fig. 1.3.2, o vetor das ações nodais será:

$$R = \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

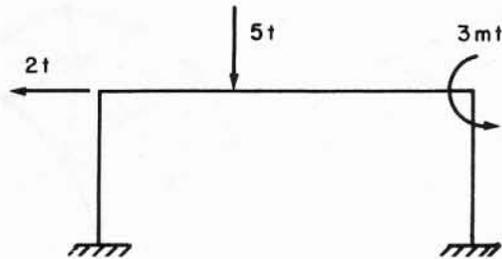


Fig. 1.3.2

Quando a estrutura apresentar uma elástica, como a da Fig. 1.3.3, o vetor dos deslocamentos nodais é:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} +0,005 \\ +0,002 \\ -0,002 \\ +0,003 \end{Bmatrix}$$

Convém notar que esses vetores terão sempre quatro termos (mesmo que alguns sejam nulos), e estes serão enunciados sempre na ordem em que as coordenadas estão numeradas.

Se a estrutura estiver decomposta em elementos, haverá necessidade de caracterizar com outro sistema de coordenadas (coordenadas locais, em contra-

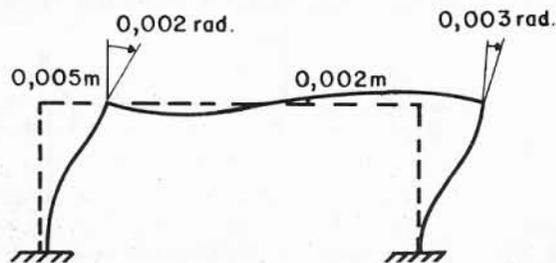


Fig. 1.3.3

posição às coordenadas gerais ou de referência da estrutura em conjunto) os esforços ou ações extremas dos elementos e as deformações ou deslocamentos relativos de suas extremidades.

Assim, uma barra de treliça que só apresenta esforços e deformações axiais, poderá ter as coordenadas da Fig. 1.3.4a ou as da Fig. 1.3.4b, pois a existência de uma equação de equilíbrio relacionando as forças em 1 e 2 torna essas forças interdependentes (convém que as coordenadas sejam independentes).

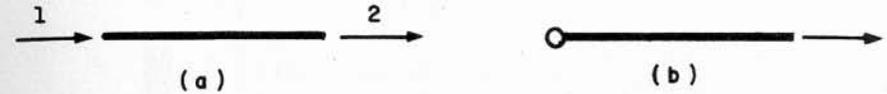


Fig. 1.3.4

Uma barra de quadro plano, com a consideração exclusiva das solicitações transversais (desprezando o esforço normal) poderia sugerir inicialmente quatro coordenadas, como na Fig. 1.3.5a. Entretanto, a existência de duas equações de equilíbrio possibilita que se adotem duas coordenadas, como nas partes b e c da figura.

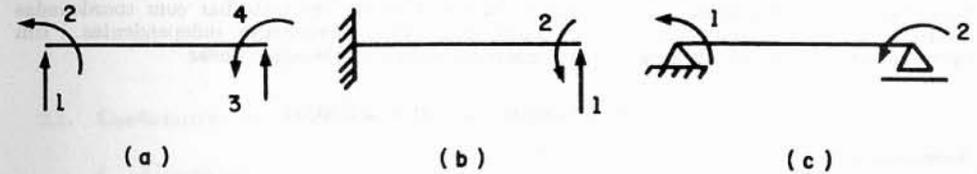


Fig. 1.3.5

Voltando ao exemplo do pórtico da Fig. 1.3.1, suas coordenadas locais para a estrutura decomposta poderiam ser as da Fig. 1.3.6 (desprezando os esforços normais).

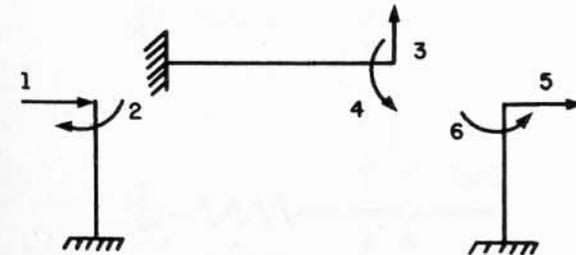


Fig. 1.3.6

Vetor dos esforços:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix}$$

O vetor das deformações seria:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{Bmatrix}$$

Notas

1. Como se viu, há necessidade de convencionar dois sistemas de coordenadas:

— *coordenadas de referência*, para as ações $\{R\}$ e deslocamentos nodais $\{r\}$ da estrutura integrada;

— *coordenadas locais*, para os esforços $\{S\}$ e deformações $\{s\}$ nos elementos da estrutura desmembrada.

2. As coordenadas estudadas agora são discretas ou concentradas. Em certos problemas, como os de vibrações e instabilidade, há conveniência em trabalhar com coordenadas distribuídas, caracterizadas por funções $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ etc., linearmente independentes. Um carregamento ou linha elástica, poderá aparecer como combinação linear

$$R(x) = \sum C_i \phi_i(x) \text{ ou } r(x) = \sum d_i \phi_i(x)$$

dessas funções.

2

Relações Entre Ações Mecânicas e Deslocamentos — Matrizes de Flexibilidade e de Rigidez

2.1. Coeficientes de Flexibilidade e de Rigidez

A. Considere-se o mais simples dos sistemas elásticos: uma mola linear de constante k , sistema com uma coordenada (Fig. 2.1.1a).

Se ao sistema aplicar-se a força $R = 1$, o deslocamento é f_{11} , *coeficiente de flexibilidade*, sendo $f_{11} = 1/k$.

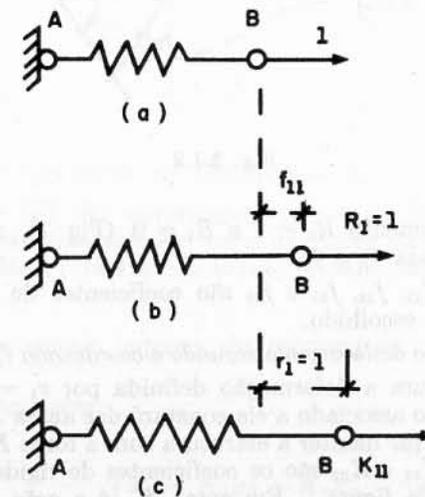


Fig. 2.1.1

Por outro lado, se for imposto à estrutura o deslocamento $r_1 = 1$ (Fig. 2.1.1c), a manutenção da configuração deformada exigirá que se aplique a força K_{11} *coeficiente de rigidez* (que no caso é a própria constante k).

Resumindo:

- *coeficiente de flexibilidade* f é o deslocamento causado por força $R = 1$;
- *coeficiente de rigidez* é a ação mecânica associada à configuração deformada $r = 1$.

B. Considere-se agora a estrutura da Fig. 2.1.2, cujo sistema de coordenadas é o da Fig. 2.1.2a. Procedendo da forma vista acima, tem-se:

1. aplicando $R_1 = 1$ ($R_2 = 0$), os deslocamentos f_{11} e f_{21} , este último de rotação (Fig. b);

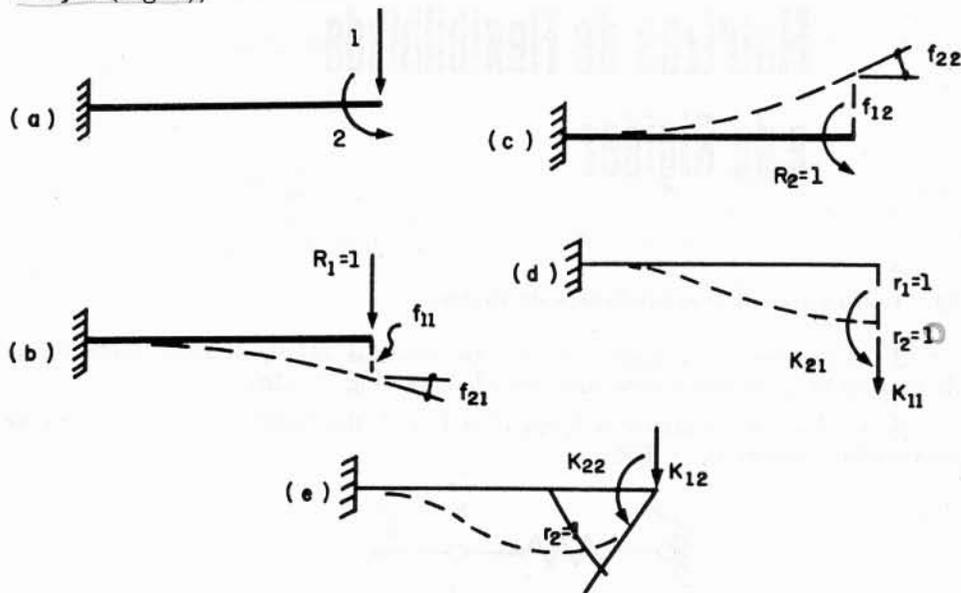


Fig. 2.1.2

2. aplicando o momento $R_2 = 1$ e $R_1 = 0$ (Fig. c), os deslocamentos são f_{12} (segundo a coordenada 1) e f_{22} .

Os deslocamentos f_{11} , f_{12} , f_{21} e f_{22} são coeficientes de flexibilidade, para o sistema de coordenadas escolhido.

De modo geral, f_{ij} é o deslocamento segundo a coordenada i , causado por $R_j = 1$.

Se se der à estrutura a deformação definida por $r_1 = 1$ e $r_2 = 0$ (Fig. d), o estado de carregamento associado a ela constará das ações K_{11} e K_{21} . Aplicando $r_2 = 1$ e $r_1 = 0$, haverá que manter a estrutura com a força K_{12} e o momento K_{22} . Estas ações K_{11} , K_{12} , K_{21} e K_{22} são os coeficientes de rigidez referentes à estrutura e às coordenadas da figura. Em geral, K_{ij} é a ação segundo a coordenada i , associada a configuração $r_j = 1$.

2.2. Matrizes de Flexibilidade e de Rigidez

Para um estado de carregamento definido por R_1 e R_2 (quaisquer), os deslocamentos serão:

$$\begin{cases} r_1 = f_{11} R_1 + f_{12} R_2 \\ r_2 = f_{21} R_1 + f_{22} R_2 \end{cases}$$

ou, sob forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix},$$

ou

$$\{r\} = [F] \{R\},$$

onde a matriz quadrada $[F]$ é a *matriz de flexibilidade*.

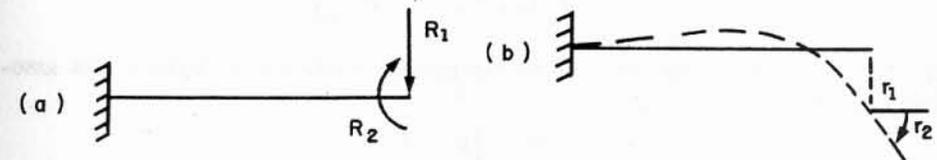


Fig. 2.2.1

Matriz de flexibilidade de uma estrutura com n coordenadas é a matriz $(n \times n)$:

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

cujo termo geral é o coeficiente de flexibilidade f_{ij} .

A equação $\{r\} = [F] \{R\}$ mostra que a matriz de flexibilidade é uma matriz de transformação linear: transforma o vetor das ações no vetor dos deslocamentos. Do mesmo modo, se fosse prescrito um estado de deformação definido (Fig. 2.2.1b)

pelo vetor $\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}$, as cargas capazes de produzir ou manter tais deformações seriam $\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$. As equações

$$\begin{cases} R_1 = K_{11}r_1 + K_{12}r_2 \\ R_2 = K_{21}r_1 + K_{22}r_2 \end{cases}$$

podem ser

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix},$$

onde a matriz quadrada

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

é a matriz de rigidez.

Em geral, com n coordenadas, a matriz de rigidez é uma matriz ($n \times n$)

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

capaz de transformar um vetor de deslocamentos no vetor das ações a eles associadas, na forma

$$\{R\} = [K] \{r\}.$$

Notas

1. As matrizes $[F]$ e $[K]$ estão vinculadas a um determinado sistema de coordenadas.
2. Seu emprego só cabe, a rigor, no regime de proporcionalidade (regime linear entre causas e efeitos).
3. Cada uma destas matrizes é a inversa da outra $[F] = [K]^{-1}$, $[K] = [F]^{-1}$.

De fato, sendo

$$\begin{cases} \{r\} = [F] \{R\} \\ \{R\} = [K] \{r\}, \end{cases}$$

e

a substituição do valor de $\{R\}$ na primeira dá

$$\{r\} = [F] [K] \{r\}$$

donde

$$[F] [K] = [I]$$

e

$$[F] = [K]^{-1}.$$

2.2.1. Exemplos

1. Estrutura composta de 2 hastes com solicitação axial (Fig. 2.2.2); coordenadas 1 e 2 na parte a da figura.

Matriz de flexibilidade

— para $R_1 = 1$ e $R_2 = 0$, obtém-se (Fig. b):

$$f_{11} = f_{21} = \frac{1 \cdot l_1}{E_1 \Omega_1} = \frac{l_1}{E_1 \Omega_1}$$

— para $R_2 = 1$ e $R_1 = 0$:

$$f_{12} = \frac{l_1}{E_1 \Omega_1}, f_{22} = \frac{l_1}{E_1 \Omega_1} + \frac{l_2}{E_2 \Omega_2}.$$

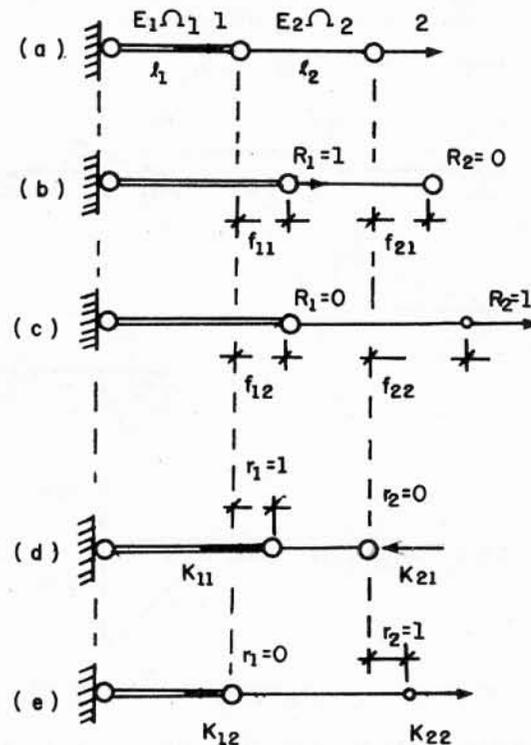


Fig. 2.2.2

Logo:

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{E_1 \Omega_1} & \frac{l_1}{E_1 \Omega_1} \\ \frac{l_1}{E_1 \Omega_1} & \left(\frac{l_1}{E_1 \Omega_1} + \frac{l_2}{E_2 \Omega_2} \right) \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez. Invertendo a matriz $[F]$, tem-se:

$$[K] = \frac{l_1 l_2}{E_1 E_2 \Omega_1 \Omega_2}$$

ou

$$[K] = [F]^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{E_1 \Omega_1}{l_1} + \frac{E_2 \Omega_2}{l_2} \right) & -\frac{E_2 \Omega_2}{l_2} \\ -\frac{E_2 \Omega_2}{l_2} & \frac{E_2 \Omega_2}{l_2} \end{bmatrix}$$

onde os termos K_{11} , K_{12} , K_{21} e K_{22} têm as interpretações mecânicas das partes d e e da figura e poderiam ser obtidos diretamente.

2. Viga trabalhando à flexão (Fig. 2.2.3).

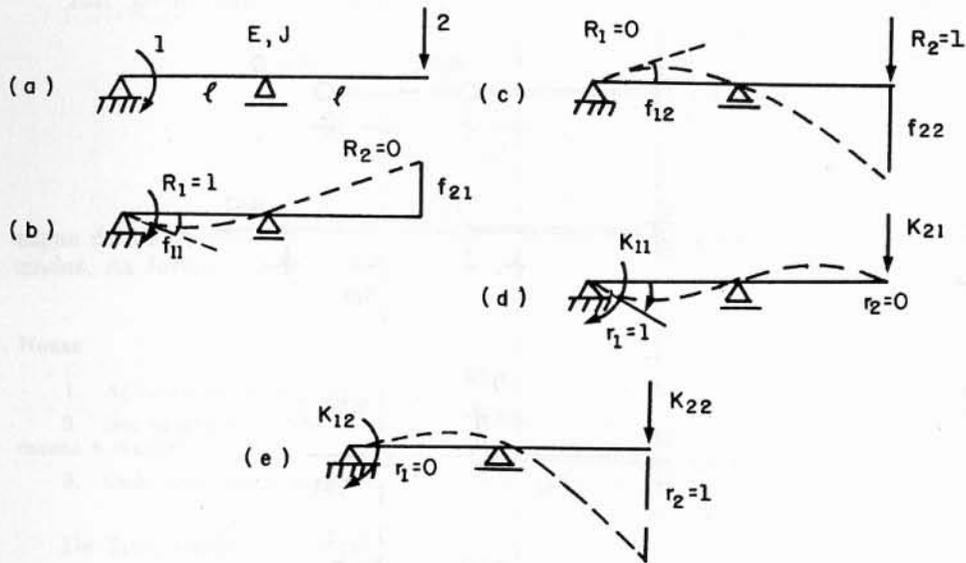


Fig. 2.2.3

Matriz de flexibilidade (Mohr, trabalhos virtuais etc.). Obtêm-se, para os carregamentos das partes b e c da figura:

$$f_{11} = \frac{l}{3EJ}, \quad f_{21} = -\frac{l^2}{6EJ}$$

$$f_{12} = -\frac{l^2}{6EJ}, \quad f_{22} = \frac{2l^3}{3EJ},$$

donde

$$[F] = \frac{l}{3EJ} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} & 2l^2 \end{bmatrix}$$

e

$$[K] = [F]^{-1} = \frac{6EJ}{7l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & l \\ l & 2 \end{bmatrix},$$

ver Figs. 2.2.3d e e.

3. As estruturas da Fig. 2.2.4a correspondem a um mesmo modelo matemático de relações "ação-deslocamento" (o sistema de molas iguais k , o quadro com 3 pavimentos rígidos e o eixo sob torção com 3 polias).

Nos três casos, k é a "constante de mola" referente a uma das partes do sistema.

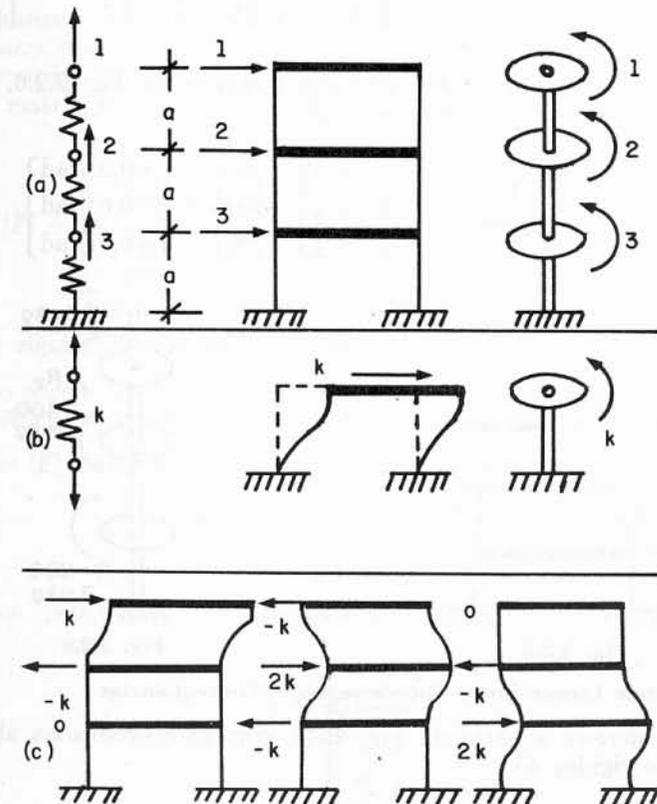


Fig. 2.2.4

Matriz de rigidez. Diretamente na parte c obtém-se

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}$$

A matriz de flexibilidade pode ser obtida por inversão:

$$[F] = [K]^{-1} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se, no quadro, for $k = 2 \text{ t/mm}$, quando se aplicar o carregamento da Fig. 2.2.5, as deflexões serão

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = [F] \{R\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +4 \text{ mm} \\ +1 \text{ mm} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se, no caso do eixo, os momentos aplicados forem os da Fig. 2.2.6, as rotações das polias serão (para $k = 10\,000 \text{ mkg/rad}$):

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{10\,000} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 100 \\ -400 \\ 200 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,03 \text{ rad} \\ -0,04 \text{ rad} \\ -0,01 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

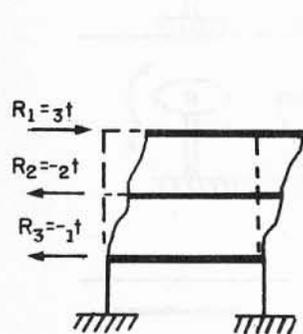


Fig. 2.2.5

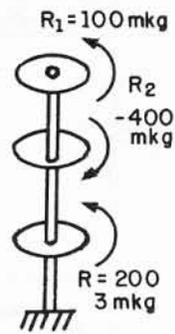


Fig. 2.2.6

2.3. Dependência Linear Entre Coordenadas — Conseqüências

A. Considere-se a barra da Fig. 2.3.1, com as coordenadas ali indicadas. Sua matriz de rigidez é

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{E\Omega}{l} & -\frac{E\Omega}{l} \\ -\frac{E\Omega}{l} & \frac{E\Omega}{l} \end{bmatrix} = \frac{E\Omega}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Trata-se de uma matriz singular, pois $|K| = 0$. A sua inversa (matriz de flexibilidade) não existe. De fato, é impossível gerar a matriz $[F]$, pois seria absurdo, do ponto de vista do equilíbrio da barra, fazer $R_1 = 1$ e $R_2 = 0$, por

exemplo. Esta singularidade ocorre porque R_1 e R_2 não são independentes do ponto de vista estático, pois existe a condição de equilíbrio $R_1 + R_2 = 0$.

1.ª CONCLUSÃO GERAL. *Se as grandezas mecânicas R forem interdependentes, a matriz de flexibilidade não existe. A matriz de rigidez, se existir, será singular.*

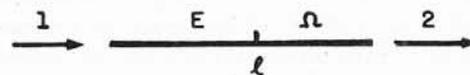


Fig. 2.3.1

B. Voltando à estrutura do Ex. 1, no Item 2.2, Fig. 2.2.2, admita-se que a segunda barra seja rígida ($E_2\Omega_2 \rightarrow \infty$). Como conseqüência, os deslocamentos segundo as coordenadas 1 e 2 são linearmente dependentes, pois existe a relação $r_1 = r_2$. A matriz F , já obtida, assume, para $E_2\Omega_2 \rightarrow \infty$, a forma

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{E_1\Omega_1} & \frac{l_1}{E_1\Omega_1} \\ \frac{l_1}{E_1\Omega_1} & \frac{l_1}{E_1\Omega_1} \end{bmatrix} \quad \text{Esta matriz é singular.}$$

A matriz de rigidez não existe neste caso.

O mesmo sucede com a estrutura da Fig. 2.3.2, na qual existe interdependência cinemática entre a rotação 1 e o deslocamento 2, por ser a barra BC rígida.

A matriz $[F]$ é singular:

$$[F] = \frac{l}{3EJ} \begin{bmatrix} 1 & l \\ l & l^2 \end{bmatrix}$$

$[K]$ não existe, pois é $r_1 = \frac{r_2}{l}$ (deslocamentos pequenos).

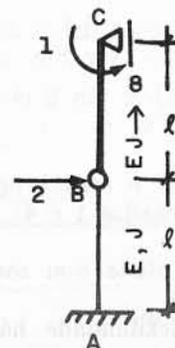


Fig. 2.3.2

2.ª CONCLUSÃO. *Se os deslocamentos segundo as coordenadas forem cinematicamente interdependentes, a matriz de rigidez não existe. A matriz de flexibilidade, se existir, será singular.*

Estas considerações mostram que deve haver um certo cuidado na fixação das coordenadas. Se o objetivo é utilizar matrizes de flexibilidade, as coordenadas deverão corresponder a ações R linearmente independentes do ponto de vista estático; se o que se pretende é utilizar matrizes de rigidez, as coordenadas devem corresponder a deslocamentos cinematicamente independentes.

C. *Conseqüências — Coordenadas locais de barras.* Aplicando as conclusões anteriores e tendo em vista que o número de coordenadas locais depende dos esforços cuja influência sobre a deformação do elemento é considerada significativa, podem-se relacionar soluções para coordenadas locais de barras.

1.º caso. *Barra de treliça plana*

a. Para o método da *flexibilidade*, há 2 ações axiais e 1 equação de equilíbrio, logo, há 1 coordenada livre (Fig. 2.3.3a).

b. Para o método da *rigidez*, nenhuma relação cinemática e 4 componentes de deslocamentos livres (solução na Fig. 2.3.3b).

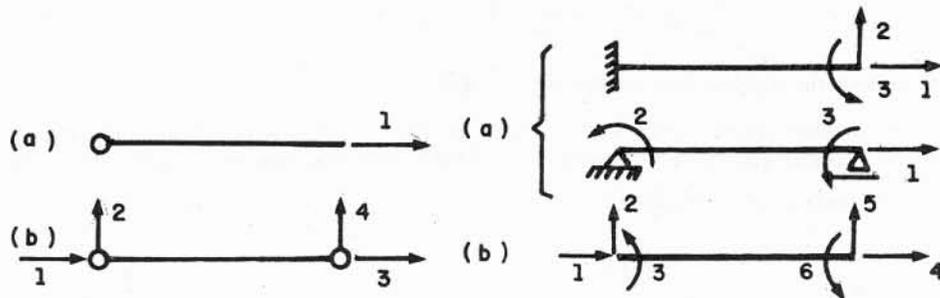


Fig. 2.3.3

Fig. 2.3.4

2.º caso. *Barra trabalhando à flexão e esforço normal, no plano*

a. Para o método da *flexibilidade*, há 6 ações extremas e 3 equações de equilíbrio, logo, 3 coordenadas livres (ver Fig. 2.3.4a).

b. Para usar matrizes de rigidez: são 6 deslocamentos independentes (ver Fig. 2.3.4b).

3.º caso. *Barra no plano, sem a consideração das deformações axiais* (eliminar, no caso anterior, as coordenadas 1 e 4).

4.º caso. *Barra de estrutura plana com cargas normais ao plano (grelha)*

a. Para usar matrizes de flexibilidade há 3 ações independentes (ver Fig. 2.3.5a).

b. Para usar matrizes de rigidez são 6 deslocamentos livres (ver Fig. 2.3.5b).

5.º caso. *Barra de treliça no espaço*

a. Para usar matrizes de flexibilidade, há 1 coordenada (ver Fig. 2.3.6a).

b. Para usar matrizes de rigidez, há 6 coordenadas (ver Fig. 2.3.6b).

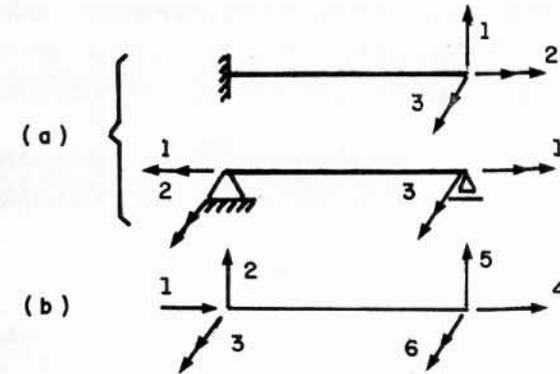


Fig. 2.3.5

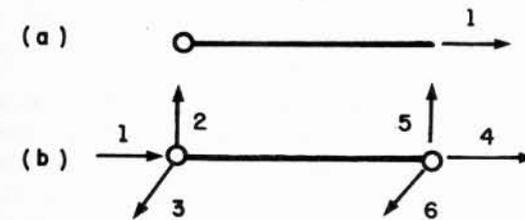


Fig. 2.3.6

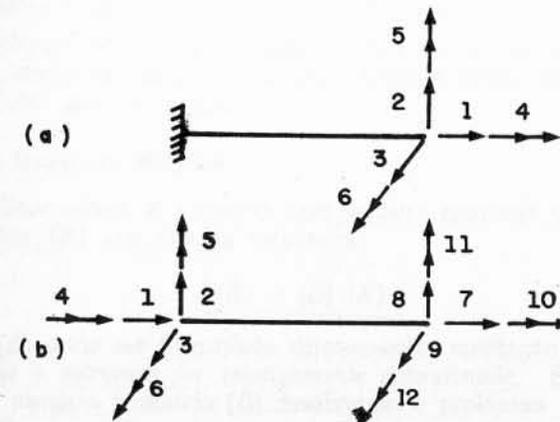


Fig. 2.3.7

6.º caso. *Caso geral de barras*

a. Para usar matrizes de *flexibilidade* há 6 coordenadas independentes (ver Fig. 2.3.7a).

b. Para usar matrizes de *rigidez* são 12 coordenadas independentes (ver Fig. 2.3.7b).

3

Condições de Compatibilidade Estática ou Cinemática

Na resolução de uma estrutura sujeita a cargas prescritas, a Teoria da Elasticidade utiliza os seguintes grupos de condições envolvendo um elemento infinitesimal:

- a. relações tensão-deformação;
- b. condições de equilíbrio;
- c. condições de compatibilidade.

Quando se aplica a Análise Matricial à resolução do mesmo problema, ressaltadas as naturais particularidades decorrentes do fato de serem finitos os elementos, há que considerar os mesmos tipos de relações acima citadas. Assim:

- a. as relações esforços-deformações são aqui representadas pelas matrizes de flexibilidade e de rigidez dos elementos;
- b. as condições de equilíbrio, ou de compatibilidade estática entre os esforços $\{S\}$, nos elementos, e as ações externas $\{R\}$ são formalizadas por uma matriz de *incidência estática* $[B]$, tal que $\{S\} = [B] \{R\}$;
- c. as condições de compatibilidade geométrica ou cinemática entre deformações $\{s\}$ e deslocamentos $\{r\}$ são sintetizadas numa *matriz de incidência cinemática* $[A]$, tal que $\{s\} = [A] \{r\}$.

3.1. Matriz de Incidência Estática

Como se disse acima, é a matriz que permite exprimir os esforços $\{S\}$ em função das ações $\{R\}$ nos nós da estrutura:

$$\{S\} = [B] \{R\}.$$

A matriz $[B]$ pode ser formulada diretamente, mediante simples condições de equilíbrio, se a estrutura for estaticamente determinada. Se houver indeterminação, só se chegará à matriz $[B]$ resolvendo o problema hiperestático, conforme será visto.

Se $\{R\}$ e $\{S\}$ forem vetores referidos a m coordenadas locais e n coordenadas de referência, $[B]$ será uma matriz $(m \times n)$.

Cada coluna j de $[B]$ contém os valores de $S_1, S_2 \dots S_m$, correspondentes ao carregamento $R_j = 1$ (com os demais R_i nulos). Resolvida a estrutura para $R_j = 1$, é necessário identificar os esforços S despertados, os quais vão compor a coluna j .

3.1.1. Exemplos

1. Trata-se de obter a matriz de incidência estática $[B]$, para a estrutura da Fig. 3.1.1a (ver as coordenadas de referência). Os elementos são os da Fig. 3.1.1b

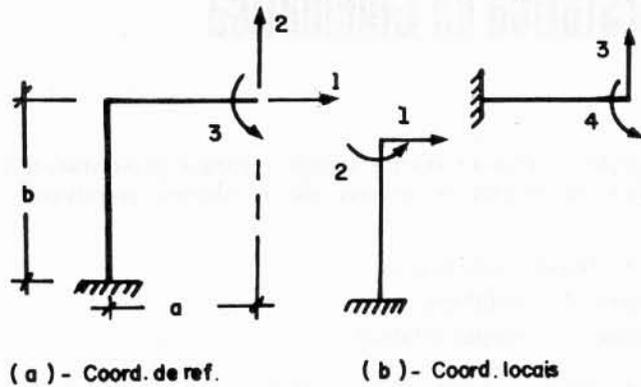


Fig. 3.1.1

Sendo isostática a estrutura, constitui um problema banal de equilíbrio estático obter, separadamente, as relações de apoio que surgem para:

$R_1 = 1$ (Fig. 3.1.2a); $R_2 = 1$ (Fig. 3.1.2b) e $R_3 = 1$ (Fig. 3.1.2c)

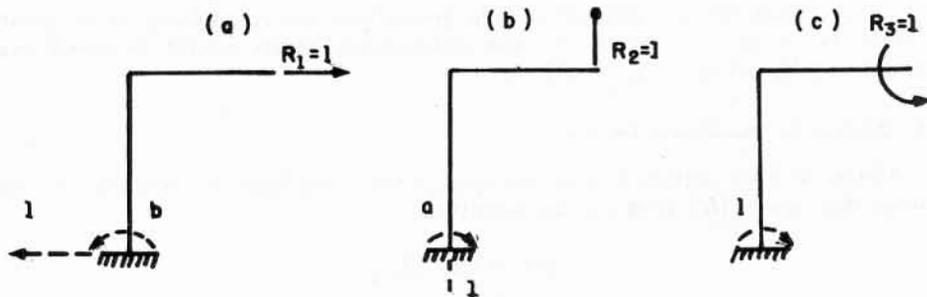


Fig. 3.1.2

No primeiro caso, tem-se $S_1 = 1$ e $S_2 = S_3 = S_4 = 0$. No segundo caso, $S_2 = +a$ e $S_1 = S_3 = S_4 = 0$ e no terceiro caso, $S_2 = S_4 = +1$ e $S_1 = S_3 = 0$.

A matriz $[B]$ é

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota. Se, para a mesma estrutura, os elementos fossem os da Fig. 3.1.3, a matriz de incidência seria

$$[B] = \begin{bmatrix} b & -a & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

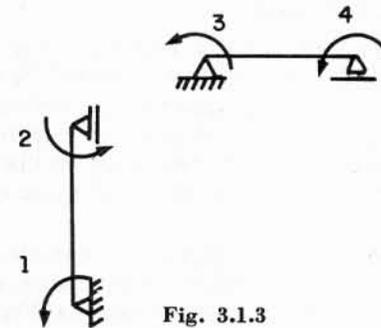


Fig. 3.1.3

2. Obter $[B]$ para o caso da Fig. 3.1.4.

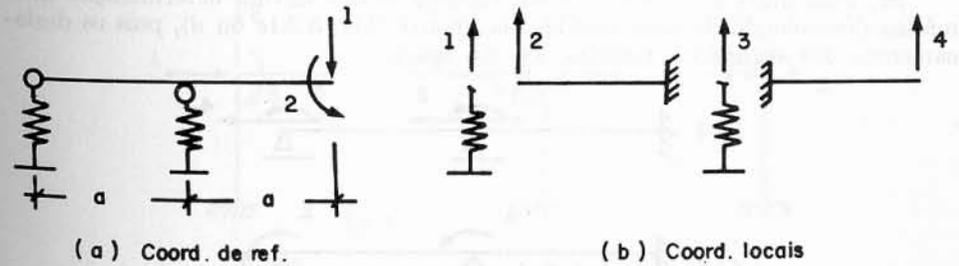
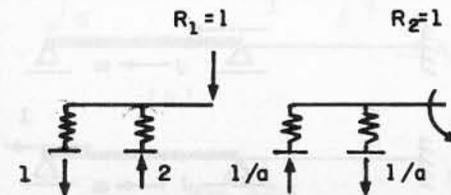


Fig. 3.1.4

Solução



$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & -1/a \\ -1 & 1/a \\ -2 & 1/a \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2. Matriz de Compatibilidade ou de Incidência Cinemática

Esta matriz transforma deslocamentos nodais $\{r\}$ (em coordenadas de referência) em deformações $\{s\}$ dos elementos (expressas em coordenadas locais). Ela exprime, portanto, a compatibilidade cinemática entre o conjunto e os elementos

$$\{s\} = [A] \{r\},$$

onde $[A]$ é a matriz de incidência.

Só é possível formular diretamente esta matriz se a estrutura estiver *cinematicamente determinada*. Isto ocorrerá se os apoios da estrutura e as coordenadas de referência tiverem número e disposição tais que definam todos os deslocamentos nodais (lineares e angulares) independentes. A estrutura cinematicamente determinada será, assim, aquela que não tem grau de liberdade quando submetida a seus próprios vínculos e a deslocamentos nulos (ou conhecidos) segundo suas coordenadas.

Compreende-se que as condições para a caracterização da determinação cinemática dependem também das deformações (axiais, de flexão, de torção etc.) consideradas significativas. Assim, a estrutura da Fig. 3.2.1a, na qual se consideram significativas todas as deformações no plano, é cinematicamente determinada. Mas, se forem consideradas desprezíveis as deformações axiais, será cinematicamente determinada com duas coordenadas apenas (Fig. 3.2.1b).

Se, além disso, o segundo vão for rígido à flexão, haverá determinação cinemática dependendo de uma coordenada apenas (Fig. 3.2.1c ou d), pois os deslocamentos dos segundo e terceiro nós são iguais.

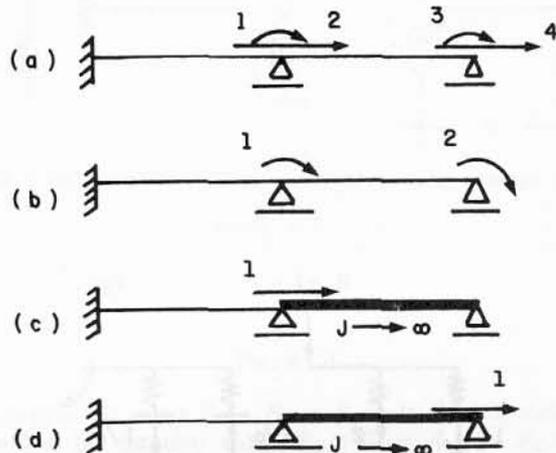


Fig. 3.2.1

3.2. MATRIZ DE COMPATIBILIDADE OU DE INCIDÊNCIA CINEMÁTICA

O quadro da Fig. 3.2.2a é cinematicamente determinado com sete coordenadas. Se forem desprezadas as deformações axiais, depende apenas de quatro (Fig. 3.2.2b).

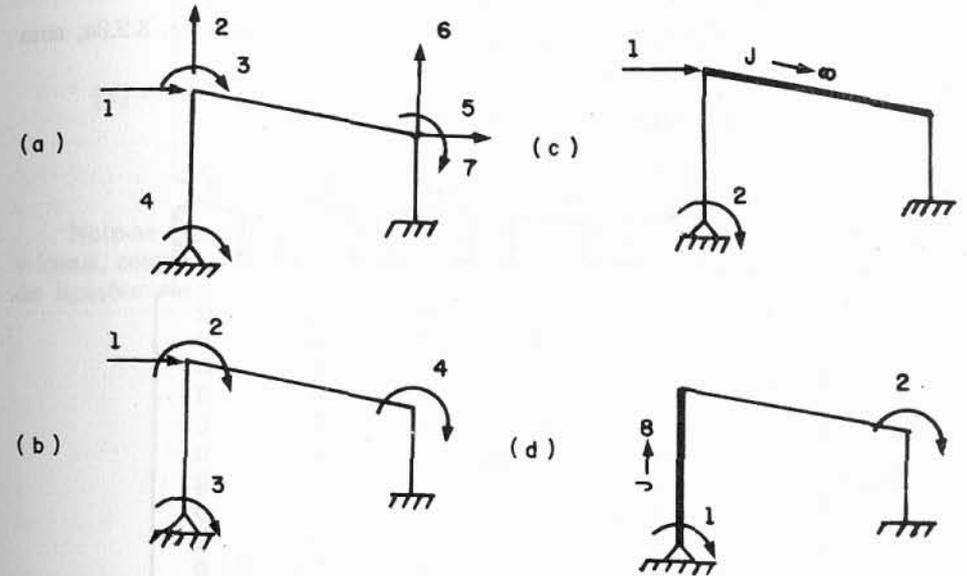


Fig. 3.2.2

Se, além disso, a viga inclinada ou uma das colunas for rígida ($J \rightarrow \infty$) à flexão, bastam duas coordenadas (Fig. 3.2.2c ou d) para que fique cinematicamente determinada.

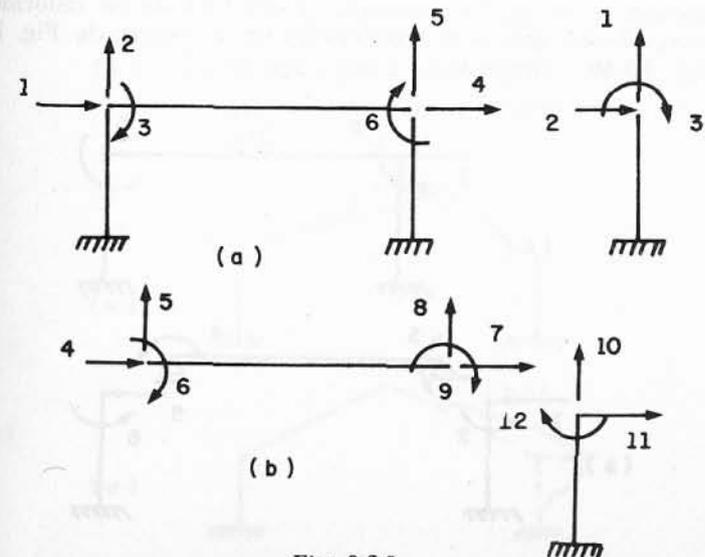
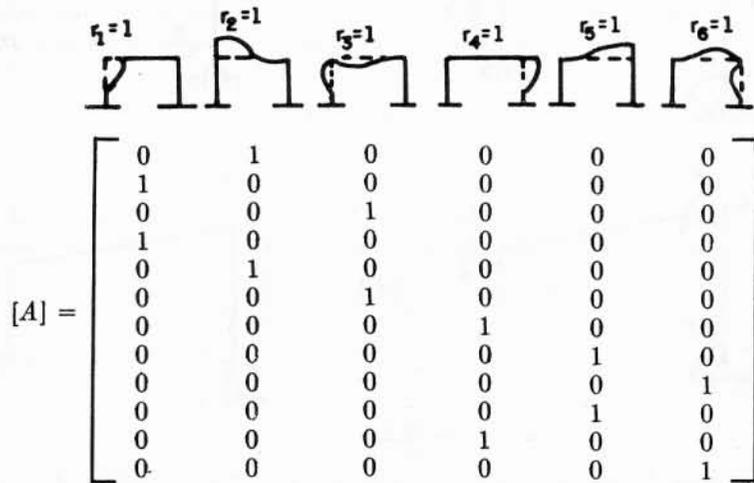


Fig. 3.2.3

Se a estrutura for cinematicamente determinada, cada configuração deformada ($r_j = 1$ e demais r_i nulos) dá uma coluna j da matriz $[A]$, cujos termos são os valores de $s_1, s_2 \dots s_m$ correspondentes. Se houver n coordenadas de referência e m coordenadas locais, a matriz $[A]$ será $(m \times n)$.

Determine-se a matriz de incidência $[A]$ para o quadro da Fig. 3.2.3a, com os elementos da Fig. 3.2.3b.

As configurações abaixo permitem obter diretamente:



Se a mesma estrutura for estudada desprezando-se as deformações pelo esforço normal, têm-se apenas as coordenadas de referência da Fig. 3.2.4a e as locais da Fig. 3.2.4b. Formulando a nova matriz $[A]$:

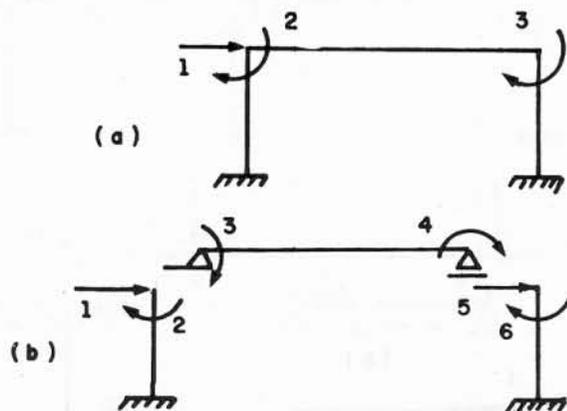
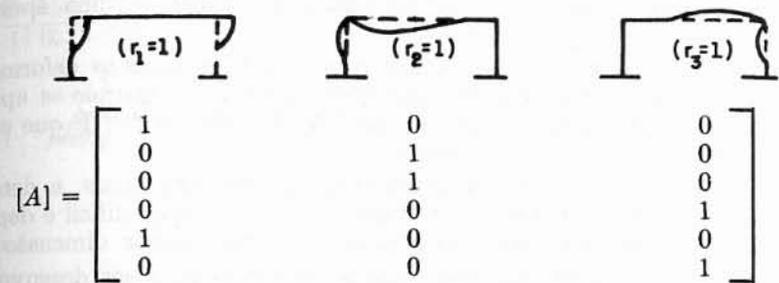


Fig. 3.2.4



Note-se que houve grande redução no número de coordenadas de referência e locais, com o que a matriz $[A]$ ficou bem menor. Por outro lado, a existência de ligações cinemáticas (barras axialmente indeformáveis) complica, em geral,

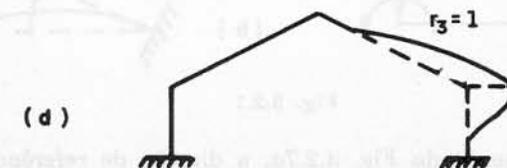
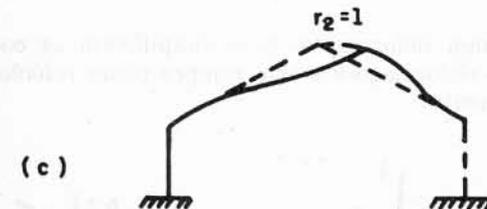
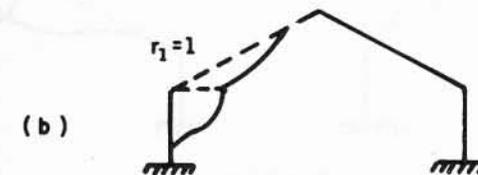
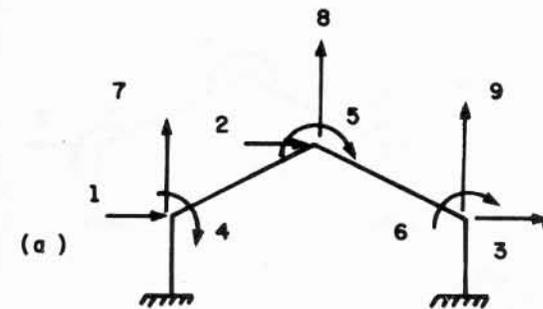


Fig. 3.2.5

a formulação de $[A]$, exigindo, em certos casos, o traçado de uma *épura* de Williot para definir os deslocamentos.

Por exemplo, no quadro da Fig. 3.2.5a, computando-se todas as deformações no plano, torna-se fácil idealizar as configurações da estrutura, quando se aplicam deslocamentos lineares unitários, como os das Figs. 3.2.5b, c e d. É que os nós são independentes em seus deslocamentos.

Se, entretanto, forem consideradas nulas as deformações axiais, a determinação das configurações $r_1 = 1$ e $r_2 = 1$ (Figs. 3.2.6b e c) é mais difícil e depende de uma *épura* de deslocamentos, mas a matriz $[A]$ tem menor dimensão.

A rigor, quando se pretende uma solução mecanizada, a ser desenvolvida em computador, não há restrição importante quanto à dimensão de $[A]$ e, sim, quanto à simplicidade da sua formulação. Neste caso, a primeira hipótese (computar todas as deformações) é mais conveniente. Quando a solução é manual ou parcialmente mecanizada, a segunda hipótese é mais cômoda.

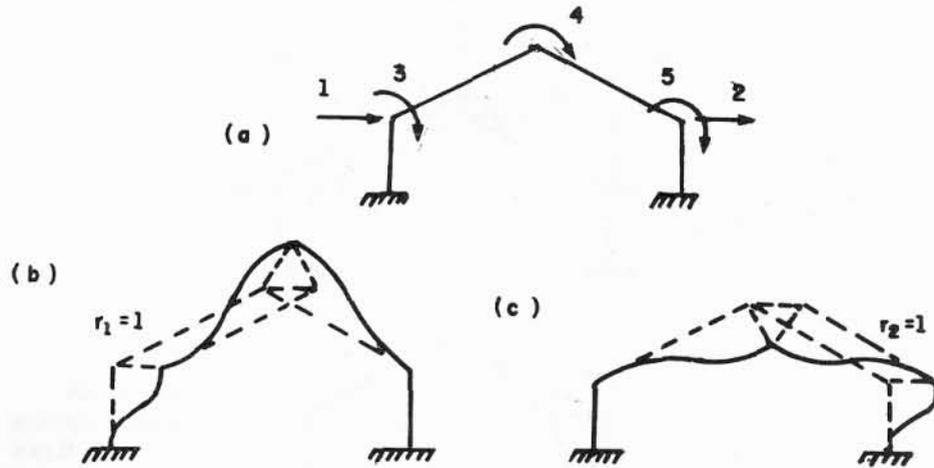


Fig. 3.2.6

Quando se desprezam deformações e se simplificam as coordenadas locais (Figs. 3.2.7 e 3.2.8), as deformações s têm sempre como referência uma direção ou origem fixa no elemento.

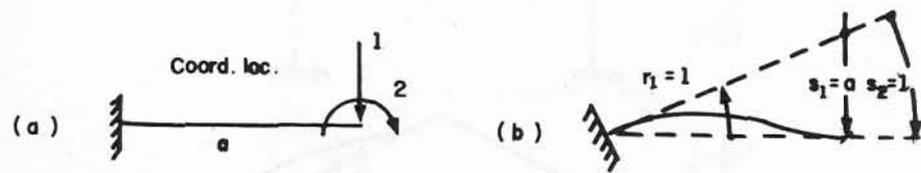


Fig. 3.2.7

No caso do elemento da Fig. 3.2.7a, a direção de referência é a tangente no engaste. Para os deslocamentos da Fig. 3.2.7b, as deformações s_1 e s_2 são

as indicadas. Para o elemento da Fig. 3.2.8a, as deformações são relativas à corda (Fig. 3.2.8b).

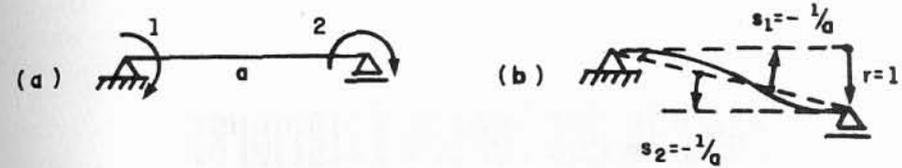


Fig. 3.2.8

Trabalho das Forças Exteriores e Energia de Deformação

4.1. Expressões do Trabalho e da Energia de Deformação no Formalismo Matricial

Considere-se uma estrutura submetida a cargas exteriores $\{R\}$, ficando seus elementos sujeitos a esforços $\{S\}$. Esses elementos sofrerão deformações $\{s\}$ e a estrutura apresentará deslocamentos nodais $\{r\}$. Admita-se que o carregamento seja estático, não acarretando energia cinética apreciável, e que a estrutura trabalhe no regime linearmente elástico.

a. Trabalho realizado pelas ações R_i em presença dos deslocamentos r_i :

$$\tau = \sum \frac{1}{2} R_i r_i \quad (\text{teorema de Clapeyron}).$$

b. Energia de deformação da estrutura, medida pelo trabalho dos esforços S_i face às deformações s_i :

$$U = \sum \frac{1}{2} S_i s_i.$$

Sob forma matricial, tem-se:

$$\tau = \frac{1}{2} \{R\}^T \{r\} = \frac{1}{2} \{r\}^T \{R\}$$

e

$$U = \frac{1}{2} \{S\}^T \{s\} = \frac{1}{2} \{s\}^T \{S\}.$$

Se forem conhecidas as matrizes de flexibilidade e de rigidez $[F]$ e $[K]$ para a estrutura integrada e $[f]$ e $[k]$ para a estrutura desmembrada em elementos, são verdadeiras as relações $\{R\} = [K] \{r\}$; $\{r\} = [F] \{R\}$; $\{S\} = [k] \{s\}$ e $\{s\} = [f] \{S\}$ donde

$$\tau = \frac{1}{2} \{r\}^T [K] \{r\} = \frac{1}{2} \{R\}^T [F] \{R\}$$

e

$$U = \frac{1}{2} \{s\}^T [k] \{s\} = \frac{1}{2} \{S\}^T [f] \{S\}.$$

As expressões acima correspondem a grandezas τ e U , sempre positivas para quaisquer ações. Logo, as matrizes de flexibilidade e de rigidez são positivas definidas.

4.2. Teoremas da Reciprocidade de Betti-Maxwell — Simetria das Matrizes de Flexibilidade e de Rigidez

Sendo τ e U escalares, não se alteram por transposição:

$$\tau = \frac{1}{2} \{r\}^T [K]^T \{r\} = \frac{1}{2} \{R\}^T [F]^T \{R\}.$$

Comparando com as expressões obtidas acima para τ , vê-se que estas identidades só se tornam possíveis se

$$[K]^T = [K] \quad \text{e} \quad [F]^T = [F].$$

Logo, as matrizes $[F]$ e $[K]$ são simétricas, isto é, $K_{ij} = K_{ji}$ e $F_{ij} = F_{ji}$.

Teorema de Maxwell

1. "A grandeza mecânica a aplicar segundo i , para manter a configuração deformada com $r_j = 1$, é igual à grandeza mecânica aplicada R_j , para manter a configuração deformada com $r_i = 1$ ".

2. "O deslocamento segundo i , causado por $R_j = 1$, é igual ao deslocamento segundo j , causado por $R_i = 1$ ".

É claro que as matrizes $[f]$ e $[k]$ da estrutura desmembrada também são simétricas.

Teorema de Betti

Admita-se que, referidos ao mesmo sistema de coordenadas, atuem na estrutura dois conjuntos de cargas: $\{R\}_I$, produzindo deslocamentos $\{r\}_I$, e $\{R\}_{II}$, com deslocamentos $\{r\}_{II}$.

Se $\{R\}_I$ atuar em primeiro lugar e só depois for aplicado $\{R\}_{II}$, o trabalho de deformação total é

$$\tau_{I+II} = \frac{1}{2} \{R\}_I^T \{r\}_I + \frac{1}{2} \{R\}_{II}^T \{r\}_{II} + \{R\}_I^T \{r\}_{II},$$

onde a última parcela não tem o fator 1/2 porque as forças $\{R\}_I$ já existiam com sua intensidade final quando ocorreram os deslocamentos $\{r\}_{II}$.

Se agora a seqüência for invertida, aplicando-se primeiro $\{R\}_{II}$, tem-se

$$\tau_{II I} = \frac{1}{2} \{R\}_{II}^T \{r\}_{II} + \frac{1}{2} \{R\}_I^T \{r\}_I + \{R\}_{II}^T \{r\}_I.$$

Os trabalhos τ_{LII} e τ_{LII} devem ser iguais. Logo

$$\{R\}_I^T \{r\}_{II} = \{R\}_{II}^T \{r\}_I.$$

Esta é a expressão matricial do Teorema de Betti: "O trabalho das forças e momentos do primeiro sistema em presença das deformações causadas pelo segundo é igual ao trabalho das ações do segundo sistema, associadas aos deslocamentos causados pelo primeiro".

4.3. Teoremas de Castigliano — Formulação das Matrizes de Flexibilidade e de Rigidez em Termos da Energia de Deformação

Sejam $\{R\}$ e $\{r\}$ as ações e deslocamentos em uma estrutura, com matriz de rigidez $[K]$. O princípio da conservação da energia permite concluir que, no regime elástico e sob carregamento estático:

$$U = \tau = \frac{1}{2} \{r\}^T [K] \{r\}.$$

1.º Teorema de Castigliano — Expressão dos Coeficientes de Rigidez

Se ocorrer variação elementar de um dos deslocamentos (r_i), tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial r_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \{r\}^T}{\partial r_i} [K] \{r\} + \{r\}^T [K] \frac{\partial \{r\}}{\partial r_i} \right).$$

Ora,

$$\frac{\partial \{r\}^T}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i} [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_i \ \dots \ r_n] = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]$$

$$\frac{\partial \{r\}}{\partial r_i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{Onde só fica diferente de zero o termo referente a } r_i).$$

Logo

$$\frac{\partial U}{\partial r_i} = \frac{1}{2} \left([00 \dots 1 \dots 0] [K] \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix} + [r_1 r_2 \dots r_i \dots r_n] [K] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \frac{1}{2} (2 R_i) = R_i.$$

Conclusão

$$\frac{\partial U}{\partial r_i} = R_i.$$

1.º Teorema de Castigliano. "A derivada da energia de deformação U em relação a um dos deslocamentos r_i dá a ação mecânica R_i aplicada na direção desse deslocamento."

Por outro lado, sendo

$$R_i = K_{i1} r_1 + K_{i2} r_2 + \dots + K_{in} r_n,$$

obtém-se

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r_i^2} = \frac{\partial R_i}{\partial r_i} = K_{ii} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r_j \partial r_i} = K_{ij} = K_{ji}.$$

Os coeficientes de rigidez podem portanto ser obtidos por dupla derivação parcial da energia de deformação:

$$K_{ii} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_i^2} \quad \text{e} \quad K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j}.$$

2.º Teorema de Castigliano. Expressão dos coeficientes de flexibilidade. Idêntico tratamento poderia ser aplicado à energia sob a forma

$$U = \frac{1}{2} \{R\}^T [F] \{R\},$$

onde $[F]$ é a matriz de flexibilidade.

A conclusão seria (derivando em relação a R_i):

$$\frac{\partial U}{\partial R_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \{R\}^T}{\partial R_i} [F] \{R\} + \{R\}^T [F] \frac{\partial \{R\}}{\partial R_i} \right) = r_i.$$

O 2.º Teorema de Castigliano estabelece que "a derivada da energia em relação a uma das cargas R_i dá o deslocamento na direção dessa carga":

$$\frac{\partial U}{\partial R_i} = r_i.$$

Sendo $r_i = \frac{\partial U}{\partial R_i} = F_{i1} R_1 + F_{i2} R_2 + \dots + F_{ij} R_j + \dots + F_{in} R_n$

tem-se

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R_i^2} = F_{ii} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial R_j \partial R_i} = F_{ij} = F_{ji}.$$

Assim, "os coeficientes F_{ij} da matriz de flexibilidade podem ser obtidos por dupla derivação da energia de deformação U ".

4.3.1. Trabalho e energia complementar de deformação — Observação

A rigor, nos desenvolvimentos estudados foram incluídas duas concepções algo diversificadas do trabalho e da energia.

Classicamente, o trabalho é definido a partir de uma contribuição elementar $d\tau = R_i dr_i$ (no caso de se tratar de um elemento da estrutura, $dU = S_i ds_i$). Sob esta forma, o trabalho (ou a energia) corresponde à área hachurada verticalmente no diagrama das Figs. 4.3.1 e 4.3.2.

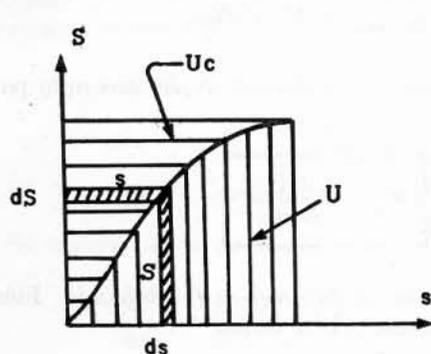


Fig. 4.3.1

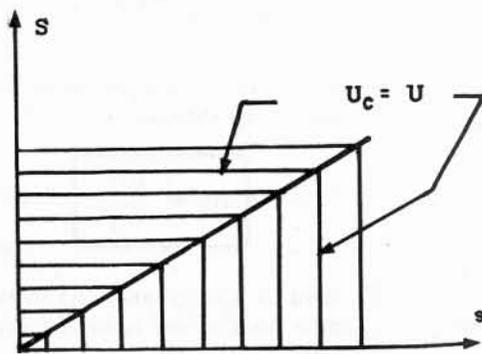


Fig. 4.3.2

Engesser foi quem introduziu o conceito de *energia complementar de deformação* U_c (ou de trabalho complementar de deformação τ_c), definidos por $d\tau_c = r_i dR_i$, ou $dU_c = s_i dS_i$ (área hachurada na horizontal, Figs. 4.3.1 e 4.3.2).

Se existe relação linear entre sollicitação e deformação (Fig. 4.3.2), será $U = U_c$ ou $\tau = \tau_c$.

Se a relação não é linear (Fig. 4.3.1), será $U \neq U_c$ ou $\tau \neq \tau_c$.

Ao abordar o 1.º Teorema, considerou-se a energia de deformação na forma convencional, pois admitiu-se variação de r_i . Mas no outro considerou-se a energia em termos de variações de R_i . O 2.º Teorema de Castigliano aplica-se, no fundo, à energia complementar de deformação. A conclusão

$$\frac{\partial U}{\partial R_i} = r_i$$

é válida sem restrições no regime linear, porque

$$U = U_c \text{ (Fig. 4.3.2).}$$

Não havendo linearidade, o correto é

$$\frac{\partial U_c}{\partial R_i} = r_i.$$

4.3.2. Exemplos

1. Obter a matriz de rigidez da estrutura da Fig. 4.3.3, onde a coluna da direita tem rigidez $k = \frac{12EJ}{a^3}$ e as demais têm

$$k_1 = \frac{12EJ}{(a/2)^3} = 8k.$$

Solução. Admitindo uma configuração deformada (r_1, r_2) , obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \times 8k \times (r_1 - r_2)^2 \times 2 + \frac{1}{2} \times k \times r_1^2 + \frac{1}{2} \times 8k \times r_2^2 \times 2$$

$$U = 8k (r_1 - r_2)^2 + \frac{1}{2} k r_1^2 + 8k r_2^2.$$

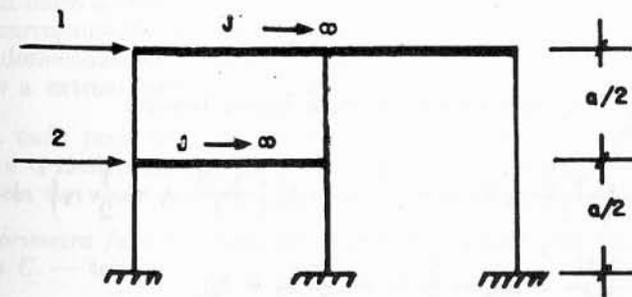


Fig. 4.3.3

Por derivação, são obtidos os termos da matriz de rigidez:

$$\frac{\partial U}{\partial r_1} = 16k (r_1 - r_2) + k r_1; \quad \frac{\partial U}{\partial r_2} = -16k (r_1 - r_2) + 16k r_2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} = K_{11} = 17k; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r_2 \partial r_1} = K_{12} = K_{21} = -16k$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} = K_{22} = 32k.$$

A matriz de rigidez é $[K] = \frac{12EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 17 & -16 \\ -16 & 32 \end{bmatrix}$.

2. Na estrutura da Fig. 4.3.4, as três barras têm E_i, Ω_i, l_i diferentes. Obter a matriz de rigidez. Supondo que haja deslocamentos genéricos (r_1, r_2) , sejam s_1, s_2, s_3 as deformações axiais das 3 barras:

$$s_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} r_1 - \frac{1}{2} r_2$$

$$s_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_2$$

$$s_3 = r_1.$$

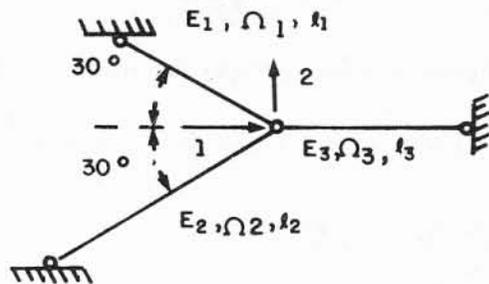


Fig. 4.3.4

Sendo $k_i = \frac{E_i \Omega_i}{l_i}$ a rigidez axial de cada barra, tem-se:

$$U = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r_1 - \frac{1}{2} r_2 \right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_2 \right)^2 + \frac{1}{2} k_3 r_1^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} = K_{11} = \frac{3}{4} k_1 + \frac{3}{4} k_2 + k_3;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r_2 \partial r_1} = K_{12} = K_{21} = -\frac{\sqrt{3}}{4} k_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} k_2;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} = K_{22} = \frac{1}{4} k_1 + \frac{1}{4} k_2.$$

Logo,

$$[K] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (3k_1 + 3k_2 + k_3) & -\sqrt{3}(k_1 - k_2) \\ -\sqrt{3}(k_1 - k_2) & (k_1 + k_2) \end{bmatrix}.$$

3. Neste exemplo é confirmado que, não sendo linear a relação entre ações mecânicas e deslocamentos, o 2.º Teorema de Castigliano só tem aplicação se se referir à energia complementar de deformação.

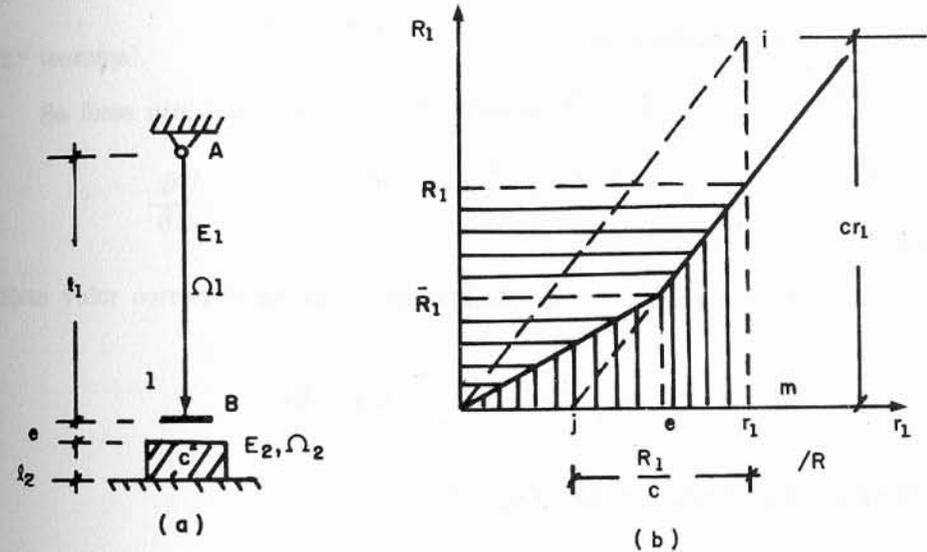


Fig. 4.3.5

A estrutura da Fig. 4.3.5a compõe-se de um tirante AB (definido por E_1, Ω_1 e l_1) e de um bloco de material elástico C (cuja altura é l_2 , seção reta Ω_2 e módulo E_2). O carregamento R_1 atuará no ponto B , segundo a coordenada n.º 1, produzindo deslocamentos verticais r_1 do mesmo ponto. Ha uma folga e , pequena, entre a extremidade do tirante e o bloco.

Embora cada peça trabalhe no regime linear elástico, a relação entre o carregamento e o deslocamento de B corresponderá a duas funções diferentes, na dependência do valor da carga R_1 , conforme se vê no diagrama da Fig. 4.3.5b.

Numa primeira fase — enquanto o ponto B ainda não entra em contato com o bloco C — tem-se

$$r_1 < e \quad \therefore \quad R_1 = \frac{E_1 \Omega_1}{l_1} r_1.$$

Para

$$r_1 = e, \quad R_1 = \bar{R}_1 = \frac{E_1 \Omega_1}{l_1} e.$$

Na segunda fase ($r_1 > e$), será

$$R_1 = \bar{R}_1 + \left(\frac{E_1 \Omega_1}{l_2} + \frac{E_2 \Omega_2}{l_2} \right) (r_1 - e).$$

Se, para simplificar, for feito $\frac{E_1 \Omega_1}{l_1} + \frac{E_2 \Omega_2}{l_2} = c$,

obtem-se, nesta segunda fase:

$$R_1 = \bar{R}_1 + c (r_1 - e)$$

$$\therefore r_1 = e + \frac{1}{c} (R_1 - \bar{R}_1)$$

onde \bar{R}_1 , c e e são constantes.

A energia de deformação, em plena segunda fase, é

$$U = \frac{1}{2} \bar{R}_1 e + \frac{r_1 - e}{2} (R_1 + \bar{R}_1);$$

a energia complementar de deformação é

$$U_c = \frac{1}{2} \bar{R}_1 e + \frac{r_1 + e}{2} (R_1 - \bar{R}_1)$$

(como se vê $U \neq U_c$).

i. Para verificar o 1.º teorema será utilizada a energia U :

$$\frac{\partial U}{\partial r_1} = \frac{1}{2} (R_1 + \bar{R}_1) + \frac{r_1 - e}{2} c = \bar{R}_1 + c (r_1 - e) = R_1.$$

Se a derivação fosse feita empregando a energia complementar U_c , obter-se-ia

$$\frac{\partial U_c}{\partial r_1} = \frac{1}{2} (R_1 - \bar{R}_1) + \frac{r_1 + e}{2} c = c r_1.$$

(Este último resultado não daria o valor de R_1 e, sim, a ordenada do ponto i , Fig. 4.3.5b.)

ii. Para aplicar o 2.º teorema, entretanto, será obrigatório utilizar U_c . De fato:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_c}{\partial R_1} &= \frac{1}{2c} (R_1 - \bar{R}_1) + \frac{r_1 + e}{2} = \\ &= \frac{1}{2c} (R_1 - \bar{R}_1) + e + \frac{1}{2c} (R_1 - \bar{R}_1) = r_1 - e + e = r_1 \end{aligned}$$

(2.º teorema).

Se fosse utilizada na derivação a energia U , obter-se-ia

$$\frac{\partial U}{\partial R_1} = \frac{1}{2c} (R_1 + \bar{R}_1) + \frac{1}{2c} (R_1 - \bar{R}_1) = \frac{R_1}{c} (\neq r_1).$$

(Este valor corresponderia à abscissa jm , na Fig. 4.3.5b.)

Princípio dos Trabalhos Virtuais e suas Aplicações na Análise Matricial das Estruturas

5.1. Formulação Matricial do Princípio

Considere-se a estrutura da Fig. 5.1.1.

1. Admita-se que tenha sido aplicado inicialmente um sistema de cargas $\{\bar{R}\}$ (estado de carregamento), acarretando os esforços $\{\bar{S}\}$.

2. Depois que a estrutura estiver em equilíbrio, mantendo presentes as solicitações $\{\bar{R}\}$ e $\{\bar{S}\}$, seja ela submetida a um estado de deformação caracterizado por deformações $\{s\}$ dos elementos (de causa totalmente independente das ações $\{\bar{R}\}$). Haverá deslocamentos $\{r\}$ dos nós.

3. O princípio dos trabalhos virtuais aplicado ao caso conclui que o trabalho total das ações externas $\{\bar{R}\}$ é igual ao trabalho total dos esforços $\{\bar{S}\}$:

$$\{\bar{R}\}^T \{r\} = \{\bar{S}\}^T \{s\}.$$

Observação. No cálculo convencional de estruturas, os elementos são infinitesimais e tem-se

$$\Sigma \bar{P} \delta = \int \bar{M} \frac{M}{EJ} ds + \int \bar{N} \frac{N}{E\Omega} ds + \int \bar{Q} \frac{\chi Q}{G\Omega} ds + \int \frac{\bar{T}T}{GJ_0} ds.$$

Problemas Clássicos

1. Conhecidas as deformações $\{s\}$ dos elementos (causadas por cargas conhecidas, temperatura ou modificações de montagem), induzir o valor do deslocamento nodal r_i segundo uma das coordenadas gerais.

2. Conhecidos os esforços $\{S\}$ nos elementos, induzir o valor de R_i , uma das ações causadoras dos mesmos esforços.

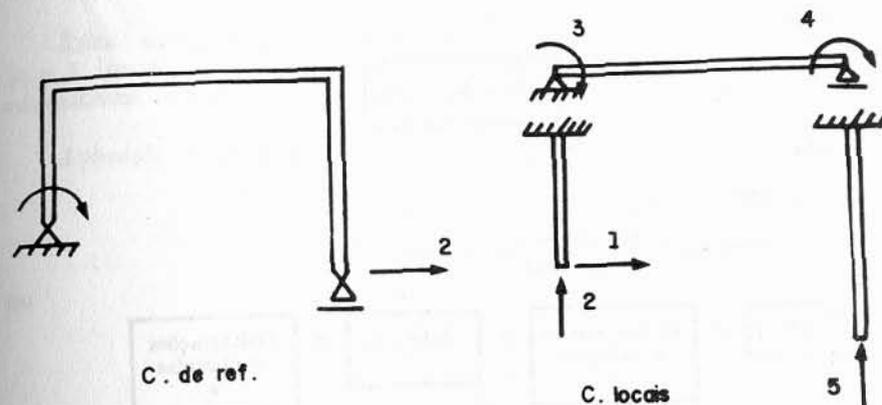


Fig. 5.1.1

5.2. Resolução do 1.º Problema Clássico

Trata-se de calcular o deslocamento r_i , compatível com deformações conhecidas (ou calculáveis) dos elementos, $\{s\}$.

Estado de carregamento (fictício). Ação unitária apenas na direção de r_i :

$$\{\bar{R}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{R}_i = 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Esforços correspondentes } \bar{S} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S} \\ \vdots \\ \bar{S}_n \end{Bmatrix}.$$

Estado de deformação (real):

$$\text{Deformações conhecidas } \{s\} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{Bmatrix} \quad \text{Deslocamentos: } \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_m \end{Bmatrix} = \{r\}. \quad (\text{a calcular})$$

Aplicação do princípio:

$$\text{ou } \{\bar{R}\}^T \{r\} = \{\bar{S}\}^T \{s\}$$

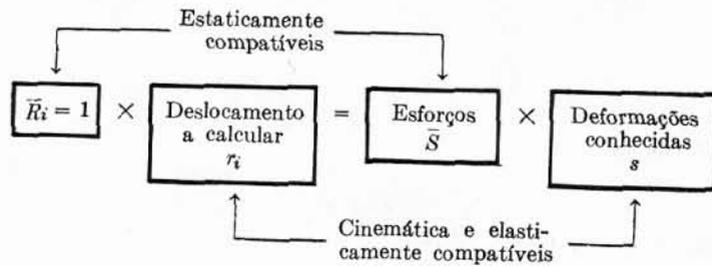
$$[00 \dots 1 \dots 0] \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_m \end{Bmatrix} = \{\bar{S}\}^T \{s\}$$

ou finalmente

$$r_i = \{\bar{S}\}^T \{s\}.$$

Observações.

1. Em resumo, tem-se



2. Para calcular os deslocamentos $\{r\}$ segundo todas as coordenadas, o vetor $\{\bar{R}\}$ (que na solução vista tinha um termo unitário) passa a ser substituído pela matriz:

$$\{\bar{R}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = [I].$$

O vetor $\{\bar{S}\}$, correspondente a $\{\bar{R}\}$, é substituído pela matriz

$$[\bar{S}] = [B] \text{ (que dá em cada coluna } i \text{ os esforços para } \bar{R}_i = 1).$$

Aplicando o princípio, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{Bmatrix} = [B]^T \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{Bmatrix} \text{ ou } \boxed{\{r\} = [B]^T \{s\}}.$$

5.3. Resolução do 2.º Problema Clássico

Trata-se de obter uma das ações, R_i , conhecendo os esforços $\{S\}$.

Estado de carregamento (real, neste caso):

$$\begin{array}{l} \text{Esforços} \\ \text{conhecidos} \end{array} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Cargas desconhecidas;} \\ \text{pretende-se calcular } R_i \end{array} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i \\ R_m \end{Bmatrix}$$

5.3. RESOLUÇÃO DO 2º PROBLEMA CLÁSSICO

Estado de deformação (fictício). Atribui-se à estrutura o deslocamento nodal $\bar{r}_i = 1$ (sendo os demais nulos) e determinam-se as deformações $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n$, compatíveis cinematicamente com $\bar{r}_i = 1$, obtendo-se o vetor $\{\bar{s}\}$.

Aplicação do teorema:

$$\{R\}^T \{\bar{r}\} = \{S\}^T \{\bar{s}\}$$

ou

$$[R_1 R_2 \dots R_i \dots R_m] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \{S\}^T \{\bar{s}\}$$

ou

$$\boxed{R_i = \{S\}^T \{\bar{s}\}}.$$

Observações.

1. Para obter todos os R_i , o vetor \bar{r} será substituído pela matriz

$$\{\bar{r}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = [I].$$

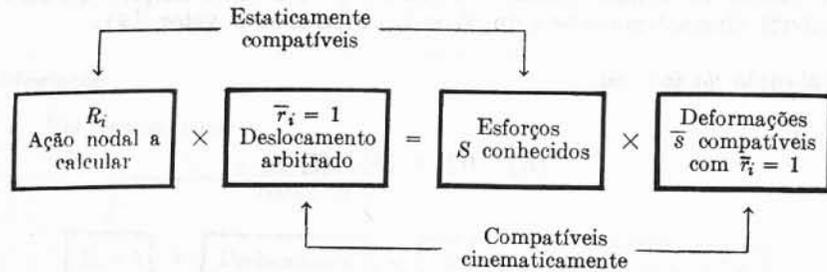
Matriz das deformações compatíveis com os $r_i = 1$:

$$\{\bar{s}\} = [A] \text{ (já estudada).}$$

Aplicando o princípio, tem-se:

$$\{R\}^T = \{S\}^T [A] \text{ ou } \boxed{R = [A]^T \{S\}}.$$

2. Esquemáticamente, a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais na resolução do 2.º problema se faz assim:



5.4. Princípio da Contragradência (Clebsh)

Na resolução do 1.º problema, partindo de

$$\{S\} = [B] \{R\},$$

obteve-se

$$\{r\} = [B]^T \{s\}.$$

Na resolução do 2.º problema, a partir da relação

$$\{s\} = [A] \{r\}$$

obteve-se

$$\{R\} = [A]^T \{S\}.$$

Estas conclusões resumem o Teorema de Clebsh, aplicado às grandezas contragradientes (R, r) e (S, s) :

1. "Se a matriz $[B]$ transforma ações mecânicas $\{R\}$ em esforços $\{S\}$, a sua transposta $[B]^T$ faz a transformação de deformações $\{s\}$ em deslocamentos nodais $\{r\}$."

2. "Se a matriz $[A]$ transforma deslocamentos nodais $\{r\}$ em deformações $\{s\}$, a sua transposta $[A]^T$ faz a transformação de esforços $\{S\}$ nas ações $\{R\}$ que os produziram."

Este teorema torna evidente o relacionamento da Estática com a Cinemática.

Assim, a matriz de incidência $[B]$ exprime ligações no campo da Estática (entre cargas e esforços), mas a sua transposta $[B]^T$ passa a exprimir relações cinemáticas, compatibilizando as deformações das barras com os deslocamentos dos nós.

Por outro lado, a matriz de incidência $[A]$, que exprime (no domínio da Cinemática), as deformações em função dos deslocamentos nodais, quando transposta, passa a realizar a transformação de esforços no carregamento nodal estaticamente compatível com eles.

Dado o sentido inverso dessas transformações, demonstra-se facilmente que

$$[A]^T [B] = [B]^T [A] = [I].$$

Isto não habilita, entretanto, a que se obtenha por inversão e transposição a matriz $[B]$ — de elaboração mais trabalhosa e dificilmente programável — a partir da matriz $[A]$, mais simples de formular. A razão é que estas matrizes são, em geral, retangulares.

Se houver o mesmo número de coordenadas locais e de referência ($m = n$), $[A]$ e $[B]$ serão quadradas e tem-se

$$[A]^T = [B]^{-1} \quad \text{ou} \quad [B]^T = [A]^{-1}$$

5.5. Exemplos

1. Na treliça da Fig. 5.5.1 as barras foram montadas com as seguintes modificações de comprimentos em relação às medidas de projeto:

$$s_1 = +0,02a; \quad s_2 = -0,01a; \quad s_3 = -0,02a.$$

Calcular os deslocamentos nodais r_1 e r_2 , em relação às posições previstas (Problema da contraflecha).

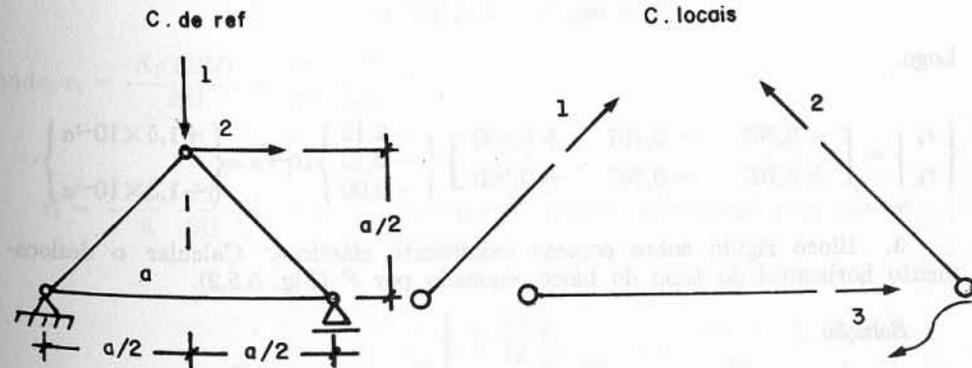


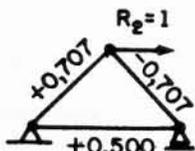
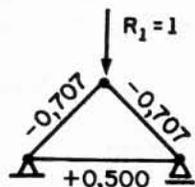
Fig. 5.5.1

Solução

Sendo $\{S\} = [B] \{R\}$, vem:

$$\{r\} = [B]^T \{s\}. \quad (\text{Clebsh}).$$

Formulação da matriz $[B]$:



$$[B] = \begin{bmatrix} -0,707 & +0,707 \\ -0,707 & -0,707 \\ +0,500 & +0,500 \end{bmatrix}$$

Aplicação do Teorema:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,707 & -0,707 & +0,500 \\ +0,707 & -0,707 & +0,500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} +0,02a \\ -0,01a \\ -0,02a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,01a \\ +0,0183a \end{Bmatrix}$$

2. Na mesma estrutura, ocorre uma diminuição uniforme de temperatura de 30°C, sendo $\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$ o coeficiente térmico. Pretende-se calcular os deslocamentos r_1 e r_2 causados só pela variação da temperatura.

Solução

$$s_1 = \alpha t l_1 = -2,12 \times 10^{-4} a = s_2$$

e

$$s_3 = \alpha t l_3 = -3 \times 10^{-4} a.$$

Logo

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,707 & -0,707 & +0,600 \\ +0,707 & -0,707 & +0,500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2,12 \\ -2,12 \\ -3,00 \end{Bmatrix} 10^{-4} a = \begin{Bmatrix} +1,5 \times 10^{-4} a \\ -1,5 \times 10^{-4} a \end{Bmatrix}$$

3. Bloco rígido sobre estacas axialmente elásticas. Calcular o deslocamento horizontal do topo do bloco, causado por P (Fig. 5.5.2).

Solução

Cálculo de $\{\bar{S}\}$ para $\bar{R}_1 = 1$:

tomando momentos em relação a a e b obtém-se

$$S_1 = \frac{5}{3}; S_2 = -\frac{4}{3} \text{ e } S_3 = 0.$$

Logo:

$$\{\bar{S}\} = \{B\} = \begin{Bmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Mas

$$r_1 = \{B\}^T \{s\}$$

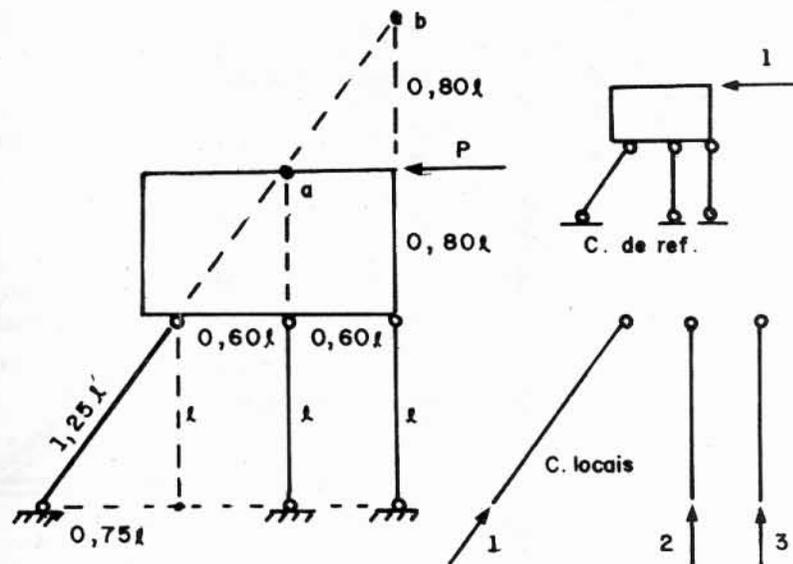


Fig. 5.5.2

$$\text{onde } s_1 = \frac{S_1(1,25l)}{E\Omega} = \frac{25}{12} \frac{Pl}{E\Omega}$$

$$s_2 = -\frac{4}{3} \frac{Pl}{E\Omega}, s_3 = 0 \quad (\text{deformações axiais das estacas pelo esforço normal})$$

$$r_1 = \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{25}{12} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{Pl}{E\Omega} = 5,3 \frac{Pl}{E\Omega}$$

4. Determinar o deslocamento vertical do ponto D , na Fig. 5.5.3, computando as ações de flexão e o esforço normal.

Solução

Para $\bar{R}_1 = 1$:

$$\{\bar{S}\} = \{B\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{Bmatrix}.$$

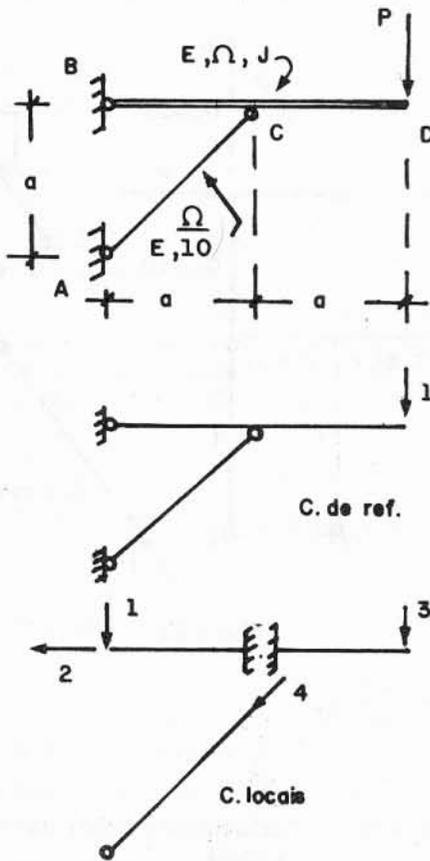


Fig. 5.5.3

Por outro lado, a carga P provoca as deformações em coordenadas locais:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} Pa^3/3EJ \\ 2Pa/E\Omega \\ Pa^3/3EJ \\ 20Pa/E\Omega \end{Bmatrix}.$$

O deslocamento pedido é:

$$r_1 = \{\bar{S}\}^T \{s\} = 60,5 \frac{Pa}{E\Omega} + \frac{2}{3} \frac{Pa^3}{EJ}.$$

5. Valor do deslocamento vertical de D (mesma estrutura), causado por uma diminuição uniforme de temperatura de 20°C , (é dado $\alpha = 10^{-5}$).

$$\text{As deformações térmicas dos elementos são } \{s_i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \times 10^{-4}a \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \times 10^{-4}a \end{Bmatrix}$$

(onde s_1 e s_3 são nulos porque a variação uniforme de temperatura não causa encurvamento das barras). Logo:

$$r_1 = \{\bar{S}\}^T \{s_i\} = (-4 + 8) \times 10^{-4}a = +4 \times 10^{-4}a.$$

6. Na montagem da estrutura da Fig. 5.5.4a, foram introduzidas as modificações (variações de forma e dimensões) dos elementos mostradas na parte c. Calcular os deslocamentos verticais de A e B , decorrentes dessas modificações.

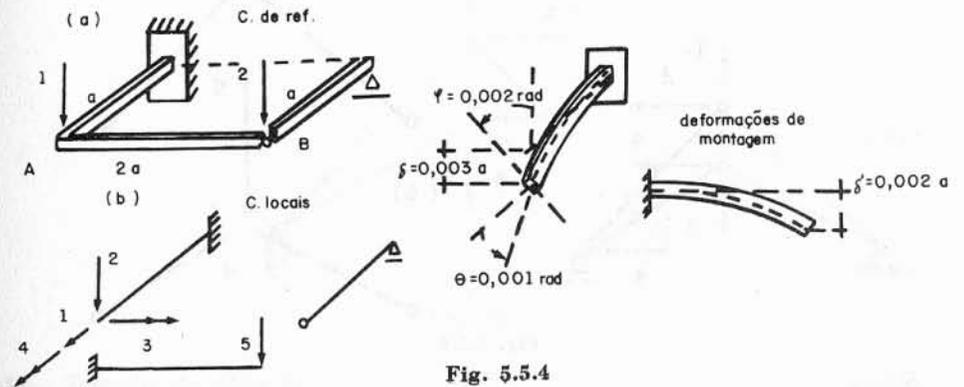


Fig. 5.5.4

Solução

Aplicando $\bar{R}_1 = 1$ e $R_2 = 1$, obtém-se

$$\{\bar{S}\} = \{B\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{O vetor das modificações de montagem é: } \{s_m\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,003a \\ 0,001 \\ 0,002 \\ 0,002a \end{Bmatrix}.$$

Logo:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = [B]^T \{s_m\} = \begin{Bmatrix} 0,003a \\ 0,001a \end{Bmatrix}$$

7. Na treliça da Fig. 5.5.5, os esforços normais nas barras são os indicados (tração → (+)). Determinar as cargas exteriores que os causaram, aplicadas segundo as coordenadas de referência da Fig. 5.5.6a.

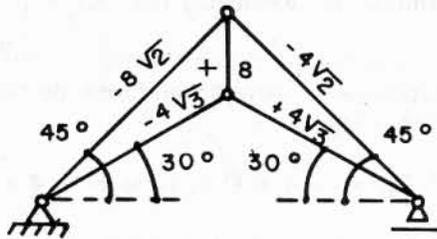


Fig. 5.5.5

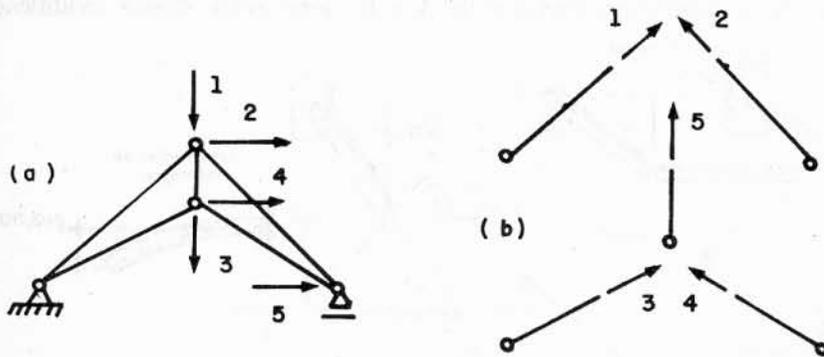


Fig. 5.5.6

Solução

Trata-se da segunda modalidade de aplicação do princípio dos trabalhos virtuais.

Para os sistemas de coordenadas das partes a e b da figura, tem-se

$$[A] = \begin{matrix} \begin{matrix} (r_1 = 1) & (r_2 = 1) & (r_3 = 1) & (r_4 = 1) & (r_5 = 1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Diagram 1} & \text{Diagram 2} & \text{Diagram 3} & \text{Diagram 4} & \text{Diagram 5} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & +\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & +\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & +\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 & +\sqrt{3}/2 \\ -1 & 0 & +1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Sendo, por outro lado:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} -8\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{3} \\ +4\sqrt{3} \\ +8 \end{Bmatrix}$$

a aplicação do princípio dá:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix} = [A]^T \{S\} = \begin{Bmatrix} +4 \\ -4 \\ +8 \\ -12 \\ +2 \end{Bmatrix}$$

As ações são as da Fig. 5.5.7.

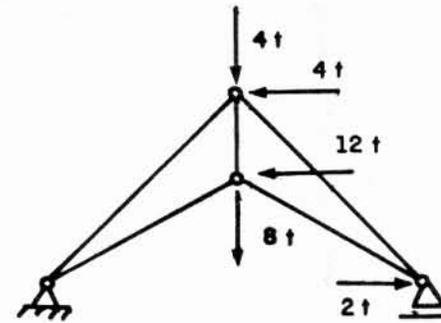


Fig. 5.5.7

5.6. Teorema da Redução

A. Na resolução do 1.º problema (cálculo de deslocamentos utilizando trabalhos virtuais), caso a estrutura seja estaticamente indeterminada, a aplicação pura e simples do procedimento estudado acarretará o cálculo hiperestático dos esforços {S} do estado de carregamento, provocados por R_i = 1. A solução torna-se trabalhosa.

Ora, a equação de condição instituída, r_i = {S̄}ᵀ {s} só obriga a que os esforços {S} sejam estaticamente compatíveis com R_i = 1, não exigindo que se trate dos verdadeiros esforços hiperestáticos. Explorando este detalhe "é possível aplicar o princípio dos trabalhos virtuais empregando os esforços {S̄_o} obtidos em qualquer estrutura isostática proveniente da estrutura dada, mediante o corte de vínculos:

$$r_i = \{\bar{S}\}^T \{s\} = \{\bar{S}_o\}^T \{s\} \quad (\text{Teorema da Redução}).$$

B. Na resolução do 2.º problema, se a estrutura for cinematicamente determinada, poder-se-á desenvolver uma argumentação semelhante para concluir que as deformações $\{\bar{s}\}$ compatíveis com $\bar{r}_i = 1$ poderão ser obtidas numa estrutura correlata, tornada cinematicamente determinada:

$$R_i = \{\bar{s}\}^T \{S\} = \{\bar{s}_o\}^T \{S\}.$$

6

Transformações Usuais na Análise Matricial das Estruturas

6.1. Cargas Fora dos Nós — Carregamento Nodal Equivalente

Quando houver cargas aplicadas nos elementos entre os nós, é necessário transformá-las em “cargas nodais equivalentes”.

Considere-se a estrutura da Fig. 6.1.1, onde os elementos *CD* e *DE* têm cargas intermediárias.

Reações de fixação. Aplicando aos elementos com extremidades engastadas o carregamento dado (Fig. 6.1.1b), são obtidas as reações de fixação ($A_1, A_2 \dots A_{10}$).

Aplicando aos nós as reações de fixação com os sentidos invertidos, as cargas da Fig. 6.1.1c são as cargas nodais equivalentes.

É fácil verificar que, submetendo a estrutura às cargas dadas e às reações de fixação (Fig. 6.1.1d), o valor dos deslocamentos nodais das partes *c* e *d* da figura seria, feita a superposição dos dois casos, o mesmo da situação proposta (parte *a*). Ora, os deslocamentos na *d* são nulos. Logo, os de *c* — cargas nodais equivalentes — equivalem aos da parte *a*.

Nota. Os esforços $\{S_o\}$ de fixação (parte *b* da figura) não são nulos.

6.2. Associação dos Elementos de uma Estrutura — Matrizes $[F]$ e $[K]$ para o Conjunto

As operações matriciais que visam à resolução de uma estrutura consideram sempre duas situações: numa delas (referida a coordenadas locais) a estrutura está *desmembrada* em *elementos independentes*, solicitados por esforços $\{S\}$; na outra, está *integrada* e submetida a ações nodais $\{R\}$ (o sistema de coordenadas é o de referência).

Cada uma dessas situações apresenta ações mecânicas e deslocamentos: $\{R\}$ e $\{r\}$; $\{S\}$ e $\{s\}$. Em conseqüência, relacionando tais grandezas, existe em cada caso uma matriz de flexibilidade e uma de rigidez. Será necessário considerar, portanto:

a. na estrutura desmembrada:

matriz de flexibilidade $[f]$, tal que $\{s\} = [f] \{S\}$ e matriz de rigidez $[k]$, tal que $\{S\} = [k] \{s\}$.

b. na estrutura integrada:

matriz de flexibilidade $[F]$, tal que $\{r\} = [F] \{R\}$ e matriz de rigidez $[K]$, tal que $\{R\} = [K] \{r\}$.

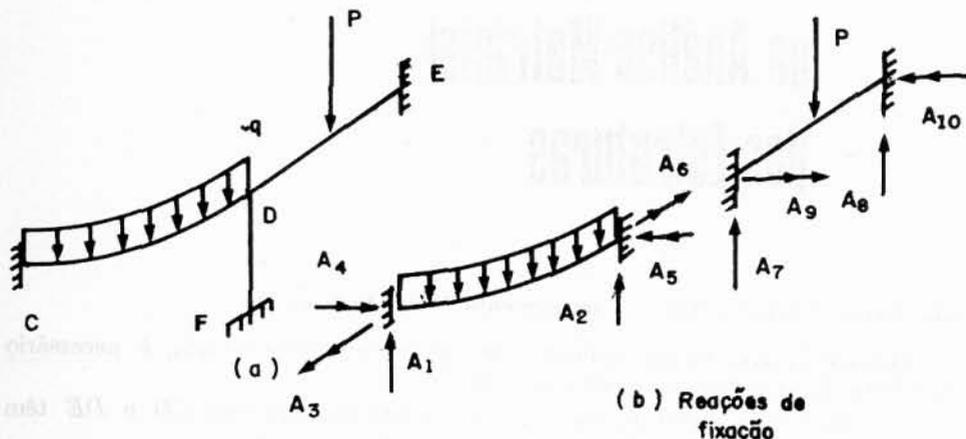


Fig. 6.1.1

As matrizes $[f]$ e $[k]$ da estrutura decomposta são formuladas diretamente, colocando-se com a disposição em banda as matrizes de flexibilidade ou de rigidez dos elementos considerados isoladamente, as quais funcionam como submatrizes do conjunto.

Assim, no caso da Fig. 6.2.1a, a estrutura desmembrada na parte b da figura tem a seguinte matriz de flexibilidade.

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & & & & \\ f_{21} & f_{22} & & & & \\ & & f_{33} & f_{34} & & \\ & & f_{43} & f_{44} & & \\ & & & & f_{55} & f_{56} \\ & & & & f_{65} & f_{66} \end{bmatrix}$$

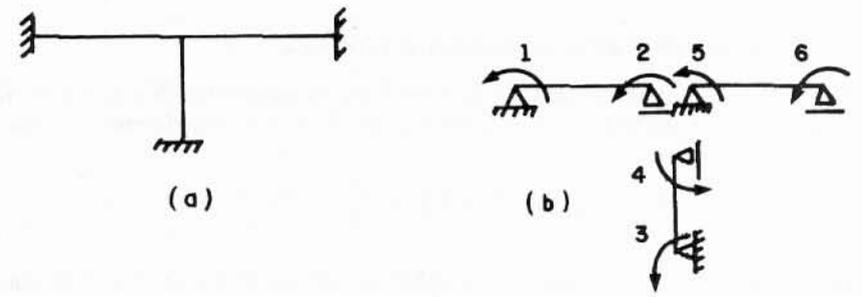


Fig. 6.2.1

Compreende-se portanto que, se as matrizes de flexibilidade ou de rigidez dos elementos forem tabeladas (casos comuns de barras) ou obtidas a partir de tratamento a ser estudado, é fácil compor a matriz total $[f]$ ou $[k]$, porque cada elemento não interfere nos outros.

O mesmo não se passa com a matriz $[F]$ ou $[K]$ para a estrutura integrada, porque os efeitos são acoplados. Obter essas matrizes é praticamente quase resolver a estrutura. Em exemplos, foram vistos alguns casos simples em que essas matrizes podiam ser obtidas diretamente, sem o emprego de técnica especial. A forma geral de determinação dessas matrizes utiliza considerações ligadas à energia de deformação. Ressalve-se que na prática do cálculo de estruturas em computador é dada grande ênfase à composição direta da matriz de rigidez do conjunto (método da rigidez direta).

6.2.1. Matriz de Flexibilidade da Estrutura Integrada

Sejam: $\{S\}$, $\{s\}$ e $[f]$ as ações, deformações e flexibilidade da estrutura desmembrada em elementos (em coordenadas locais); $\{R\}$, $\{r\}$ e $[F]$ as mesmas grandezas para a estrutura integrada; $[B]$ a matriz que transforma $\{R\}$ em $\{S\}$.

A energia de deformação da estrutura é

$$U = \frac{1}{2} \{R\}^T [F] \{R\} = \frac{1}{2} \{S\}^T [f] \{S\}.$$

Sendo $\{S\} = [B] \{R\}$, a substituição na expressão acima dá:

$$\{R\}^T [F] \{R\} = \{R\}^T [B]^T [f] [B] \{R\}.$$

Esta igualdade é, mais apropriadamente, uma identidade, verificando-se para qualquer $\{R\}$. Logo:

$$[F] = [B]^T [f] [B].$$

Note-se que a transposição da expressão de $[F]$, repetindo seu próprio valor, confirma que esta matriz é simétrica tal como $[f]$.

6.2.2. Matriz de Rigidez da Estrutura Integrada

Se $[k]$ for a matriz de rigidez da estrutura decomposta, $[K]$, a da estrutura integrada e $[A]$, a matriz de incidência cinemática que transforma $\{r\}$ em $\{s\}$, tem-se

$$U = \frac{1}{2} \{r\}^T [K] \{r\} = \frac{1}{2} \{s\}^T [k] \{s\}.$$

Sendo, porém, $\{s\} = [A] \{r\}$, a substituição no segundo membro dá

$$\{r\}^T [K] \{r\} = \{r\}^T [A]^T [k] [A] \{r\}.$$

A verificação desta identidade, para qualquer vetor $\{r\}$, exige que se tenha

$$[K] = [A]^T [k] [A].$$

6.2.3. Cálculo de $[K]$ ou $[F]$ por Parcelas

As expressões vistas para o cálculo de $[F]$ e $[K]$ podem envolver operações capazes de ocupar muitas memórias de computador, se a resolução for mecanizada.

A seguir, será visto como se pode parcelar o cálculo, eliminando os inconvenientes citados.

Considere-se o caso da matriz de rigidez $[K]$ (a demonstração para o caso da matriz de flexibilidade seria semelhante).

Sejam I, II, IV, ... m os elementos. Cada um deles corresponde a algumas coordenadas locais. Suas matrizes de rigidez (submatrizes da matriz de rigidez total $[k]$) são $[k]_I, [k]_{II}, \dots, [k]_m$.

No total:

$$[k] = \begin{bmatrix} [k]_I & & & \\ & [k]_{II} & & \\ & & \dots & \\ & & & [k]_m \end{bmatrix}.$$

A matriz de incidência $[A]$ tem submatrizes $[A]_I, [A]_{II}, \dots$ que se associam em coluna:

$$[A] = \begin{Bmatrix} [A]_I \\ [A]_{II} \\ \vdots \\ [A]_m \end{Bmatrix}.$$

(Cada submatriz dá os valores das deformações de um elemento.)

Aplicando a expressão de $[K]$, tem-se

$$[K] = [A]^T [k] [A] = \begin{bmatrix} [A]_I^T [A]_{II}^T \dots [A]_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [k]_I & & & \\ & [k]_{II} & & \\ & & \dots & \\ & & & [k]_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [A]_I \\ [A]_{II} \\ \vdots \\ [A]_m \end{Bmatrix}$$

ou

$$[K] = [A]_I^T [k]_I [A]_I + [A]_{II}^T [k]_{II} [A]_{II} + \dots$$

$$[K] = \sum_{i=1}^m [A]_i^T [k]_i [A]_i$$

expressão que permite obter $[K]$ em parcelas.

Para a matriz de flexibilidade obter-se-ia, por tratamento semelhante:

$$[F] = \sum_{i=1}^m [B]_i^T [f]_i [B]_i.$$

6.3. Modificação das Matrizes $[F]$ e $[K]$ no Caso de Mudança do Sistema de Coordenadas. Generalização

Considere-se uma estrutura referida ao sistema de coordenadas $\textcircled{1}$. Neste sistema, sejam $\{R\}_1$ as ações mecânicas; $\{r\}_1$ os deslocamentos e $[F]_1$ e $[K]_1$ as matrizes de flexibilidade e de rigidez, respectivamente.

Admita-se que se tenha feito uma mudança do sistema de coordenadas, para o sistema $\textcircled{2}$, onde $\{R\}_2, \{r\}_2, [F]_2$ e $[K]_2$ têm a significação acima mencionada, com referência ao novo sistema.

Seja $[C]_{12}$ a matriz que permite exprimir as antigas grandezas $\{R\}_1$ ou $\{r\}_1$ em função das novas:

$$\{R\}_1 = [C]_{12} \{R\}_2$$

ou

$$\{r\}_1 = [C]_{12} \{r\}_2.$$

A formulação da matriz $[C]_{12}$ pode ser feita como se viu para as matrizes de incidência.

O problema que preocupa, agora, é obter as matrizes de flexibilidade e de rigidez $[F]_2$ e $[K]_2$, em função das do primeiro sistema.

Ora, a energia de deformação da estrutura independe do sistema de coordenadas, pelo que

$\{R\}_1^T \{r\}_1 = \{R\}_2^T \{r\}_2$. Mas, por serem $\{R\}_1 = [C]_{12} \{R\}_2$ e $\{r\}_1 = [F]_1 \{R\}_1 = [F]_1 [C]_{12} \{R\}_2$, estes valores, levados à igualdade acima onde $\{r\}_2 = [F]_2 \{R\}_2$, dão:

$$\{R\}_2^T [C]_{12}^T [F]_1 [C]_{12} \{R\}_2 = \{R\}_2^T [F]_2 \{R\}_2.$$

Esta identidade, válida para todos os casos particulares de $\{R\}_2$, exige que se tenha

$$[F]_2 = [C]_{12}^T [F]_1 [C]_{12}$$

(matriz de flexibilidade no novo sistema).

Por tratamento semelhante, obter-se-ia

$$[K]_2 = [C]_{12}^T [K]_1 [C]_{12}$$

(nova matriz de rigidez).

Nota. As expressões obtidas para $[F]$ e $[K]$, na estrutura integrada (Item 6.2), são na realidade casos particulares destas, onde a mudança de coordenadas se faz por meio das matrizes de incidência $[B]$ e $[A]$.

6.3.1. Exemplos

1. Referida ao primeiro sistema de coordenadas (Fig.6.3.1a), a estrutura dessa figura tem a matriz de flexibilidade

$$[F]_1 = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EJ} & -\frac{l}{6EJ} \\ -\frac{l}{6EJ} & \frac{l}{3EJ} \end{bmatrix}$$

Deseja-se obter a matriz de flexibilidade para o segundo sistema de coordenadas (Fig. 6.3.1b).

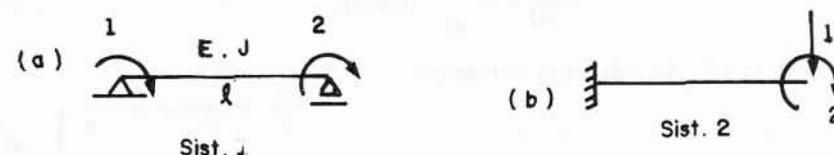


Fig. 6.3.1

A matriz de transformação é:

$$[C]_{12} = \begin{bmatrix} -l & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$[F]_2 = [C]_{12}^T [F]_1 [C]_{12} = \begin{bmatrix} -l & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l^3/3EJ & -l^2/6EJ \\ -l^2/6EJ & l^3/3EJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l^3/3EJ & l^2/2EJ \\ l^2/2EJ & l^3/3EJ \end{bmatrix}$$

(nova matriz de flexibilidade).

A matriz de rigidez, no primeiro sistema, é $[K]_1 = \begin{bmatrix} 4EJ/l & 2EJ/l \\ 2EJ/l & 4EJ/l \end{bmatrix}$.

Vai-se obter a matriz $[K]_2$, no sistema ②.

A matriz de transformação dos deslocamentos é:

$$[C]_{12} = \begin{bmatrix} -1/l & 0 \\ -1/l & 1 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} -1/l & -1/l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4EJ/l & 2EJ/l \\ 2EJ/l & 4EJ/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/l & 0 \\ -1/l & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ -6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{bmatrix}$$

(nova matriz de rigidez).

2. Grelha da Fig. 6.3.2. Barras com seção constante e

$$\frac{GJ_o^*}{EJ} = \frac{1}{\rho} \text{ (dado).}$$

Obter a matriz [F] da estrutura integrada.

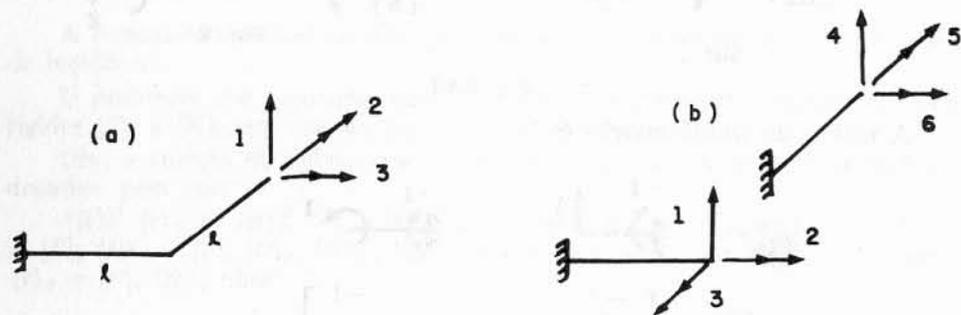


Fig. 6.3.2

Solução

a. Matriz de flexibilidade da estrutura desmembrada:

$$[f] = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 2l^2 & 0 & 3l \\ 0 & 6\rho & 0 \\ 3l & 0 & 6 \\ \hline & & & 2l^2 & 0 & 3l \\ & & & 0 & 6\rho & 0 \\ & & & 3l & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(em cada barra, deslocamentos obtidos para ações unitárias, por um dos métodos usuais).

b. Matriz de incidência (estática):

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Composição de [F] (conjunto):

$$[F] = \sum [B]_i^T [f]_i [B]_i = \frac{l}{6EJ} \left(\begin{bmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2l^2 & 0 & 3l \\ 0 & 6\rho & 0 \\ 3l & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2l^2 & 0 & 3l \\ 0 & 6\rho & 0 \\ 3l & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} l^2(4 + 6\rho) & -3l & l(3 + 6\rho) \\ -3l & 6 & 0 \\ l(3 + 6\rho) & 0 & 6 + 6\rho \end{bmatrix}$$

3. Estrutura da Fig. 6.3.3, na qual metade é rígida ($J \rightarrow \infty$) e a outra metade tem barras de comprimento a , módulo E e inércia J . Obter a matriz de rigidez (coordenadas de referência da Fig. 6.3.3a).

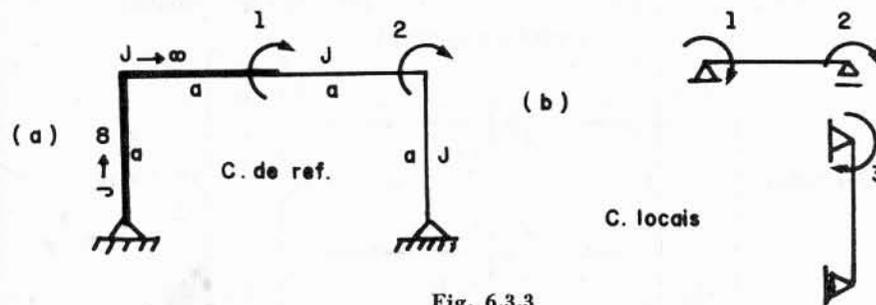


Fig. 6.3.3

Solução. Os elementos com coordenadas locais da Fig. 6.3.3b não incluem as peças com $J \rightarrow \infty$.

a. Matriz de rigidez da estrutura desmembrada:

$$[k] = \frac{EJ}{a} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ \hline & & & & & \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

b. Matriz de incidência (cinemática):

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline & & & & & \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Matriz de rigidez (conjunto):

$$[K] = \sum [A]_i^T [k]_i [A]_i = \frac{EJ}{a} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{EJ}{a} \begin{bmatrix} 31 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

6.4. Resumo das Transformações na Análise Matricial das Estruturas

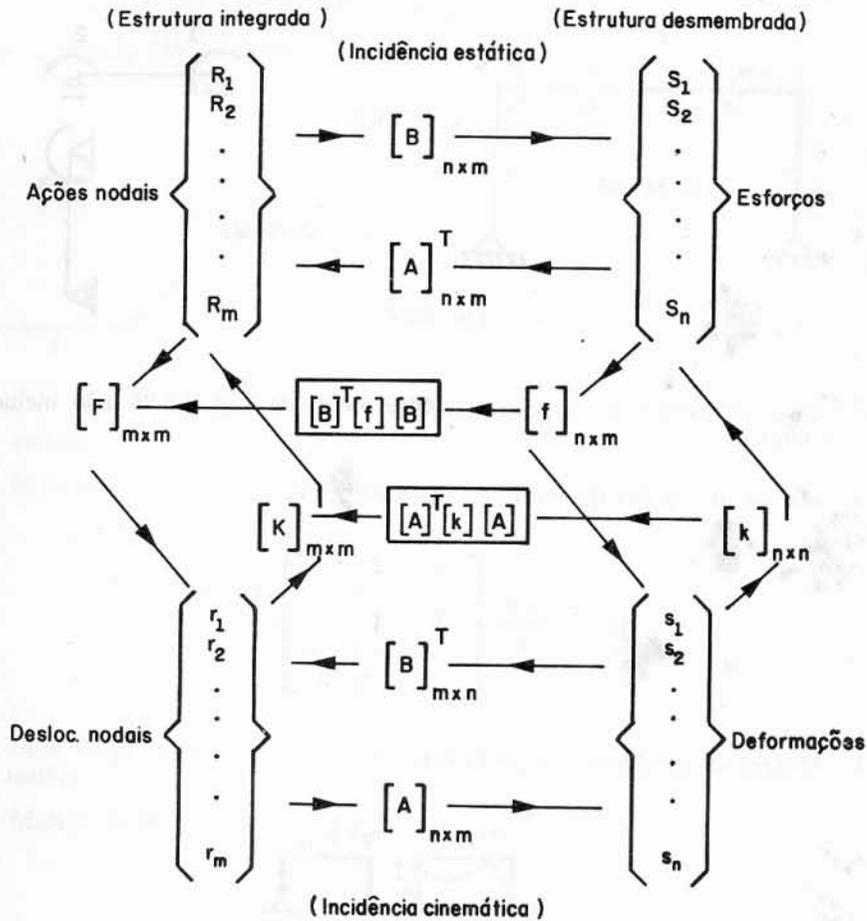


Fig. 6.4.

6.5. Exercícios Propostos

1. Para a viga da Fig. 6.5.1 e o sistema de coordenadas indicado, obtenha diretamente a matriz de flexibilidade e, por inversão, a de rigidez. São supostos conhecidos E, J e l . Considere apenas as deformações por flexão.

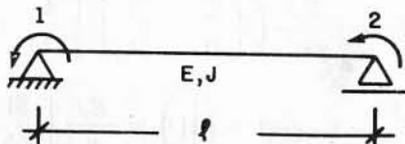


Fig. 6.5.1

6.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Resp. $[F] = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $[K] = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Proceda como no exercício anterior, para a viga da Fig. 6.5.2.

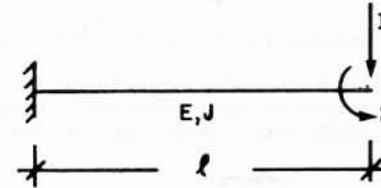


Fig. 6.5.2

Resp. $[F] = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 2l^2 - 3l & \\ -3l & 6 \end{bmatrix}$; $[K] = \frac{2EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l \\ 3l & 2l^2 \end{bmatrix}$.

3. Mesmo enunciado para a estrutura da Fig. 6.5.3. (Sugestão. Utilize o método de Mohr ou o dos trabalhos virtuais.)

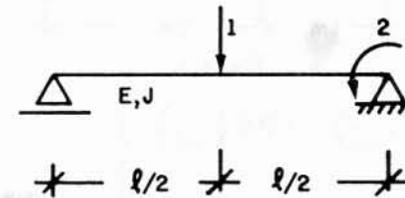


Fig. 6.5.3

Resp. $[F] = \frac{l}{48EJ} \begin{bmatrix} l^2 & 3l \\ 3l & 16 \end{bmatrix}$; $[K] = \frac{48EJ}{7l^3} \begin{bmatrix} 16 & -3l \\ -3l & 16 \end{bmatrix}$.

4. Considerando os efeitos do esforço normal, e admitindo conhecidos E, a e S (seção das 2 barras), obtenha diretamente a matriz de flexibilidade e, por inversão, a de rigidez. Em seguida, obtenha diretamente a matriz de rigidez, considerando deslocamentos impostos.

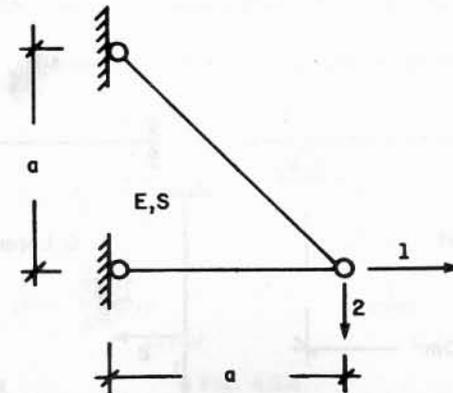


Fig. 6.5.4

Resp. $[F] = \frac{a}{ES} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$; $[K] = \frac{ES}{2\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} 1 + 2\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. O bloco rígido de fundação da Fig. 6.5.5 está apoiado sobre solo elástico, sendo $r = \beta y$ a intensidade da reação distribuída, num ponto em que o afundamento é y . Admite-se que o módulo elástico da fundação seja $\beta = 4000 \frac{t/m}{m} = 4000 t/m^2$. Para o sistema de coordenadas da figura, obtenha diretamente a matriz de rigidez e, por inversão, a de flexibilidade. (Sugestão. A partir de cada deslocamento unitário atribuído ao pólo 0, avaliar a reações do solo e equilibrá-las por meio de ações segundo as 2 coordenadas.)

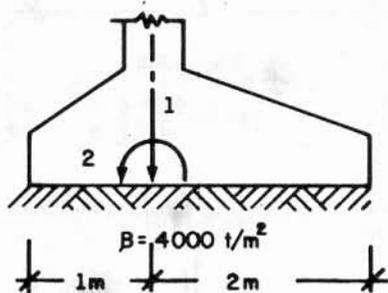


Fig. 6.5.5

Resp. $[K] = \begin{bmatrix} 12000 \left(\frac{t}{m}\right) & -6000 \left(\frac{t}{rad}\right) \\ -6000 \left(\frac{mt}{m}\right) & 12000 \left(\frac{mt}{rad}\right) \end{bmatrix}$;
 $[F] = \begin{bmatrix} 1,111 \times 10^{-4} \left(\frac{m}{t}\right) & 0,555 \left(\frac{m}{mt}\right) \\ 0,555 \times 10^{-4} \left(\frac{rad}{t}\right) & 1,111 \left(\frac{rad}{mt}\right) \end{bmatrix}$.

6. Para a estrutura da Fig. 6.5.6, onde estão assinaladas as coordenadas de referência e as coordenadas locais:

(a) obtenha as matrizes de incidência estática, $[B]$, e cinemática, $[A]$;

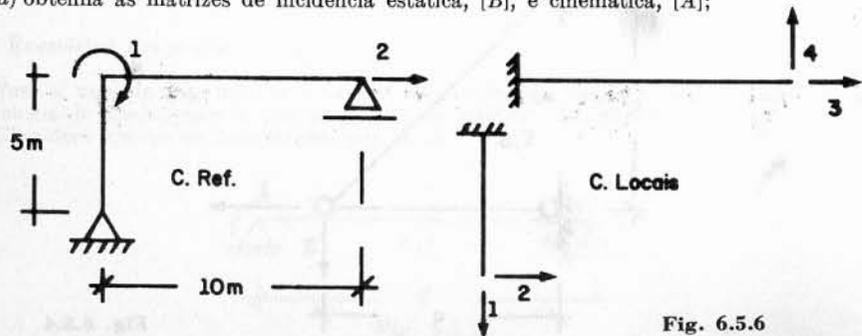


Fig. 6.5.6

(b) constate que $[A]^T [B] = [B]^T [A] = [I]$, embora não se possa afirmar que uma daquelas matrizes seja inversa da transposta da outra (as matrizes não são quadradas).

Resp. $[B] = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0 & -1,0 \\ 0 & 1,0 \\ 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}$; $[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5,0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 10,0 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Obtenha as matrizes de incidência $[B]$ e $[A]$ e verifique que a transposta de cada uma é inversa da outra.

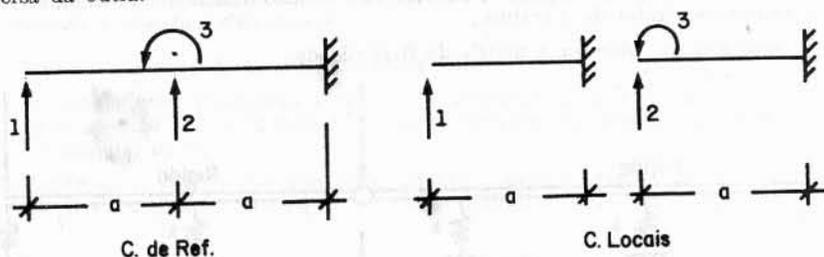


Fig. 6.5.7

Resp. $[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Mesmo enunciado do Exerc. 3.5.7. As partes BC e DF são rígidas.

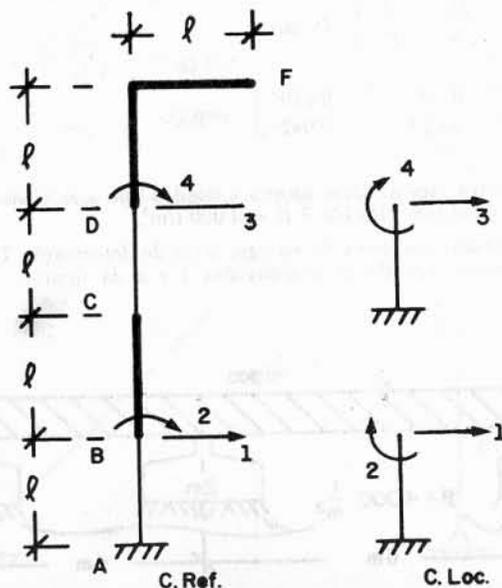


Fig. 6.5.8

$$\text{Resp. } [B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2l & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2l & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Para a estrutura da Fig. 6.5.9, onde as vigas são supostas rígidas e todos os apoios elásticos têm a rigidez $k = 20 \text{ t/cm}$:

- em função de deslocamentos genéricos r_1 e r_2 (segundo as coordenadas de referência indicadas), exprima a energia total de deformação U ;
- pela dupla derivação parcial de U em relação aos deslocamentos r , obtenha os termos da matriz de rigidez da estrutura;
- em consequência, obtenha a matriz de flexibilidade.

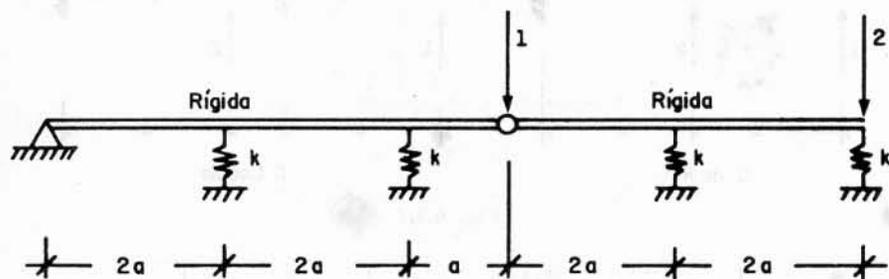


Fig. 6.5.9

$$\text{Resp. (a) } U = 10,5 r_1^2 + 5,0 r_1 r_2 + 12,5 r_2^2 \text{ (cm-t).}$$

$$(b) [K] = \begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix} \text{ (t/cm).}$$

$$(c) [F] = \begin{bmatrix} 0,050 & -0,010 \\ -0,010 & 0,042 \end{bmatrix} \text{ (cm/t).}$$

10. Na fundação em viga rígida sobre blocos apoiados em solo elástico (Fig. 6.5.10), cada bloco tem 2 m e o módulo elástico é $\beta = 4000 \text{ t/m}^2$.

- Obtenha a expressão numérica da energia total de deformação U , em termos de deslocamentos genéricos segundo as coordenadas 1 e 2 da figura.

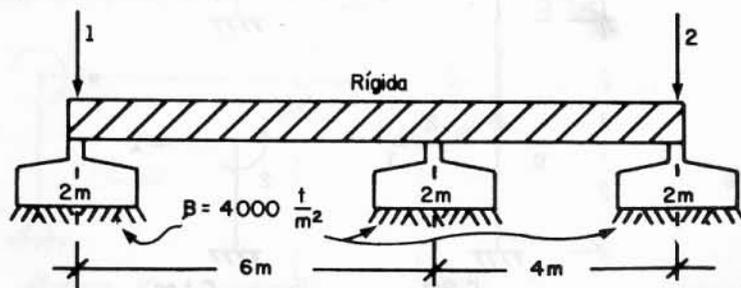


Fig. 6.5.10

- Por derivação parcial, obtenha a matriz de rigidez;
- Confirme a exatidão da matriz obtida, aplicando diretamente deslocamentos unitários.

$$\text{Resp. a) } U = 4640 r_1^2 + 1920 r_1 r_2 + 5440 r_2^2 \text{ (tm);}$$

$$b) \text{ e } c) [K] = \begin{bmatrix} 9280 & 1920 \\ 1920 & 10880 \end{bmatrix} \text{ (t/m).}$$

11. A estrutura da Fig. 6.5.11 tem as coordenadas (de referência e locais) indicadas. A viga horizontal é suposta indeformável.

- Institua a matriz de incidência estática $[B]$;
- Se ocorrer uma diminuição uniforme de temperatura de 20°C nas colunas 1, 2 e 3, sendo $\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$ o coeficiente térmico, determine os deslocamentos vertical de D e horizontal de G ;
- Pedem-se os valores daqueles deslocamentos, quando forem causados exclusivamente por modificações de montagem nos comprimentos das colunas

$$\Delta l_1 = +10^{-3}\text{m}; \quad \Delta l_2 = -2 \times 10^{-3}\text{m}; \quad \Delta l_3 = 0.$$

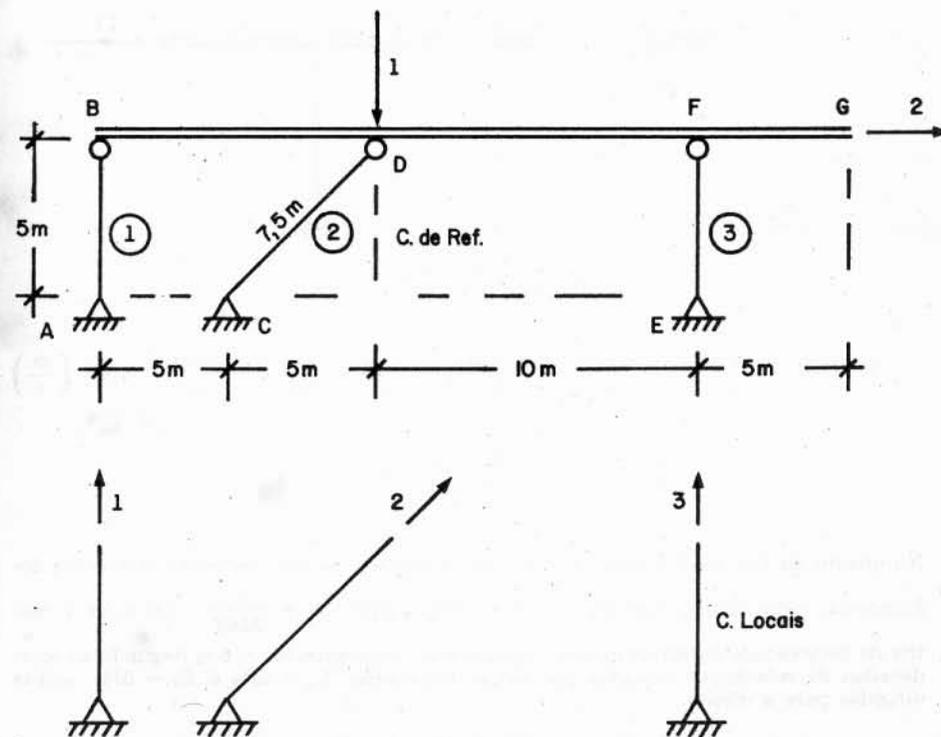


Fig. 6.5.11

Resp. (a) $[B] = \begin{bmatrix} -0,500 & -0,500 \\ 0 & +1,414 \\ -0,500 & -0,500 \end{bmatrix};$

(b) $\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} +10^{-3} \\ -10^{-3} \end{Bmatrix}$ (metros);

(c) $\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} -0,50 \times 10^{-3} \\ -3,33 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$ (metros).

12. A mesma estrutura do Exerc. 6.5.11 é submetida ao carregamento da Fig. 6.5.12. As colunas têm módulo $E = 2 \times 10^7 \text{ t/m}^2$ e $S = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, sendo a sua rigidez $k = \frac{ES}{l}$. Obtenha as matrizes de flexibilidade da estrutura decomposta e da estrutura integrada. Em seguida, para o carregamento da Fig. 6.5.12, calcule os deslocamentos r_1 e r_2 .

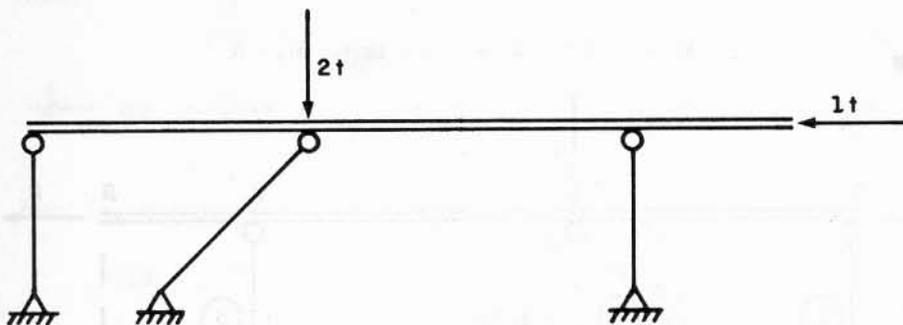


Fig. 6.5.12

Resp. $[f] = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 7,07 & \\ & & 5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \left(\frac{\text{m}}{\text{t}}\right); [F] = \begin{bmatrix} 2,50 & 2,50 \\ 2,50 & 16,64 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \left(\frac{\text{m}}{\text{t}}\right)$

$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +0,0250 \\ -0,1164 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ (m)}.$

13. No quadro da Fig. 6.5.13, além dos dois sólidos rígidos, há seis elementos compostos deformáveis, todos iguais, com coeficiente de flexibilidade $f_{ii} = \frac{a}{24EJ}$. Obtenha a matriz de flexibilidade da estrutura em conjunto e os deslocamentos r_1 e r_2 (segundo as coordenadas de referência) causados por forças horizontais $R_1 = 2P_0$ e $R_2 = 3P_0$, ambas dirigidas para a direita.

Resp. $[F] = \frac{a^3}{1176EJ} \begin{bmatrix} 146 & 73 \\ 73 & 61 \end{bmatrix}; \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,349 \\ 0,280 \end{Bmatrix} \frac{P_0 a^3}{EJ}.$

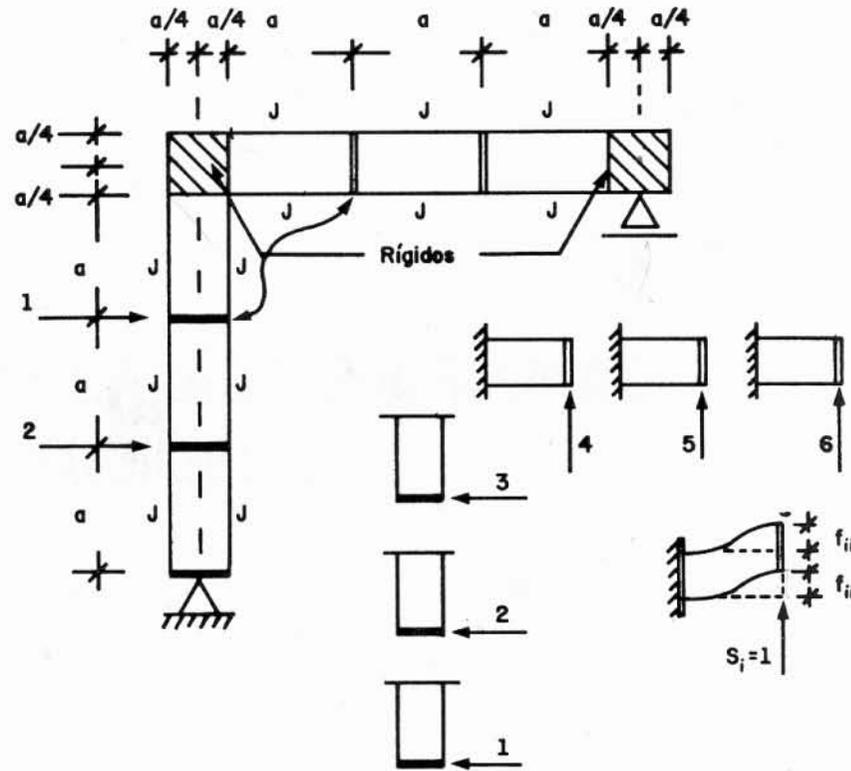


Fig. 6.5.13

2ª Parte

APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO

Método da Flexibilidade (Método das Forças)

7.1. Matriz de Flexibilidade de uma Barra

7.1.1. Mudança de Pólo

Trata-se de transformar um sistema de ações mecânicas $\{R\}$, expresso em coordenadas $1, 2, 3 \dots 6$, com origem em 0 , em um outro conjunto $\{\bar{R}\}$, mecanicamente equivalente, referido a coordenadas $\bar{1}, \bar{2}, \dots \bar{6}$, localizadas em $P(x_1, x_2, x_3)$. Ora, as seis grandezas $R_1, R_2, \dots R_6$ são as componentes dos elementos de redução das ações mecânicas ao pólo 0 , transformado para P , em seguida.

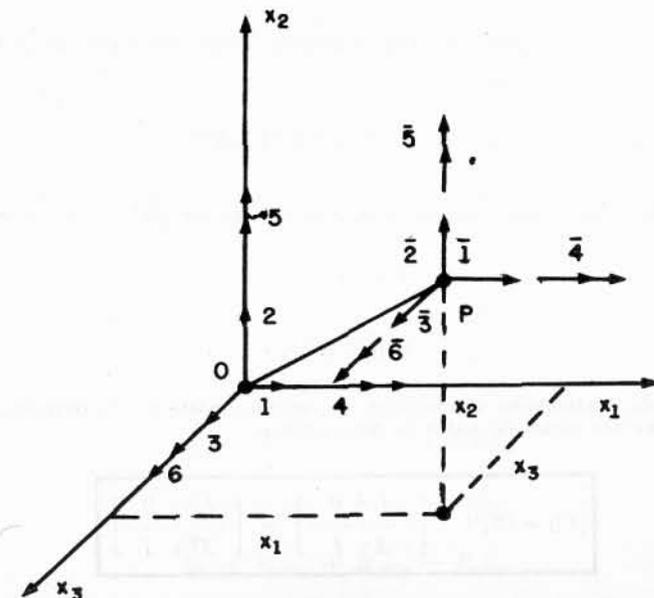


Fig. 7.1.1. Mudança de pólo.

$$\begin{cases} \bar{R}_1 = R_1 \\ \bar{R}_2 = R_2 \\ \bar{R}_3 = R_3 \end{cases} \quad (\text{Componentes da resultante})$$

$$\begin{cases} \bar{R}_4 = R_4 + R_2x_3 - R_3x_2 \\ \bar{R}_5 = R_5 - R_1x_3 + R_3x_1 \\ \bar{R}_6 = R_6 - R_2x_1 + R_1x_2 \end{cases} \quad (\text{Componentes do momento resultante})$$

Sob forma matricial, estas expressões para transformação de ações mecânicas se apresentam assim:

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_4 \\ \bar{R}_5 \\ \bar{R}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_3 - x_2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_1 & | & 0 & 1 & 0 \\ x_2 - x_1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = [T] \{R\}$$

onde $[T] = \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ \hline - & - & - \\ X & | & I \end{bmatrix}$, sendo $X = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix}$.

Observação. Se houver nova translação, passando o pólo para a posição Q , com as novas coordenadas $\bar{1}$, $\bar{2}$ e $\bar{3}$, obter-se-á

$$\{\bar{\bar{R}}\} = [T]_1 \{\bar{R}\} = [T]_1 [T] \{R\}.$$

Ora, se Q coincidir com o ponto inicial 0, deve-se ter sempre $\{\bar{\bar{R}}\} = \{R\}$, donde

$$[T]_1 [T] = [I]$$

e, portanto,

$$[T]_1 = [T]^{-1}.$$

Por outro lado, tratando-se de mudança em sentido oposto ao da primeira, a submatriz X sofrerá inversão dos sinais de todos os seus termos:

$$[T]_1 = [T]^{-1} \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ \hline -X & | & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ \hline X^T & | & I \end{bmatrix}$$

(porque $X^T = -X$, como se pode verificar facilmente).

7.1.2. Transformação de Deslocamentos

Se, para as ações mecânicas, vale a relação $\{\bar{R}\} = [T] \{R\}$, o teorema da contragradência (Clebsch) permite concluir, para os deslocamentos:

$$\{r\} = [T]^T \{\bar{r}\}.$$

Dai vem $\{\bar{r}\} = ([T]^T)^{-1} \{r\} = ([T]^{-1})^T \{r\}$

ou

$$\{\bar{r}\} = \begin{bmatrix} I & | & X \\ \hline - & - & - \\ 0 & | & I \end{bmatrix} \{r\}$$

tendo em vista a expressão já obtida para $[T]^{-1}$.

Resumindo, as seguintes expressões para translação de coordenadas são:

$$\begin{aligned} \{\bar{R}\} &= \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ \hline - & - & - \\ X & | & I \end{bmatrix} \{R\} \\ \{\bar{r}\} &= \begin{bmatrix} I & | & X \\ \hline - & - & - \\ 0 & | & I \end{bmatrix} \{r\}. \end{aligned}$$

7.1.3. Rotação de Eixos

Em certos casos, há necessidade de mudar a posição dos eixos coordenados. Na resolução de uma treliça, por exemplo, há dificuldades decorrentes de as coordenadas gerais (de referência) não terem as mesmas direções das coordenadas locais (orientadas segundo as direções próprias das barras).

A formulação da matriz de incidência e da matriz de flexibilidade ou de rigidez da estrutura integrada será tornada mais simples se houver uma prévia rotação das coordenadas locais. Trata-se de transformar, por rotação, os eixos 1, 2, 3 nos eixos $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$. Seja l_{ij} o co-seno do ângulo que a antiga direção j faz com a nova direção i . Por projeção, tem-se

$$\bar{R}_1 = R_1 l_{11} + R_2 l_{12} + R_3 l_{13}$$

$$\bar{R}_2 = R_1 l_{21} + R_2 l_{22} + R_3 l_{23}$$

$$\bar{R}_3 = R_1 l_{31} + R_2 l_{32} + R_3 l_{33}$$

(e expressões semelhantes para \bar{R}_4 , \bar{R}_5 e \bar{R}_6).

Com formulação matricial, as expressões são:

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_4 \\ \bar{R}_5 \\ \bar{R}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & & & \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & & \\ \hline & & & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ & & & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ & & & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \lambda \end{bmatrix} \{R\}$$

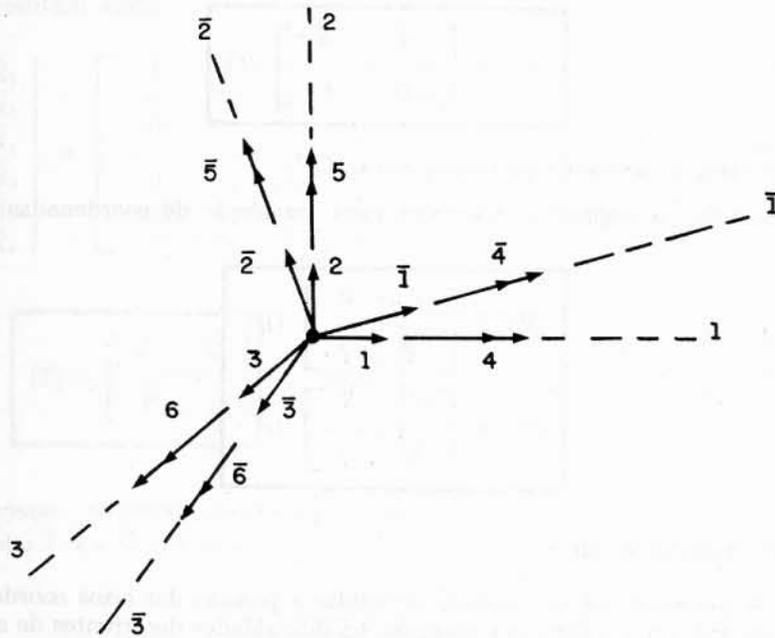


Fig. 7.1.2

ou

$$\{\bar{R}\} = [L] \{R\}, \text{ sendo } [L] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

e

$$\lambda = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

7.1.4. Translação e Rotação

Se ocorrerem translação e rotação, obtém-se:

$$\{R\} = [L][T]\{R\} = [C]\{R\}$$

onde,

$$[C] = [L][T] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \hline X & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \hline \lambda X & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boxed{\{\bar{R}\} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \hline \lambda X & \lambda \end{bmatrix} \{R\}} \quad (\text{transformação de ações nodais}).$$

Para a transformação de deslocamentos, o teorema de Clebsch dá

$$\{r\} = [C]^T \{\bar{r}\} \quad \therefore \quad \{\bar{r}\} = ([C]^T)^{-1} \{r\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} ([C]^T)^{-1} &= ([C]^{-1})^T = ([T]^{-1}[L]^{-1})^T = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ \hline X^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^T & 0 \\ \hline 0 & \lambda^T \end{bmatrix} \right)^T = \\ &= \left(\begin{bmatrix} \lambda^T & 0 \\ \hline X^T \lambda^T & \lambda^T \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda X \\ \hline 0 & \lambda \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

portanto:

$$\boxed{\{\bar{r}\} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda X \\ \hline 0 & \lambda \end{bmatrix} \{r\}}.$$

Resumo:

$$\text{(Translação e rotação)} \quad \begin{cases} \{\bar{R}\} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \hline \lambda X & \lambda \end{bmatrix} \{R\} \\ \{\bar{r}\} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda X \\ \hline 0 & \lambda \end{bmatrix} \{r\} \end{cases}$$

7.1.5. Matriz de Flexibilidade de uma Barra Reta com Seção Constante

Considere-se o eixo 1 coincidindo com o eixo da peça e os eixos 2 e 3 com os eixos principais de inércia da seção reta.

Na Fig. 7.1.3b, vê-se um elemento com coordenadas locais. Existe a relação

$$\{S\}_x = [B]_x \{R\},$$

onde

$$[B]_x = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix}$$

e

$$-X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix}.$$

$$[B]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

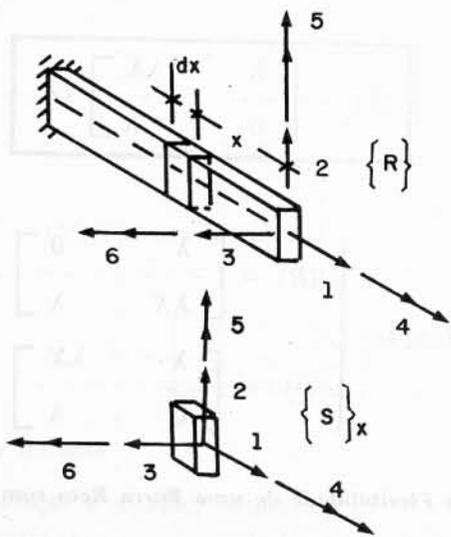


Fig. 7.1.3

A matriz de flexibilidade de um elemento, referida às coordenadas locais, é:

$$[df] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E\Omega} & & & & & \\ & \frac{\chi_2}{G\Omega} & & & & \\ & & \frac{\chi_3}{G\Omega} & & & \\ & & & \frac{1}{GJ_1^*} & & \\ & & & & \frac{1}{EJ_2} & \\ & & & & & \frac{1}{EJ_3} \end{bmatrix} dx.$$

Em coordenadas de referência (válidas para o conjunto da barra), tem-se

$$[dF] = [B]_x^T [df] [B]_x =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{E\Omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\chi_2}{G\Omega} + \frac{x^2}{EJ_3} \right) & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{EJ_3} \\ 0 & 0 & \left(\frac{\chi_3}{G\Omega} + \frac{x^2}{EJ_2} \right) & 0 & -\frac{x}{EJ_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GJ_1^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{x}{EJ_2} & 0 & \frac{1}{EJ_2} & 0 \\ 0 & \frac{x}{EJ_3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EJ_3} \end{bmatrix} dx$$

e por integração entre os limites $x = 0$ e $x = l$:

Nota. J_1^* é o momento de inércia polar da seção reta, com as correções adequadas no caso de seção não circular.

ou

$$[F] = \frac{\Delta x}{2E} \sum_{i=0}^n \frac{K}{J_i} \begin{bmatrix} x_i^2 & x_i \\ x_i & 1 \end{bmatrix}$$

(onde $K = 1$ nos pontos extremos e $K = 2$ nos pontos intermediários).

No caso da fórmula de Simpson, tem-se:

$$[F] = \frac{\Delta x}{3E} \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{J_0} & & & \\ & \frac{4}{J_1} & & \\ & & \frac{2}{J_2} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \frac{4}{J_{n-1}} \\ & & & & & \frac{1}{J_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}$$

2. 2.º sistema de coordenadas (Fig. 7.1.5). Pode-se ter uma solução semelhante:

$$[B]_x = \begin{bmatrix} -\frac{x}{l} & 1 - \frac{x}{l} \end{bmatrix}, [df]_x = \frac{dx}{EJ_x}$$

$$[F] = \int_0^l \begin{bmatrix} -\frac{x}{l} \\ 1 - \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{x}{l} & 1 - \frac{x}{l} \end{bmatrix} \frac{dx}{EJ_x}$$

$$[F] = \frac{1}{E} \int_0^l \begin{bmatrix} \left(\frac{x^2}{l^2}\right) & -\left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} \\ -\left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} & \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} \frac{1}{J_x} dx$$

para J constante, seria

$$[F] = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

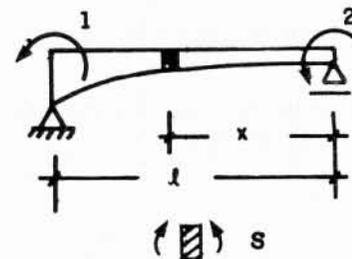


Fig. 7.1.5

Nota. Ao mesmo resultado geral acima poder-se-ia chegar, utilizando a matriz $[F]$ obtida no item 1 e fazendo a transformação estudada para mudança de coordenadas:

$$\text{matriz de transformação: } [C]_{12} = \begin{bmatrix} -1/l & -1/l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} -1/l & 0 \\ -1/l & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{E} \int_0^l \begin{bmatrix} x^2 & x \\ x & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{J_x} dx \right) \begin{bmatrix} -1/l & -1/l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{E} \int_0^l \begin{bmatrix} \left(\frac{x}{l}\right)^2 & -\left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} \\ -\left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} & \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} \frac{1}{J_x} dx$$

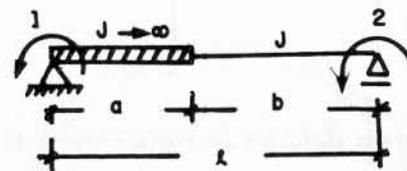
Exemplos1. Barra com $J \rightarrow \infty$ (absolutamente rígida à flexão) no intervalo a com momento de inércia J no resto de seu comprimento.

Fig. 7.1.6

Solução

$$[F] = \frac{1}{EJ} \int_{x=0}^b \begin{bmatrix} \left(\frac{x}{l}\right)^2 & -\left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} \\ -\left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} & \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} dx =$$

$$= \frac{b^2}{6EJl^2} \begin{bmatrix} 2b & 2b - 3l \\ 2b - 3l & 2b - 6l + 6 \frac{l^2}{b} \end{bmatrix}$$

(para $b = l$, recai-se no caso de J constante).

2. Haste com mísica reta em todo seu comprimento. Seção retangular, com a altura d variando de d_0 até $3d_0$.

Solução (por Simpson)

$$d_x = d_0 \left(3 - \frac{2x}{l} \right)$$

$$J_x = J_0 \left(3 - \frac{2x}{l} \right)^3$$

$$[B]_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} \\ -\frac{3}{6} & \frac{3}{6} \\ -\frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; [f] = \frac{l}{18EJ_0} \begin{bmatrix} 0,037 \\ 0,210 \\ 0,157 \\ 0,500 \\ 0,432 \\ 1,680 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nesta última matriz foram incluídos os coeficientes 1,4, 2,4 ... da fórmula de Simpson, bem como o fator multiplicativo $\frac{\Delta x}{3} = \frac{l}{18}$.

$$[F] = [B]_x^T [f] [B]_x$$

$$[F] = \frac{l}{6EJ_0} \begin{bmatrix} 0,836 & -0,167 \\ -0,167 & 0,117 \end{bmatrix}$$

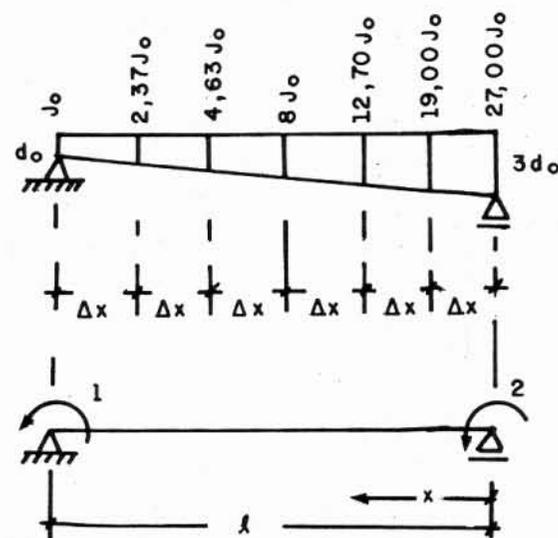


Fig. 7.1.7

7.1.7. Caso de uma Haste Plana Curva com J Variável (Deformações por Flexão)

Mesmo desprezando as deformações pelo esforço normal, há necessidade de 3 coordenadas (Fig. 7.1.8):

$$M_x = S_x = -\frac{l-x}{l} R_1 + \frac{x}{l} R_2 + R_3 y$$

$$\therefore [B]_x = \begin{bmatrix} \left(-\frac{l-x}{l}\right) & \frac{x}{l} & y \end{bmatrix}$$

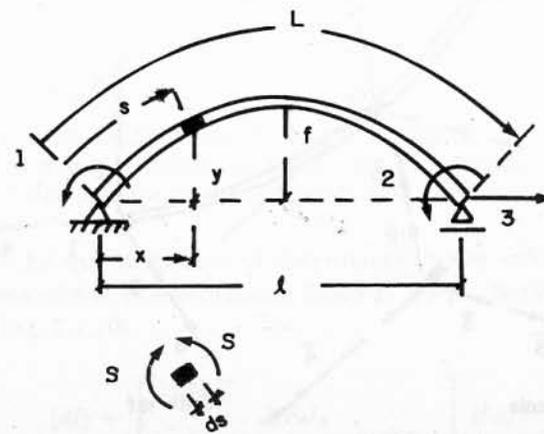


Fig. 7.1.8

Considerando a situação mais freqüente (grande raio de curvatura) é

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{Sx}{EJ_x} \quad \therefore \quad [df]_x = \frac{ds}{EJ_x}$$

$$[F] = [B]_x^T [df]_x [B]_x$$

$$[F] = \int_0^L \frac{1}{EJ_x} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 & -\left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} & -\left(1 - \frac{x}{l}\right) y \\ -\left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} & \frac{x^2}{l^2} & \frac{x}{l} y \\ -\left(1 - \frac{x}{l}\right) y & \frac{x}{l} y & y^2 \end{bmatrix} ds.$$

Observação. Todos os termos poderão ser postos em função de x e do ângulo ϕ , que a tangente à curva em cada ponto faz com o eixo que contém a coordenada n.º 3, pois $ds = \frac{1}{\cos \phi} dx$; com esta mudança de variável, a integração pode ser feita segundo a corda, utilizando-se a fórmula do trapézio ou a de Simpson.

7.1.8. Barra com Curvatura Qualquer, no Espaço

Considere-se um elemento de haste ds , cujas coordenadas locais $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{6}$ não têm direções paralelas às de referência, porque em cada ponto é mais cô-

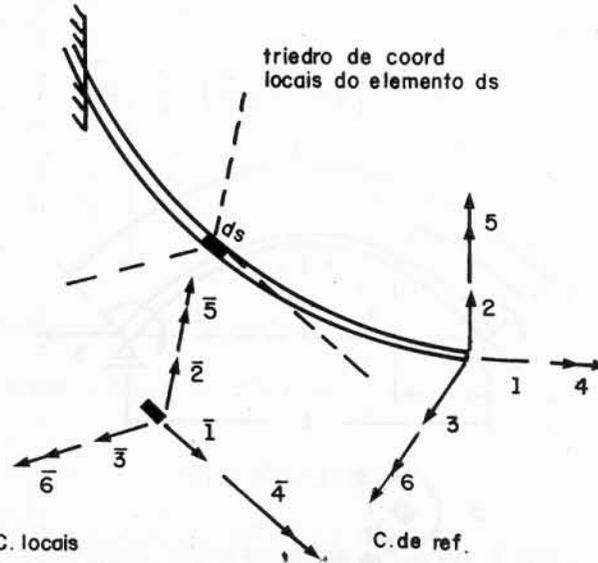


Fig. 7.1.9

modo exprimir a flexibilidade do elemento segundo a tangente à diretriz da haste e os eixos principais de inércia da seção reta.

Se x_1, x_2 e x_3 forem as coordenadas do elemento em relação ao sistema de eixos de referência, situados na extremidade da haste, e l_{ij} for o co-seno diretor do eixo i (local) em relação ao eixo j , de referência, têm-se em cada elemento as matrizes

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [X] = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

que permitem exprimir os esforços

$$\{S\} = [B] \{R\},$$

onde

$$[B] = \begin{bmatrix} \lambda & | & 0 \\ \lambda X & | & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & | & 0 \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & | & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & | & \\ \hline (l_{13}x_2 - l_{12}x_3) & (l_{13}x_1 + l_{11}x_3) & (l_{12}x_1 - l_{11}x_2) & | & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ (l_{23}x_2 - l_{22}x_3) & (l_{21}x_3 - l_{23}x_1) & (l_{22}x_1 - l_{21}x_2) & | & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ (l_{33}x_2 - l_{32}x_3) & (l_{31}x_3 - l_{33}x_1) & (l_{32}x_1 - l_{31}x_2) & | & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

A matriz de flexibilidade de um elemento é:

$$[df] = \begin{bmatrix} 1/E\Omega & & & & & \\ & \chi_2/G\Omega & & & & \\ & & \chi_3/G\Omega & & & \\ & & & 1/GJ_1^* & & \\ & & & & 1/EJ_2 & \\ & & & & & 1/EJ_3 \end{bmatrix} dx.$$

A matriz de flexibilidade da haste será

$$[F] = \int_{s=0}^L [B]^T [df] [B].$$

Exemplo

Obter a matriz de flexibilidade da barra da Fig. 7.1.10, que tem a diretriz circular de raio R e está contida no plano das coordenadas 1 e 3. A barra é uniforme. Computar apenas as deformações por flexão e torção. São dados J_1^*, J_2 e J_3 .

Solução. Se há que desprezar as deformações pelos esforços normal e cortante, não são necessárias as coordenadas locais $\bar{1}, \bar{2}$ e $\bar{3}$. Serão mantidas apenas três ($\bar{4}, \bar{5}$ e $\bar{6}$, Fig. 7.1.10).

$$[df] = \begin{bmatrix} 1/GJ_1^* & & \\ & 1/EJ_2 & \\ & & 1/EJ_3 \end{bmatrix} R d\theta,$$

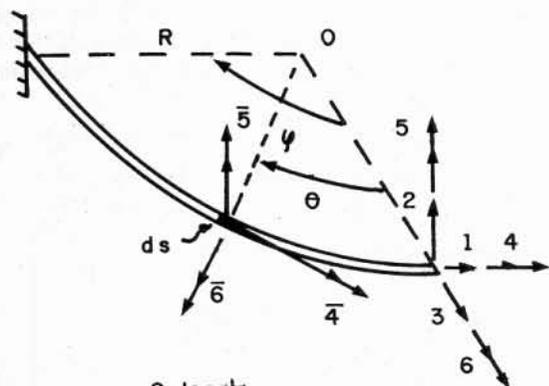


Fig. 7.1.10

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & R(1 - \cos \theta) & 0 & \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ R(1 - \cos \theta) & 0 & -R \text{sen } \theta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & R \text{sen } \theta & 0 & -\text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Integrando e fazendo, no resultado, $\cos \varphi = c$ e $\text{sen } \varphi = s$, tem-se:

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{R^3}{2EJ_2} (3\varphi + 4s + sc) & 0 & -\frac{R^3}{2EJ_2} (1 - c)^2 & 0 & \frac{R^2}{2EJ_2} (3\varphi - 4s + sc) & 0 \\ 0 & \frac{R^3}{2GJ_1} (3\varphi - 4s + sc) + \frac{R^3}{2EJ_3} (\varphi - sc) & 0 & \frac{R^2}{2GJ_1} (2s - \varphi - sc) + \frac{R^2}{2EJ_3} (\varphi - sc) & 0 & -\frac{R^2}{2GJ_1} (1 - c)^2 + \frac{R^2}{2EJ_3} \\ -\frac{R^3}{2EJ_2} (1 - c)^2 & 0 & \frac{R^3}{2EJ_2} (\varphi - sc) & 0 & \frac{R^2}{EJ_2} c & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{2GJ_1} (2s - \varphi - sc) + \frac{R^2}{2EJ_3} (\theta - sc) & 0 & \frac{R}{2GJ_1} (\varphi + sc) + \frac{R}{2EJ_3} (\varphi - sc) & 0 & \frac{R}{2GJ_1} s^2 - \frac{R}{2EJ_3} s^2 \\ \frac{R^2}{2EJ_2} (3\varphi - 4s + sc) & 0 & \frac{R^2}{EJ_2} c & 0 & \frac{R}{EJ_2} \varphi & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{2GJ_1} (1 - c)^2 + \frac{R^2}{2EJ_3} s^2 & 0 & \frac{R}{2GJ_1} s^2 - \frac{R}{2EJ_3} s^2 & 0 & \frac{R}{2GJ_1} (\varphi - sc) + \frac{R}{2EJ_3} (\varphi + sc) \end{bmatrix}$$

Para o caso de ser $\phi = \frac{\pi}{2}$ o ângulo central (quadrante de circunferência), tem-se

$$[F] = \begin{bmatrix} 0,356 \frac{R^3}{EJ_2} & 0 & -0,500 \frac{R^3}{EJ_2} & 0 & 0,356 \frac{R^2}{EJ_2} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0,356 \frac{R^3}{GJ_1} + \\ +0,785 \frac{R^3}{EJ_3} \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} 0,215 \frac{R^2}{GJ_1} - \\ -0,785 \frac{R^2}{EJ_3} \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} 0,500 \frac{R^2}{GJ_1} + \\ +0,500 \frac{R^2}{EJ_3} \end{pmatrix} \\ -0,500 \frac{R^3}{EJ_2} & 0 & 0,500 \frac{R^3}{EJ_2} & 0 & -\frac{R^2}{EJ_2} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0,215 \frac{R^2}{GJ_1} - \\ -0,785 \frac{R^2}{EJ_3} \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} 0,785 \frac{R}{GJ_1} + \\ +0,785 \frac{R}{EJ_3} \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} 0,500 \frac{R}{GJ_1} - \\ -0,500 \frac{R}{EJ_3} \end{pmatrix} \\ 0,356 \frac{R^2}{EJ_2} & 0 & -\frac{R^2}{EJ_2} & 0 & 1,571 \frac{R}{EJ_2} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0,500 \frac{R^2}{GJ_1} + \\ +0,500 \frac{R^2}{EJ_3} \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} 0,500 \frac{R}{GJ_1} - \\ -0,500 \frac{R}{EJ_3} \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} 0,785 \frac{R}{GJ_1} + \\ +0,785 \frac{R}{EJ_3} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

7.1.9. Matrizes de Flexibilidade e de Rigidez de Barras Isoladas de Eixo Retilíneo e Seção Uniforme — Formulário

1. Barra de treliça

$$f_{11} = \frac{l}{ES}$$

$$k_{11} = \frac{ES}{l}$$



Fig. 7.1.11

2. Barra de estrutura plana (sem a consideração do esforço normal)

1.ª hipótese

$$[f] = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 2l^2 & 3l \\ 3l & 6 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

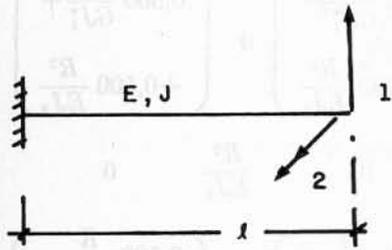


Fig. 7.1.12

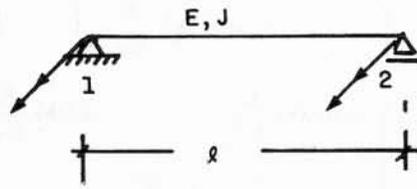


Fig. 7.1.13

2.ª hipótese

$$[f] = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \frac{2EJ}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Barra de estrutura plana (com esforço normal)

1.ª solução

$$[f] = \begin{bmatrix} \frac{l}{ES} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EJ} & \frac{l^2}{2EJ} \\ 0 & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l}{EJ} \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{-6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{-6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

2.ª solução

$$[f] = \begin{bmatrix} \frac{l}{ES} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EJ} & -\frac{l}{6EJ} \\ 0 & -\frac{l}{6EJ} & \frac{l}{3EJ} \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} \\ 0 & \frac{2EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

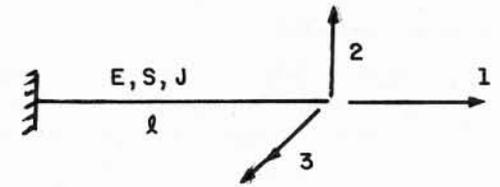


Fig. 7.1.14

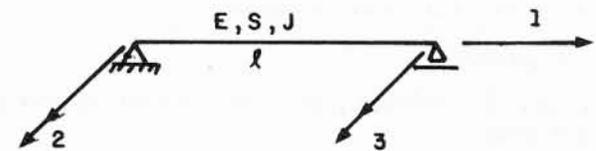


Fig. 7.1.15

4. Barra de grelha (cargas contidas em direções perpendiculares ao plano da estrutura).

Solução

$$[f] = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EJ} & 0 & \frac{l^2}{2EJ} \\ 0 & \frac{l}{GJ^*} & 0 \\ \frac{l^2}{2EJ} & 0 & \frac{l}{EJ} \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{GJ_0^*}{l} & 0 \\ -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

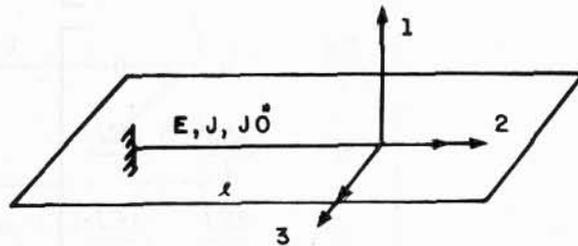


Fig. 7.1.16

7.2. Aplicação às Estruturas Isostáticas

Em estruturas estaticamente determinadas, a passagem das cargas $\{R\}$ aos esforços $\{S\}$ é feita diretamente, utilizando-se as condições de equilíbrio.

O tratamento matricial pode ser empregado para obter os deslocamentos nodais provocados: (1) por forças externas; (2) por variação de temperatura ou modificações de montagem; (3) por movimentos (recalques) de apoios.

7.2.1. Efeitos de Cargas Exteriores Conhecidas

Para obtê-los, é necessário:

- a. Fixar o sistema de *coordenadas de referência* (onde houver ação aplicada ou deslocamento a calcular);
- b. Subdividir a estrutura em *elementos* e estabelecer o sistema de *coordenadas locais* (observar que os esforços em uma mesma barra sejam linearmente independentes; não é necessário destinar coordenadas aos elementos considerados rígidos);
- c. Formular a *matriz de incidência* estática $[B]$, tal que $\{S\} = [B] \{R\}$;
- d. Formular a *matriz de flexibilidade* da *estrutura desmembrada*, cujas submatrizes, referentes aos diversos elementos, se dispõem em banda:

$$[f] = \begin{bmatrix} [f]_I & & & \\ & [f]_{II} & & \\ & & \dots & \\ & & & [f]_n \end{bmatrix};$$

e. Compor a *matriz de flexibilidade da estrutura integrada*

$$[F] = [B]^T [f] [B] = \sum_{i=1}^n [B]_i^T [f]_i [B]_i$$

(onde a forma de somatório é mais comoda);

- f. Tendo em vista o carregamento dado, formular o *vetor das ações nodais*, $\{R\}$;
- g. Calcular os *esforços* $\{S\}$, *deslocamentos* $\{r\}$ e *deformações* $\{s\}$:

$$\{S\} = [B] \{R\}; \quad \{r\} = [F] \{R\} \quad \text{e} \quad \{s\} = [f] \{S\}.$$

Exemplos

1. Para a treliça plana da Fig. 7.2.1a, obter os esforços e os deslocamentos dos nós B e D. E e Ω são comuns a todas as barras.

Solução. Coordenadas na Fig. 7.2.1b.

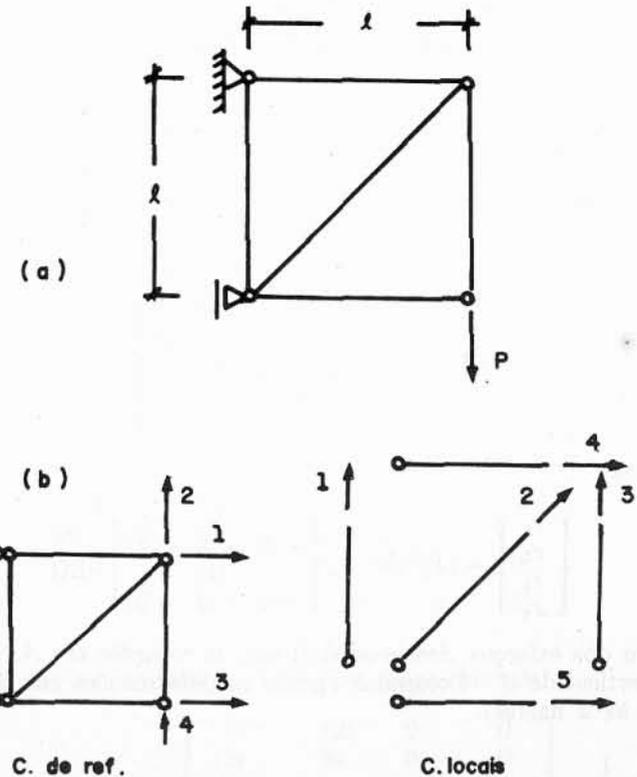


Fig. 7.2.1

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; [f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{l}{E\Omega}$$

Matriz de flexibilidade da estrutura integrada:

$$[F] = \frac{l}{E\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{l}{E\Omega} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & (2 + 2\sqrt{2}) & 0 & (2 + 2\sqrt{2}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & (2 + 2\sqrt{2}) & 0 & (3 + 2\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

Carregamento nodal:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

Esforços:

$$\{S\} = [B] \{R\} = \begin{Bmatrix} -P \\ +\sqrt{2}P \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = [F] \{R\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -(2 + 2\sqrt{2}) \\ 0 \\ -(3 + 2\sqrt{2}) \end{Bmatrix} \frac{Pl}{E\Omega}$$

2. Além dos esforços, deseja-se conhecer as rotações em A, B e C e o deslocamento vertical de C. Computar apenas as deformações por flexão. É dado EJ (comum às 2 hastes).

Solução

a. Transformação de cargas (carregamento nodal equivalente): ver Figs. 7.2.2b e c.

b. Coordenadas: Figs. 7.2.2d e e.

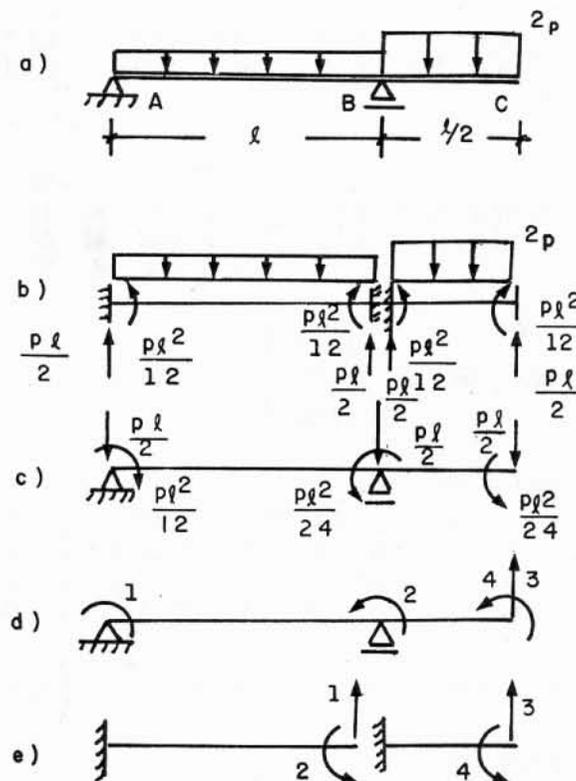


Fig. 7.2.2

c. Matriz de incidência:

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{l} \\ 0 & 1 & l/2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d. Matriz de flexibilidade da estrutura desmembrada:

$$[f] = \begin{bmatrix} 8l^2 & 12l & 0 & 0 \\ 12l & 24 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & l^2 & 3l \\ 0 & 0 & 3l & 12 \end{bmatrix} \frac{l}{24EJ}$$

c. Composição da matriz $[F]$ (por parcelas):

$$[F] = \begin{bmatrix} -1/l & 0 \\ -1/l & 1 \\ -1/2 & l/2 \\ -1/l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8l^2 & 12l \\ 12l & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/l & -1/l & -1/2 & -1/l \\ 0 & 1 & l/2 & 1 \end{bmatrix} \frac{l}{24EJ} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l^2 & 3l \\ 3l & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{l}{24EJ} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2l & -4 \\ -4 & 8 & 4l & 8 \\ -2l & 4l & 3l^2 & 7l \\ -4 & 8 & 7l & 20 \end{bmatrix} \frac{l}{24EJ}$$

f. Cargas nodais: $\{R\} = \begin{Bmatrix} -pl^2/12 \\ pl^2/24 \\ -pl/2 \\ pl^2/24 \end{Bmatrix}$

g. Deslocamentos nodais:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \frac{l}{24EJ} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2l & -4 \\ -4 & 8 & 4l & 8 \\ -2l & 4l & 3l^2 & 7l \\ -4 & 8 & 7l & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -pl^2/12 \\ pl^2/24 \\ -pl/2 \\ pl^2/24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -8 \\ -7l \\ -16 \end{Bmatrix} \frac{l^3}{24EJ}$$

h. Esforços nos elementos, em coordenadas locais. Em um elemento de ordem i , os esforços são

$$\{S\}_i = \{S_0\}_i + [B]_i \{R\}, \text{ onde}$$

$\{S_0\}_i$ são os esforços na hipótese de engastamento perfeito (em coordenadas locais);

$[B]_i$ é a submatriz de incidência correspondente ao elemento i :

$$\{S_0\}_I = \begin{Bmatrix} pl/2 \\ -pl^2/12 \end{Bmatrix} \quad [B]_I = \begin{bmatrix} -1/l & -1/l & -1/l & -1/l \\ 0 & 1 & l/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pl/2 \\ -pl^2/12 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/l & -1/l & -1/l & -1/l \\ 0 & 1 & l/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -pl^2/12 \\ pl^2/24 \\ -pl/2 \\ pl^2/24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{4} pl \\ -\frac{1}{4} pl^2 \end{Bmatrix}$$

Barra BC

$$\{S_0\}_{II} = \begin{Bmatrix} pl/2 \\ -pl^2/24 \end{Bmatrix} \quad [B]_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pl/2 \\ -pl^2/24 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -pl^2/12 \\ pl^2/24 \\ -pl/2 \\ pl^2/24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Observação. As reações A_1 e A_2 também poderiam ser determinadas:

$$\{A\} = \{A_0\} + [C] \{R\}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/l & 1/l & 1/2 & 1/l \\ -1/l & -1/l & -3/2 & -1/l \end{bmatrix} \text{ (matriz de transformação)}$$



Fig. 7.2.3

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pl/2 \\ pl \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/l & 1/l & 1/2 & 1/l \\ -1/l & -1/l & -3/2 & -1/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -pl^2/12 \\ pl^2/24 \\ -pl/2 \\ pl^2/24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pl/4 \\ 7pl/4 \end{Bmatrix}$$

A matriz $[C]$ tem 4 colunas, geradas para os estados de carga $R_1 = 1$; $R_2 = 1$; $R_3 = 1$ e $R_4 = 1$, respectivamente.

7.2.2. Efeitos de Variação de Temperatura e Modificações Iniciais

Em geral, variações de temperatura, modificações de montagem e movimentos (recalques) de apoios provocam o aparecimento de reações, esforços e tensões nas estruturas, mesmo sem a presença de forças exteriores aplicadas.

Se, porém, a estrutura for isostática, aquelas causas fazem surgir deslocamentos, não havendo, entretanto, reações, esforços nem tensões.

De fato, na estrutura estaticamente determinada (como a da Fig. 7.2.4a), se um conjunto de reações satisfaz às condições de equilíbrio, ele será a solução. Ora, atuando uma daquelas causas (temperatura, modificações de montagem ou recalques), a hipótese de serem todas as reações nulas satisfaz às equações de equilíbrio; logo, esta é a verdadeira solução.

O mesmo raciocínio não seria aplicável a uma estrutura hiperestática: um conjunto de reações satisfazendo às equações de equilíbrio não é necessariamente solução. No caso da Fig. 7.2.4b, para qualquer valor de R (inclusive zero), as reações R , $-2R$ e R satisfazem às condições de equilíbrio, só sendo solução um conjunto de reações: aquele que verificar também as equações de compatibilidade elástica. Logo, numa estrutura hiperestática naquelas condições pode haver reações, sem haver forças aplicadas.

A. Deformações de uma barra por efeito térmico. Sejam:

— t_s — a variação de temperatura na face superior (em relação à temperatura de montagem);

— t_i — a variação na face inferior ou interna;

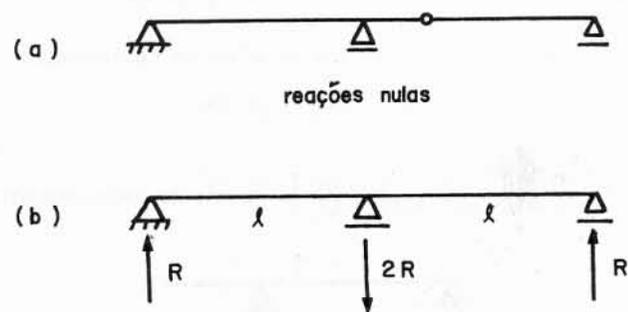


Fig. 7.2.4

— t_o — a variação no centro de gravidade da seção (diagrama de variações Fig. 7.2.5b);

— α — o coeficiente de dilatação térmica.

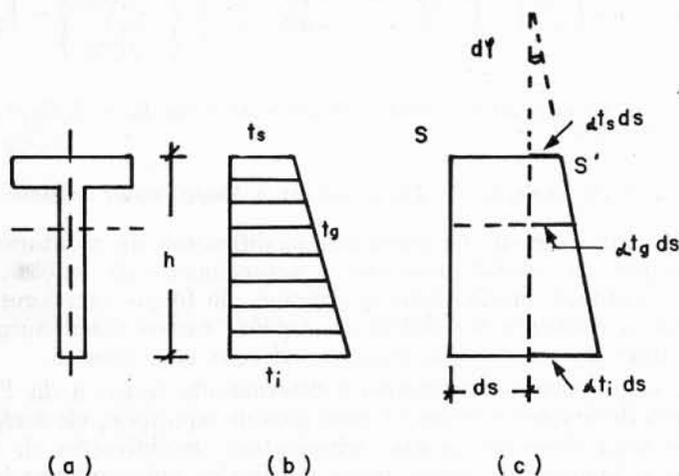


Fig. 7.2.5

Um elemento da peça, de comprimento ds , sofre as deformações mostradas na Fig. 7.2.5c. Das 6 componentes de deformação, só há portanto:

a. deformação axial $\alpha t_g ds$;

b. rotação $d\varphi$ entre as seções extremas,

$$d\varphi = \frac{\alpha t_i ds - \alpha t_s ds}{h} = \frac{\alpha(t_i - t_s)}{h} ds = \alpha \frac{\Delta t}{h} ds,$$

onde

$$\Delta t = t_i - t_s.$$

B. Caso de uma barra reta

1.º sistema de coordenadas (Fig. 7.2.6). Ao elemento dx correspondem as deformações térmicas

$$\begin{Bmatrix} d\bar{s}_1 \\ d\bar{s}_2 \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} \alpha t_g dx \\ \alpha \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot dx \end{Bmatrix}.$$

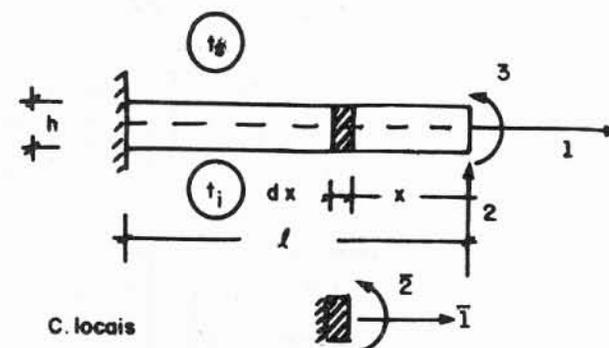


Fig. 7.2.6

A matriz de incidência (submatriz referente ao elemento dx) é:

$$[B]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}.$$

Os deslocamentos da extremidade da barra são obtidos pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\{ds\}_t = [B]_x^T \{d\bar{s}\}_t,$$

$$\begin{Bmatrix} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \end{Bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha t_g dx \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} dx \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}_t = \int_0^l \begin{Bmatrix} \alpha t_g \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} x \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \alpha t_g l \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} l \end{Bmatrix}.$$

Logo:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \operatorname{tg} l \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} l \end{Bmatrix}$$

2.º sistema de coordenadas (Fig. 7.2.7)

$$[B]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x/l & (l-x)/l \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}_t = \int_0^l \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -x/l \\ 0 & (l-x)/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \operatorname{tg} \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \end{Bmatrix} dx$$

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} \alpha \operatorname{tg} l \\ -\alpha \frac{\Delta t}{2h} l \\ \alpha \frac{\Delta t}{2h} l \end{Bmatrix}$$

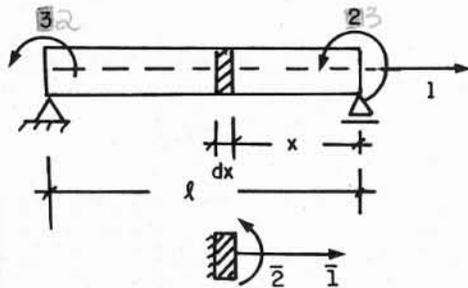


Fig. 7.2.7

Observação. As deformações térmicas no 2.º sistema de coordenadas poderiam ser obtidas diretamente, a partir dos resultados do primeiro:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & -1/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix}_2$$

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 0 \\ 0 & -1/l & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \operatorname{tg} l \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \operatorname{tg} l \\ -\alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} \end{Bmatrix}$$

C. Barra plana qualquer com seção de altura constante h (Fig. 7.2.8)

$$[B] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi & 0 \\ y & x & 1 \end{bmatrix}$$

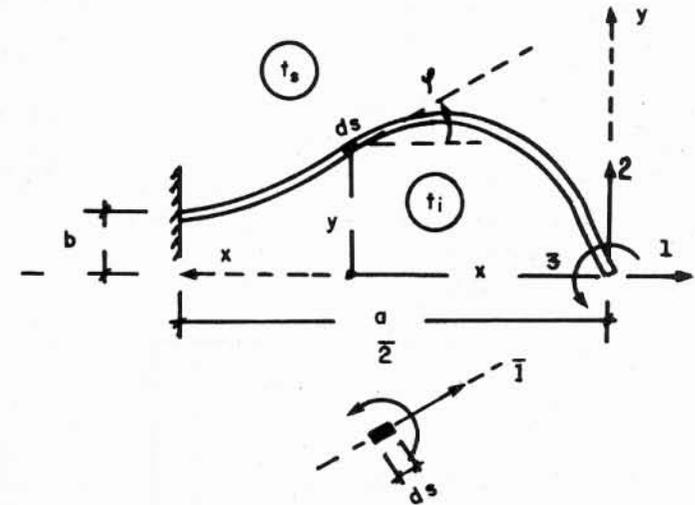


Fig. 7.2.8

As deformações térmicas do elemento genérico são:

$$\begin{Bmatrix} d\bar{s}_1 \\ d\bar{s}_2 \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} \alpha t_o ds \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} ds \end{Bmatrix}$$

Os deslocamentos da extremidade da barra são:

$$\{s\} = \int_0^L [B]^T \{d\bar{s}\} \quad (L \text{ é o comprimento da barra})$$

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} \left(\alpha \operatorname{tg} \int_0^L \cos \varphi \, ds + \alpha \frac{\Delta t}{h} \int_0^L y \, ds \right) \\ \left(\alpha \operatorname{tg} \int_0^L \operatorname{sen} \varphi \, ds + \alpha \frac{\Delta t}{h} \int_0^L x \, ds \right) \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \int_0^L ds \end{Bmatrix}$$

Sendo m_1 e m_2 os momentos estáticos da linha formada pelo eixo da barra, em relação aos eixos 1 (ou x) e 2 (ou y), respectivamente, e a e b as projeções da barra sobre aqueles eixos, tem-se:

$$\int_0^L \cos \varphi \, ds = a, \quad \int_0^L \operatorname{sen} \varphi \, ds = b,$$

$$\int_0^L x \, ds = m_2, \quad \int_0^L y \, ds = m_1, \quad \int_0^L ds = L.$$

Logo:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} \alpha \operatorname{tg} a + \alpha \frac{\Delta t}{h} m_1 \\ \alpha \operatorname{tg} b + \alpha \frac{\Delta t}{h} m_2 \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} L \end{Bmatrix}$$

Estas expressões resolvem, como caso particular, o da barra reta já visto.

Observação: O resultado acima mostra que, se a variação de temperatura for uniforme ($t_i = t_s = t_v$, $\Delta t = 0$), tem-se

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} \alpha \operatorname{tg} a \\ \alpha \operatorname{tg} b \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(Neste caso, mantidas as extremidades A e B , as deformações s_1, s_2, s_3 independem da forma da barra.)

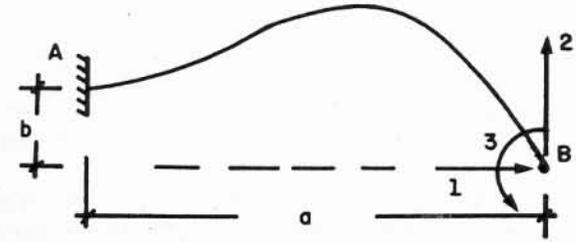


Fig. 7.2.9

Exemplo

Se a barra tiver forma de semicircunferência de raio R (Fig. 7.2.10) e for submetida a variações de temperatura t_s , t_i e t_v , tem-se:

$$a = 4 \, \text{m}, \quad b = 0, \quad L = \pi R = 4\pi \, (\text{m});$$

$$m_1 = \pi R \cdot \frac{2R}{\pi} = 2R^2 = 8 \, (\text{m}^2);$$

$$m_2 = \pi R \cdot R = \pi R^2 = 12,56 \, (\text{m}^2).$$

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} \alpha \operatorname{tg} \cdot 2R + \alpha \frac{\Delta t}{h} \cdot 2R^2 \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \cdot \pi R^2 \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \pi R \end{Bmatrix}$$

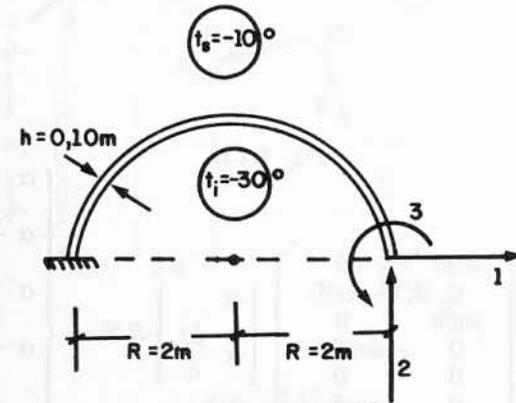


Fig. 7.2.10

No presente caso, $t_v = \frac{-10 + (-30)}{2} = -20^\circ\text{C}$

$\Delta t = -30 - (-10) = -20^\circ\text{C}$, o que dá (para $\alpha = 10^{-5}$):

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} -1680 \\ -2512 \\ -1256 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} = \begin{Bmatrix} -1,68 \times 10^{-2}\text{m} \\ -2,51 \times 10^{-2}\text{m} \\ -1,26 \times 10^{-2}\text{rad} \end{Bmatrix}$$

D. Barra circular de grelha, com seção reta de altura h . Variações de temperatura t_s (face superior), t_i (face inferior) e t_o (na fibra do centro de gravidade da seção).

$$[B] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R(1-\cos\theta) & 0 & -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} d\bar{s}_1 \\ d\bar{s}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha t_o ds \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} ds \end{Bmatrix}$$

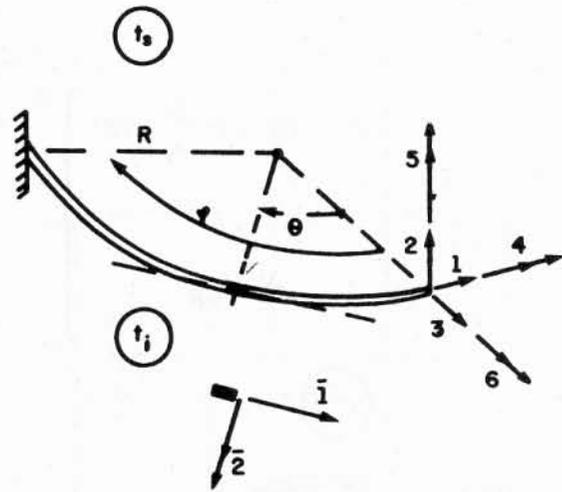


Fig. 7.2.11

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{Bmatrix}_t = \int_0^\varphi \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & R(1-\cos\theta) \\ \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \end{Bmatrix} R d\theta = \begin{Bmatrix} \alpha t_o R \text{sen } \varphi \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} R^2 (\varphi - \text{sen } \varphi) \\ \alpha t_o R (1 - \cos \varphi) \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} R (\cos \varphi - 1) \\ 0 \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} R \text{sen } \varphi \end{Bmatrix}$$

Nota. Para $\Delta t = 0$, valem as conclusões anteriores (a forma da barra não influi).

E. Deslocamentos nodais de uma estrutura isostática, por variação de temperatura ou modificação de montagem. A seqüência de operações a realizar é:

1. formular a matriz de incidência $[B]$;
2. obter o vetor das deformações $\{s\}_t$ (temperatura) ou $\{s\}_m$ (dado do problema, no caso das modificações de montagem), em coordenadas locais;
3. os deslocamentos são:

$$\{r\}_t = [B]^T \{s\}_t \quad \text{ou} \quad \{r\}_m = [B]^T \{s\}_m$$

Exemplos

1. Estrutura da Fig. 7.2.12

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

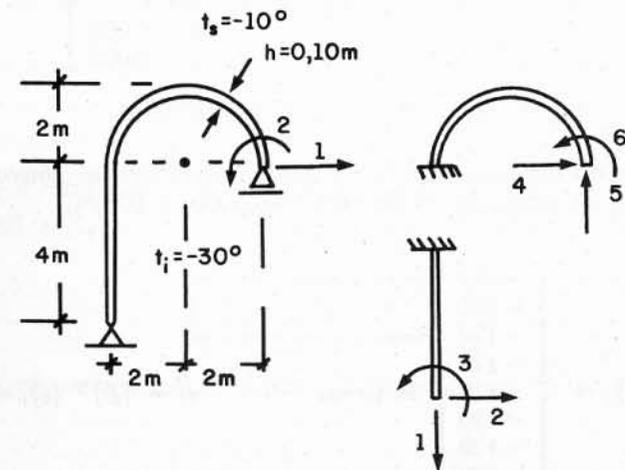


Fig. 7.2.12

As deformações da barra curva foram determinadas na aplicação anterior (Fig. 7.2.10). As da barra reta são:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} \alpha t_0 l \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,8 \times 10^{-3} \text{m} \\ -16,0 \times 10^{-3} \text{m} \\ -0,8 \times 10^{-3} \text{rad} \end{Bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}_t = \begin{bmatrix} -3 & & & & & \\ & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & -1/4 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,8 \\ -16,0 \\ -8,0 \\ -16,8 \\ -25,1 \\ -12,6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -26,7 \times 10^{-3} \text{m} \\ -6,1 \times 10^{-3} \text{rad} \end{Bmatrix}$$

2. Na viga armada isostática (viga Langer) da Fig. 7.2.13, os tirantes CA, AB e BD foram encurtados de 0,002 m. Obter, em coordenadas de referência (Fig. 7.2.13a), o deslocamento nodal r_1 .

Solução

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ +1,414 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{s\}_m = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,002 \\ -0,002 \end{Bmatrix}$$

$$r_1 = \{B\}^T \{s\}_m = -0,00766 \text{ m.}$$

3. Cálculo do deslocamento r_1 na mesma estrutura, se houver uma diminuição uniforme de temperatura de 30°C (sendo $\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$).

$$\{s\}_t = \begin{Bmatrix} -120 \\ -120 \\ -120 \\ -120 \\ -170 \\ -120 \\ -120 \\ -170 \\ -240 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \text{m} \quad \therefore \quad r_1 = \{B\}^T \{s\}_t = 0.$$

(Este resultado já era de se esperar, visto que a estrutura diminui numa certa escala sem que haja movimentos relativos.)

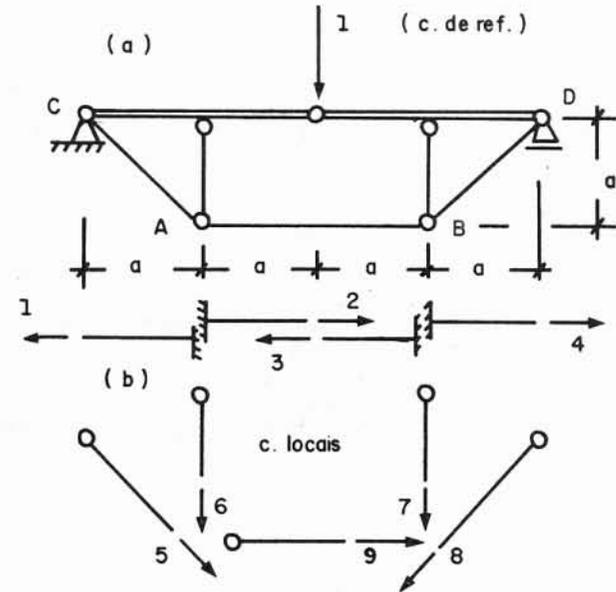


Fig. 7.2.13

7.2.3. Movimentos de Apoios (Recalques) e sua Repercussão nos Deslocamentos Nodais

Se forem estabelecidos dois sistemas de coordenadas de referência (um para as ações nodais aplicadas $\{R\}$ e outro para as reações de apoio $\{A\}$), os dois conjuntos de grandezas se equilibram. Logo $\{R\}$ é mecanicamente equivalente a $-\{A\}$.

Se $[C]$ for a matriz que transforma as ações $\{R\}$ em reações $\{A\}$,

$$\{A\} = [C] \{R\}$$

(A matriz $[C]$ é formulada como as matrizes de incidência estática $[B]$).

Sendo $\{R\}$ equivalente a $-\{A\}$, o teorema de Clebsh permite escrever

$$\boxed{\{r\} = -[C]^T \{a\}}$$

onde $\{r\}$ são os deslocamentos nodais compatíveis com os deslocamentos dos apoios $\{a\}$.

Exemplos

Suponha-se que na estrutura isostática da Fig. 7.2.14a ocorrem os seguintes movimentos de apoios: de E, recalque vertical de 2 mm; de F, recalque horizontal, para a direita, de 5 mm. Obter os deslocamentos nodais (coordenadas de referência na Fig. a).

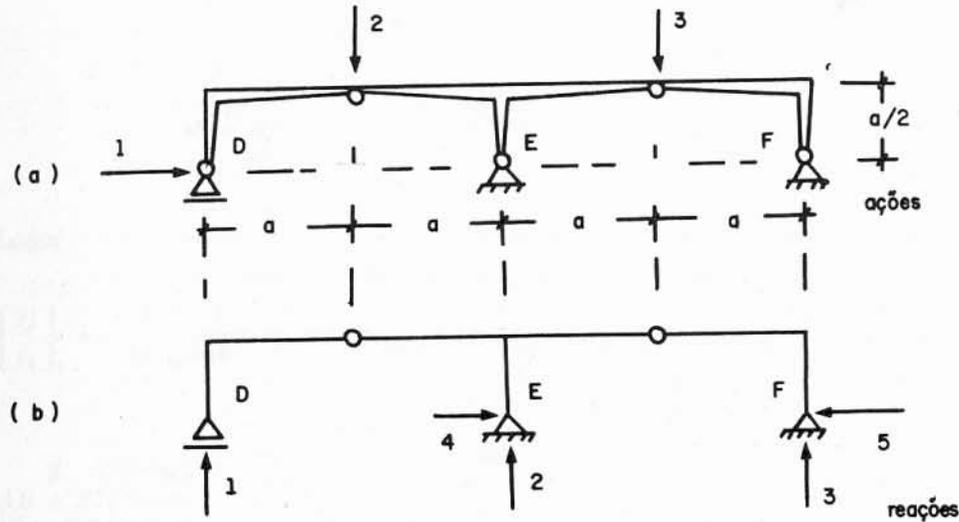


Fig. 7.2.14

Solução. A Fig. 7.2.14b apresenta coordenadas para as reações e recalques. A matriz de transformação é:

$$[C] = \begin{bmatrix} (R_1 = 1) & (R_2 = 1) & (R_3 = 1) \\ 0,5 & 0 & 0 \\ -1,0 & 1,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & -1,0 & 1,0 \\ 1,0 & -1,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

No segundo sistema de coordenadas (Fig. b), os recalques se exprimem pelo vetor:

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,002 \\ 0 \\ 0 \\ -0,005 \end{Bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = -[C]^T \{a\} = \begin{Bmatrix} 0,003 \text{ m} \\ -0,002 \text{ m} \\ 0,006 \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Note-se que, por serem deslocamentos rígidos, este é na realidade um problema de Cinemática, resolvido pela Estática.

7.3. Aplicação às Estruturas Hiperestáticas com Cargas Exteriores

Neste caso, a matriz de incidência [B] não pode ser formulada diretamente a partir das equações de equilíbrio, porque há indeterminação estática, caracterizada pelo grau hiperestático *g* (excesso do número de incógnitas sobre o número de equações da Mecânica).

A formulação de [B], que permitirá associar os elementos e resolver a estrutura, só será possível se instituídas outras condições.

Para obtê-las, transforma-se a estrutura dada, rompendo vínculos em número igual a *g*, de sorte a recair em uma estrutura isostática (sistema principal, sistema básico ou de referência). Neste sistema, será sempre possível formular a matriz de incidência [B] segundo a Isostática.

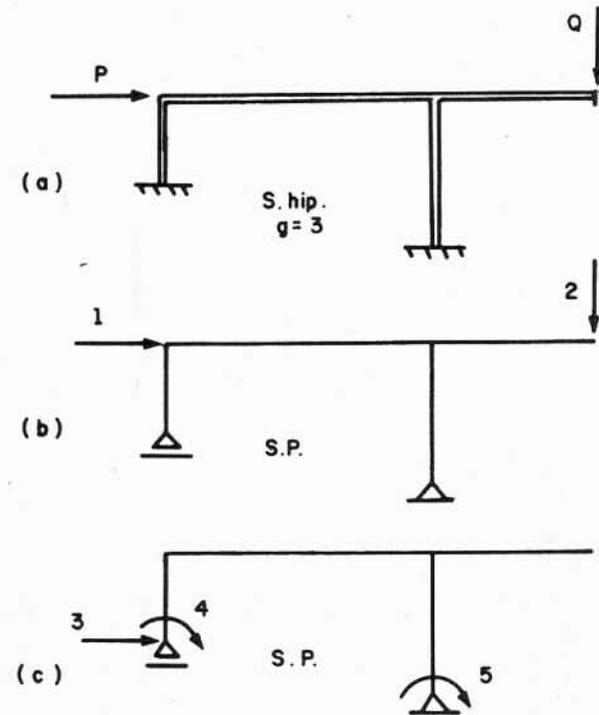


Fig. 7.3.1

Embora diferente da estrutura dada, o sistema principal será tornado compatível com ela, mediante a aplicação de ações mecânicas {X} — grandezas hiperestáticas ou hiperestáticos — nos locais e direções onde houve cortes de vínculos. A compatibilidade entre o sistema principal e a estrutura dada proporciona *g* condições, por serem nulos os deslocamentos {x} segundo as direções dos hiperestáticos {X}. Estas equações de coerência ou equações de elasticidade permitem determinar {X} e daí obter esforços, reações, deslocamentos etc.

A. Escolhido o sistema principal (Figs. 7.3.1b e c), reservam-se coordenadas

de referência para as ações externas $\{R\}$ (Fig. b) e para os hiperestáticos $\{X\}$ (Fig. c).

No sistema principal, podem ser considerados agora 2 vetores:

Ações exteriores e grandezas hiperestáticas $\left\{ \begin{matrix} R \\ X \end{matrix} \right\}$; Deslocamentos $\left\{ \begin{matrix} r \\ x \end{matrix} \right\}$. (No caso da figura são R_1, R_2, X_3, X_4 e X_5 e r_1, r_2, x_3, x_4 e x_5 .)

B. Fixadas as coordenadas locais para a estrutura decomposta, formula-se a matriz de incidência $[\bar{B}]$, relativa ao sistema principal. Esta matriz transforma ações R_i e X_j em esforços S_m . Portanto, tem submatrizes:

$$[\bar{B}] = \left[\begin{array}{c|c} [\bar{B}_0] & [\bar{B}_1] \end{array} \right]$$

onde $[\bar{B}_0]$ transforma ações em esforços $\{S_0\} = [\bar{B}_0] \{R\}$ e $[\bar{B}_1]$ transforma hiperestáticos em esforços $\{S_1\} = [\bar{B}_1] \{X\}$.

No total: $\{S\} = [\bar{B}_0] \{R\} + [\bar{B}_1] \{X\}$ ou

$$\{S\} = \left[\begin{array}{c|c} [\bar{B}_0] & [\bar{B}_1] \end{array} \right] \left\{ \begin{matrix} R \\ X \end{matrix} \right\}$$

C. Formulada a matriz de flexibilidade para a estrutura desmembrada, $[f]$, será possível compor a matriz de flexibilidade $[\bar{F}]$, do sistema principal integrado

$$[\bar{F}] = [\bar{B}]^T [f] [\bar{B}] = \left[\begin{array}{c|c} [\bar{B}_0^T] & [\bar{B}_1^T] \end{array} \right] [f] \left\{ \begin{matrix} [\bar{B}_0] \\ [\bar{B}_1] \end{matrix} \right\}$$

ou

$$[\bar{F}] = \left[\begin{array}{c|c} [\bar{B}_0^T] [f] [\bar{B}_0] & [\bar{B}_0^T] [f] [\bar{B}_1] \\ \hline [\bar{B}_1^T] [f] [\bar{B}_0] & [\bar{B}_1^T] [f] [\bar{B}_1] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} [\bar{F}_{00}] & [\bar{F}_{01}] \\ \hline [\bar{F}_{10}] & [\bar{F}_{11}] \end{array} \right]$$

onde

$[\bar{F}_{00}] = [\bar{B}_0^T] [f] [\bar{B}_0] =$ submatriz que dá os deslocamentos na direção dos R , causados pelos R , unitários;

$[\bar{F}_{01}] = [\bar{B}_0^T] [f] [\bar{B}_1] =$ submatriz que dá os deslocamentos na direção das ações R_i , causados pelos hiperestáticos X_j , unitários;

$[\bar{F}_{10}] = [\bar{B}_1^T] [f] [\bar{B}_0] =$ submatriz que dá os deslocamentos na direção dos hiperestáticos, causados pelas ações R_j , unitárias;

$[\bar{F}_{11}] = [\bar{B}_1^T] [f] [\bar{B}_1] =$ submatriz que dá os deslocamentos segundo as direções dos hiperestáticos X_i , causados pelos X_j , unitários.

Observações:

1. As formas quadráticas que definem $[\bar{F}_{00}]$ e $[\bar{F}_{11}]$ mostram que estas matrizes são quadradas e simétricas.

2. As matrizes $[\bar{F}_{10}]$ e $[\bar{F}_{01}]$ são retangulares e uma delas é a transposta da outra, como se pode verificar.

D. Os deslocamentos do sistema principal são:

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ x \end{matrix} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} [\bar{F}_{00}] & [\bar{F}_{01}] \\ \hline [\bar{F}_{10}] & [\bar{F}_{11}] \end{array} \right] \left\{ \begin{matrix} R \\ X \end{matrix} \right\}$$

E. Desses deslocamentos, sabe-se que $\{x\} = \{0\}$ (são nulos os deslocamentos na direção dos hiperestáticos, pois na estrutura original tais deslocamentos não existem). Logo, as equações de elasticidade são

$$[\bar{F}_{10}] \{R\} + [\bar{F}_{11}] \{X\} = \{0\}.$$

F. Para resolver, multipliquem-se os 2 membros por $[\bar{F}_{11}]^{-1}$, depois de passar o termo $[\bar{F}_{10}] \{R\}$ para o segundo membro:

$$\{X\} = -[\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{F}_{10}] \{R\}$$

(Aqui os hiperestáticos aparecem em função das cargas).

Como se vê, a matriz $[\bar{F}_{11}]$ tem de ser invertida.

G. Expressão dos esforços — Matriz $[B]$ para a estrutura hiperestática

$$\{S\} = [\bar{B}_0] \{R\} + [\bar{B}_1] \{X\}$$

ou, tendo em vista a expressão de $\{X\}$:

$$\{S\} = [\bar{B}_0] \{R\} - [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{F}_{10}] \{R\}$$

ou, ainda

$$\{S\} = ([\bar{B}_0] - [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{F}_{10}]) \{R\}$$

ou, considerando a analogia com $\{S\} = [B] \{R\}$:

$$[\bar{B}] = [\bar{B}_0] - [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{F}_{10}]$$

Matriz de incidência para a estrutura hiperestática.

Portanto, $\{S\} = [B] \{R\}$, onde $[B]$ tem a expressão acima.

Nota. Se há cargas não nodais transformadas em carregamento nodal equivalente, a resolução é feita considerando-se este último, e os esforços serão: $\{S\} = \{S_0\} + [B] \{R\}$, onde $[B]$ tem a expressão acima e $\{S_0\}$ são os esforços de engastamento perfeito.

H. Deslocamentos nodais da estrutura

Das equações do item D sai

$$\{r\} = [\bar{F}_{00}] \{R\} + [\bar{F}_{10}]^T \{X\}$$

ou

$$\{r\} = ([\bar{F}_{00}] - [\bar{F}_{10}]^T [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{F}_{10}]) \{R\}.$$

Logo, a matriz de flexibilidade da estrutura hiperestática é

$$[F] = [\bar{F}_{00}] - [\bar{F}_{10}]^T [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{F}_{10}].$$

7.3.1. Exemplos

1. Resolver a estrutura da Fig. 7.3.2. E e J são comuns às duas hastes.

Solução. Transformado o carregamento (Fig. 7.3.2), a consideração de que a estrutura dada tem grau hiperestático $g = 2$ impõe a escolha de um sistema principal (Fig. b), a ser obtido rompendo 2 vínculos — no presente caso por meio de articulações em A e B .

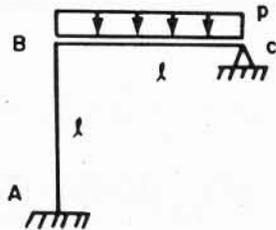


Fig. 7.3.2

As coordenadas de referência (Fig. b) são duas para o carregamento e duas para os hiperestáticos (R_1, R_2, X_3, X_4). Note-se que o hiperestático X_4 compõe-se de 2 momentos opostos e iguais.

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} & (\bar{B}_0) & & (\bar{B}_1) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[f] = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

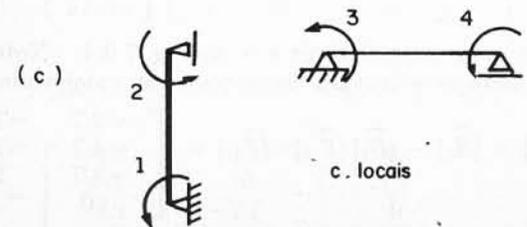
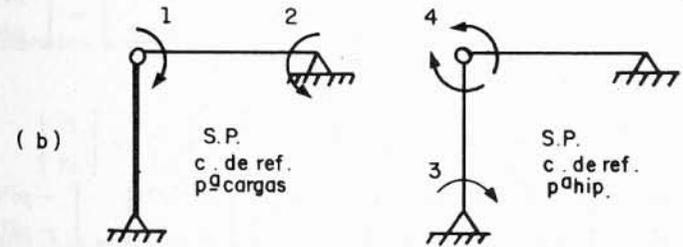
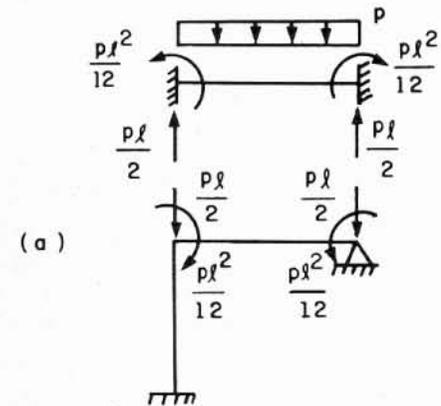


Fig. 7.3.3

As submatrizes de flexibilidade para a estrutura do sistema principal integrado são

$$[\bar{F}_{10}] = [\bar{B}_1]^T [f] [\bar{B}_0] =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ};$$

$$[\bar{F}_{11}] = [\bar{B}_1]^T [f] [\bar{B}_1] =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ};$$

Urge inverter $[\bar{F}_{11}]$: $[\bar{F}_{11}]^{-1} = \frac{6EJ}{7} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Carregamento nodal: $\{R\} = \begin{bmatrix} pl^2/12 \\ pl^2/12 \end{bmatrix}$.

Valores dos hiperestáticos: $\{X\} = -[\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{F}_{10}] \{R\}$.

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{6EJ}{7l} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} pl^2/12 \\ pl^2/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pl^2/28 \\ pl^2/14 \end{bmatrix}$$

Esforços, em coordenadas locais:

$$\{S\} = \{S_0\} + [\bar{B}_0] [\bar{B}_1] \begin{Bmatrix} R \\ X \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ +pl^2/12 \\ -pl^2/12 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} pl^2/12 \\ pl^2/12 \\ pl^2/28 \\ pl^2/14 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pl^2/28 \\ -pl^2/14 \\ +pl^2/14 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O diagrama de momentos fletores é o da Fig. 7.3.4. Note-se que a matriz de incidência $[B]$, para a estrutura estaticamente indeterminada é

$$[B] = [\bar{B}_0] - [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{F}_{10}] = \begin{bmatrix} -2/7 & -1/7 \\ -4/7 & -2/7 \\ -3/7 & 2/7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Esta matriz transforma diretamente $\{R\}$ em $\{S\}$.)

Se for desejado obter os deslocamentos nodais $\{r\}$ da estrutura dada, pode-se compor sua matriz de flexibilidade:

$$[F] = [\bar{F}_{00}] - [\bar{F}_{10}]^T [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{F}_{10}] \quad \text{onde} \quad [\bar{F}_{00}] = [\bar{B}_0]^T [f] [\bar{B}_0].$$

No presente caso, obtém-se:

$$[\bar{F}_{00}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ} \quad \text{e} \quad [F] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ} + \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \frac{l}{42EJ}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \frac{l}{14EJ}$$

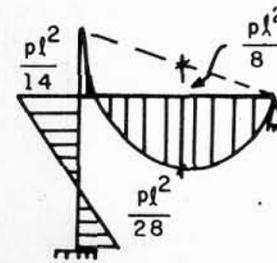


Fig. 7.3.4

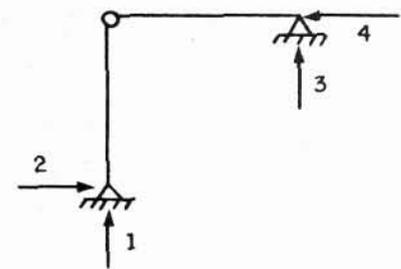


Fig. 7.3.5

Os deslocamentos nodais são

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \frac{l}{14EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} pl^2/12 \\ pl^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3pl^3/168 EJ \\ 5pl^3/168 EJ \end{Bmatrix}$$

Reações. Estabelecidas as coordenadas da Fig. 7.3.5, determine-se $[C]$, tal que

$$\{A\} = [C] \begin{Bmatrix} R \\ X \end{Bmatrix}$$

$$(R_1 = 1) \quad (R_2 = 1) \quad (X_3 = 1) \quad (X_4 = 1)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -1/l & 1/l & 0 & 1/l \\ 0 & 0 & 1/l & 1/l \\ 1/l & -1/l & 0 & -1/l \\ 0 & 0 & 1/l & 1/l \end{bmatrix}$$

$$\{A\} = \{A_0\} + [C_0] \{C_1\} \left\{ \begin{matrix} R \\ X \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} pl/2 \\ 0 \\ pl/2 \\ 0 \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -1/l & 1/l & 0 & 1/l \\ 0 & 0 & 1/l & 1/l \\ 1/l & -1/l & 0 & -1/l \\ 0 & 0 & 1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pl^2/12 \\ pl^2/12 \\ pl^2/28 \\ pl^2/14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{pl}{28}$$

2. Obter os momentos fletores e torsões na grelha da Fig. 7.3.6, na qual é dado $GJ_0^* = \frac{EJ}{1,25}$.

Solução. Sendo $g = 3$ (por serem cargas perpendiculares ao plano) escolheu-se o sistema principal da Fig. b, onde haverá coordenadas (1, 2, 3 e 4) para representar o carregamento nodal e outras (5, 6 e 7) para os hiperestáticos.

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l & 1 & | & l & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -l & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\bar{B}_0; \bar{B}_1]$$

Matriz de flexibilidade da estrutura desmembrada:

$$[f] = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 2l^2 & 0 & 3l & | & 0 & 0 \\ 0 & 7,5 & 0 & | & 0 & 0 \\ 3l & 0 & 6 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 2l^2 & 0 & 3l \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 7,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3l & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2l^2 & 0 & 3l \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 7,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3l & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrizes $[\bar{F}_{11}]$ e $[\bar{F}_{10}]$ (para o sistema principal):

$$[\bar{F}_{10}] = [\bar{B}_1]^T [f] [\bar{B}_0] = \frac{l}{12EJ} \begin{bmatrix} 4l^2 & 15l & 23l^2 & 21l \\ -6l & 0 & -6l & 0 \\ 0 & 15 & 21l & 27 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{F}_{11}] = [\bar{B}_1]^T [f] [\bar{B}_1] = \frac{l}{12EJ} \begin{bmatrix} 27l^2 & -12l & 21l \\ -12l & 39 & 0 \\ 21l & 0 & 42 \end{bmatrix}$$

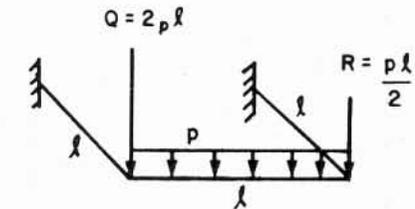


Fig. 7.3.6

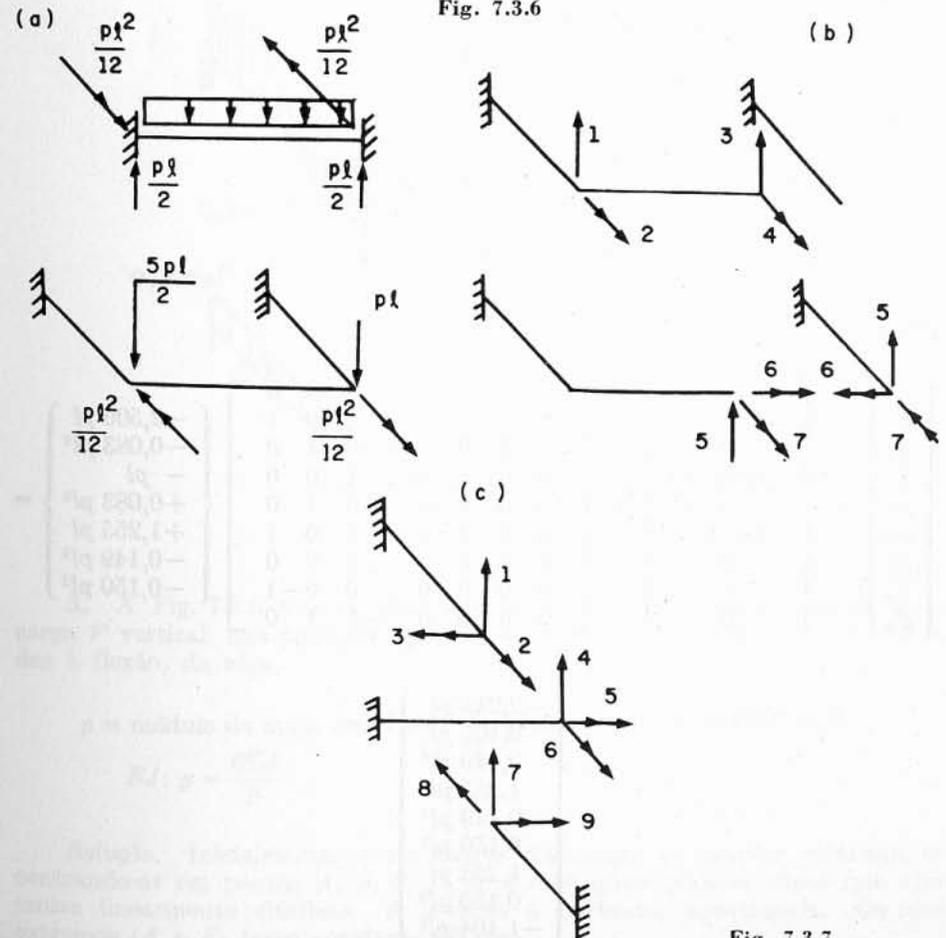


Fig. 7.3.7

Inversão de $[\bar{F}_{11}]$:

$$[\bar{F}_{11}]^{-1} = \frac{12EJ}{20\,979l^3} \begin{bmatrix} 1638 & 504l & -819l \\ 504l & 693l^2 & -252l^2 \\ -819l & -252l^2 & 909l^2 \end{bmatrix}$$

Valores dos hiperestáticos:

$$\begin{Bmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{Bmatrix} = -[\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{F}_{10}] \begin{Bmatrix} -\frac{5pl^2}{2} \\ -\frac{pl^2}{12} \\ -pl \\ \frac{pl^2}{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{20979} \begin{Bmatrix} +26271\,pl \\ -3133\,pl^2 \\ -3145\,pl^2 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +1,255\,pl \\ -0,149\,pl^2 \\ -0,150\,pl^2 \end{Bmatrix}$$

Esforços

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,000\,pl \\ 0 \\ -0,083\,pl^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l & 1 & l & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2,500\,pl \\ -0,083\,pl^2 \\ -pl \\ +0,083\,pl^2 \\ +1,255\,pl \\ -0,149\,pl^2 \\ -0,150\,pl^2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -2,245\,pl \\ 0,105\,pl^2 \\ 0,149\,pl^2 \\ 1,255\,pl \\ -0,149\,pl^2 \\ -0,150\,pl^2 \\ 1,255\,pl \\ 0,150\,pl^2 \\ -1,404\,pl^2 \end{Bmatrix}$$

Diagramas e reações: na Fig. 7.3.8.

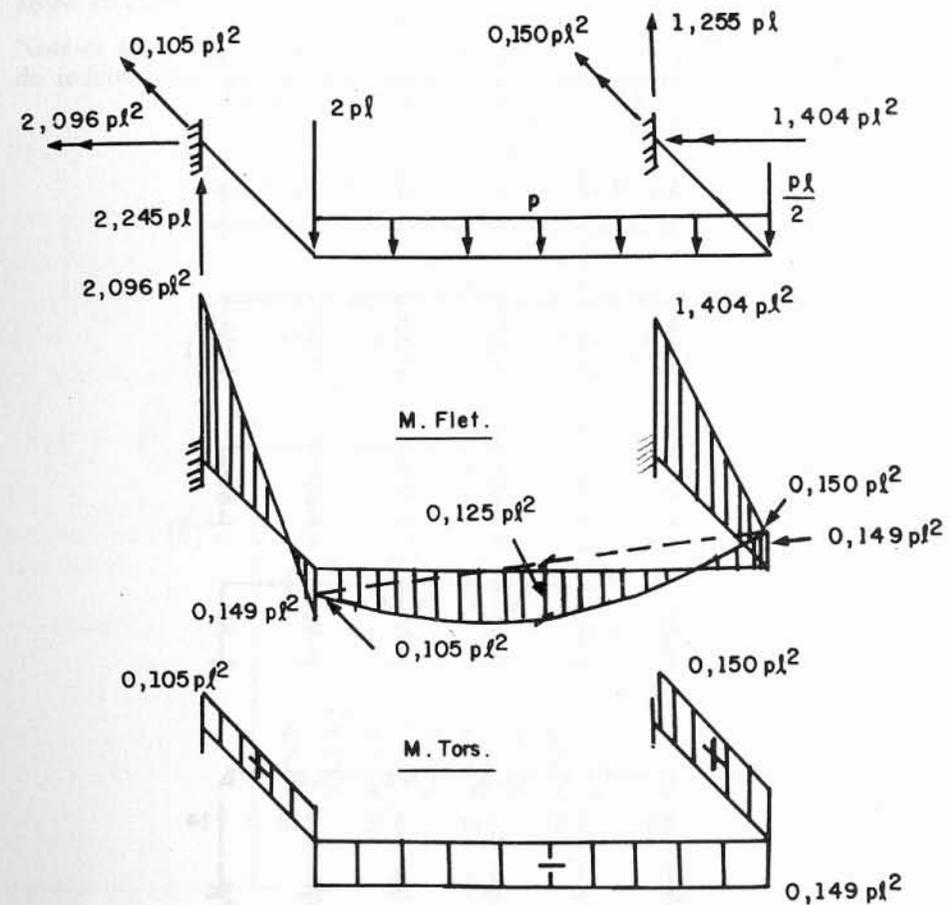


Fig. 7.3.8

3. A Fig. 7.3.9 mostra uma viga sobre base elástica, submetida a uma carga P vertical, que pode ser aplicada em A , B ou C . São dados: $EJ \rightarrow$ rigidez à flexão, da viga;

$\rho =$ módulo do apoio elástico $\left(\frac{t/m}{m}\right)$, cujo valor foi referido ao de

$$EJ: \rho = \frac{6EJ}{l^4}$$

Solução. Inicialmente, é necessário discretizar as reações elásticas, concentrando-as em pontos A, B, C, D, E, F , nos quais pode-se supor que atuem molas linearmente elásticas. A solução é portanto, aproximada. Os apoios extremos (A e F) terão constante elástica

Matrizes de flexibilidade do S.P. integrado:

$$[\bar{F}_{10}] = [\bar{B}_1]^T [f] [\bar{B}_0] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{l^2}{6EJ};$$

$$[\bar{F}_{11}] = [\bar{B}_1]^T [f] [\bar{B}_1] = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 10 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ};$$

$$[\bar{F}_{11}]^{-1} = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 0,595 & 0,177 & -0,012 & -0,019 \\ 0,177 & 0,712 & 0,192 & -0,011 \\ -0,012 & 0,192 & 0,712 & 0,177 \\ -0,019 & -0,011 & 0,177 & 0,595 \end{bmatrix}$$

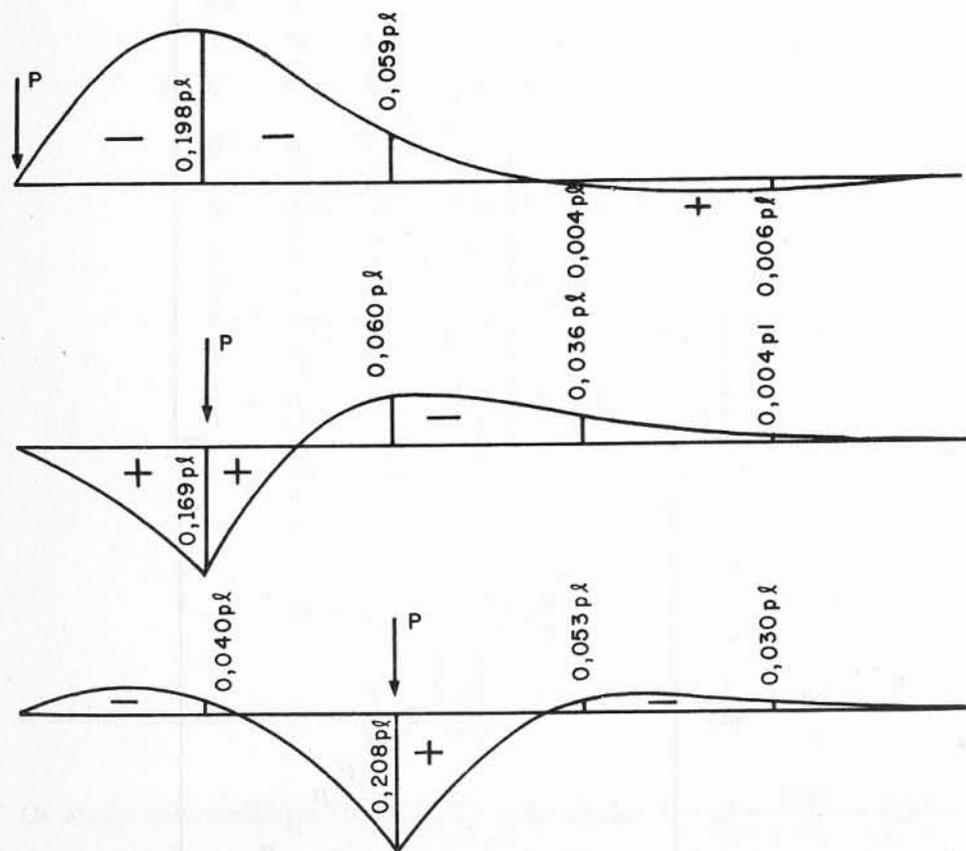


Fig. 7.3.10

Carregamento: os 3 casos de cargas são as colunas da matriz:

$$[R] = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hiperestáticos:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = -[\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{F}_{10}] [R] = \begin{bmatrix} -0,198Pl & +0,169Pl & -0,040Pl \\ -0,059Pl & -0,060Pl & +0,208Pl \\ +0,004Pl & -0,036Pl & -0,053Pl \\ +0,006Pl & -0,004Pl & -0,030Pl \end{bmatrix}$$

Os momentos fletores (para os 3 casos) são os da Fig. 7.3.10.

7.4. Aplicação às Estruturas Hiperestáticas Sujeitas a Variações de Temperatura ou a Modificações Iniciais

Admita-se que uma estrutura hiperestática seja submetida a deformações iniciais dos elementos, provocadas por efeitos térmicos ou por modificações de montagem.

Sejam:

{s̄} = deformações iniciais sofridas livremente pelos elementos do sistema principal (por temperatura ou modificações);

{s} = deformações finais nos elementos da estrutura hiperestática dada, incluindo a contribuição das deformações elásticas.

$$\boxed{\{s\} = \{\bar{s}\} + [f] \{S\}}$$

onde {S} são os esforços.

Ora, sendo {S} = [B₁] {X}, porque os esforços {S₀} não existem, tem-se:

$$\boxed{\{s\} = \{\bar{s}\} + [f] [\bar{B}_1] \{X\}}$$

Mas a igualdade acima {S} = [B₁] {X} permite concluir, pelo Teorema de Clebsh:

$$\boxed{\{x\} = [\bar{B}_1]^T \{s\}}$$

onde {x} são os deslocamentos (nullos) na direção dos hiperestáticos.

As equações de elasticidade são:

$$\{x\} = \{0\}$$

ou

$$[\bar{B}_1]^T \{s\}_t + [\bar{B}_1]^T [f] [\bar{B}_1] \{X\} = \{0\}.$$

As equações de elasticidade sob forma compacta são:

$$[\bar{B}_1]^T \{\bar{s}\}_t + [\bar{F}_{11}] \{X\} = \{0\}$$

onde

$[\bar{B}_1]^T \{\bar{s}\}_t$ são os deslocamentos na direção dos hiperestáticos X_i , causados no Sistema Principal pelas alterações térmicas ou de montagem;

$[\bar{F}_{11}] \{X\}$ são os deslocamentos na direção dos X_i , causados pelos próprios hiperestáticos.

Note-se que as deformações livres dos elementos $\{\bar{s}\}_t$, quando decorrerem de modificações impostas \rightarrow são dados do problema; quando tiverem como causa a mudança de temperatura \rightarrow adquirem os valores estudados no subitem 7.2.2.

Solução das equações. De modo semelhante ao que foi aplicado no caso de forças externas, as equações de elasticidade dão:

$$\{X\} = - [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{B}_1]^T \{\bar{s}\}_t.$$

De posse dos valores dos hiperestáticos, podem ser calculados os esforços:

$$\{S\} = [\bar{B}_1] \{X\}$$

ou

$$\{S\} = - [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{B}_1]^T \{\bar{s}\}_t.$$

Deformações totais dos elementos:

$$\{s\} = \{\bar{s}\}_t - [f] [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{B}_1]^T \{\bar{s}\}_t.$$

Deslocamentos nodais:

$$\{r\} = [\bar{B}_0]^T \{s\} = ([\bar{B}_0] - [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{B}_1]^T [f] [\bar{B}_0])^T \{\bar{s}\}_t$$

ou

$$\{r\} = [B]^T \{\bar{s}\}_t$$

onde $[B]$ é a matriz de incidência para a estrutura hiperestática, como se viu no item 7.3.

7.4.1. Exemplos

1. A viga AB da Fig. 7.4.1, com seção constante, altura h e comprimento l , é submetida a variações de temperatura diferentes nos bordos superior e inferior. Sendo dados α , E , J e Ω , obter os esforços. Seção retangular com

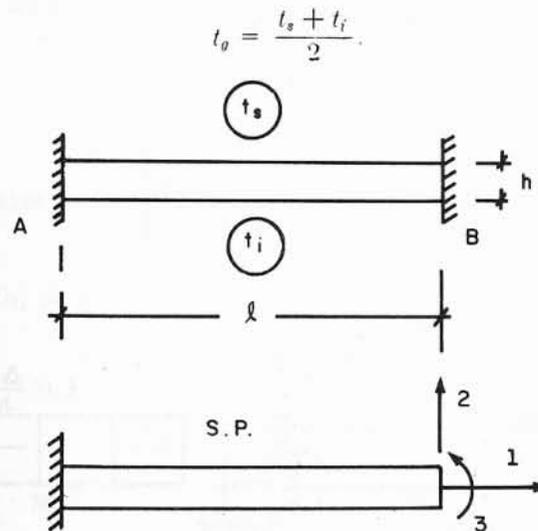


Fig. 7.4.1

Solução. Trata-se de uma estrutura 3 vezes hiperestática, com um só elemento. A segunda parte da Fig. 7.4.1 mostra as coordenadas de referência para x_1, x_2, x_3 (estas são também as coordenadas locais do elemento, o qual é igual ao sistema principal).

$$[\bar{B}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]_3; \quad \{\bar{s}\}_t = \begin{bmatrix} \alpha t_o l \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} l \end{bmatrix} \text{ (deformações iniciais por temperatura).}$$

$$[\bar{F}_{11}] = [f] = \begin{bmatrix} l/E\Omega & 0 & 0 \\ 0 & l^3/3EJ & l^2/2EJ \\ 0 & l^2/2EJ & l/EJ \end{bmatrix}$$

$$[\bar{F}_{11}]^{-1} = [k] = \begin{bmatrix} E\Omega/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ 0 & -6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{bmatrix}$$

Logo, conforme foi visto, os hiperestáticos são:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = -[\bar{F}_{11}]^{-1} [B_1]^T \{\bar{s}\}_t = - \begin{bmatrix} E\Omega/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ 0 & -6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha t_g \frac{l}{2} \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} l \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -E\Omega \alpha t_g \\ 0 \\ -EJ \alpha \frac{\Delta t}{h} \end{Bmatrix}$$

Não há forças verticais.

Os esforços estão na Fig. 7.4.2

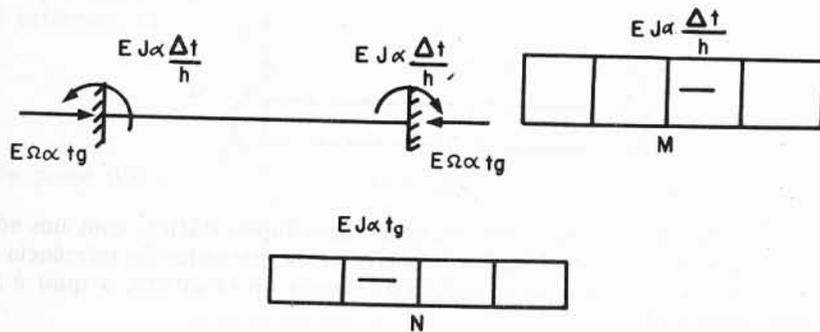


Fig. 7.4.2

2. Mesma grelha estudada no Ex. 2 do Item 7.2. Variação de temperatura com $t_g = 0$, e $t_s = -t$ e $t_i = t$. Obter os esforços e reações. É dada $h =$ altura da viga e conhecido $\Delta t = 2t$.

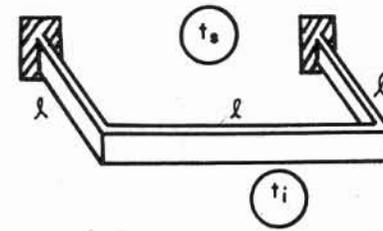


Fig. 7.4.3

Solução. O vetor das deformações térmicas dos elementos desmembrados (referido às coordenadas locais) é

$$\{\bar{s}\}_t = \begin{Bmatrix} l/2 \\ 0 \\ 1 \\ l/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \alpha \frac{\Delta t}{h} l$$

(ver as coordenadas locais do exemplo citado e as expressões obtidas anteriormente para \bar{s}_i).

Ora, a matriz $[B_1]$ já foi obtida:

$$[\bar{B}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -l & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$[\bar{B}_1]^T \{\bar{s}\}_t = \begin{Bmatrix} \alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} \\ 0 \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} l \end{Bmatrix}$$

Hiperestáticos (utilizando as matrizes do exemplo citado):

$$\begin{Bmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{Bmatrix} = -[\bar{F}_{11}]^{-1}[\bar{B}_1]^T \{s\}_t =$$

$$= -\frac{12EJ}{20979l^3} \begin{bmatrix} 1638 & 504l & -819l \\ 504l & 693l^2 & -252l^2 \\ -819l & -252l^2 & 909l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} \\ 0 \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,286EJ\alpha \frac{\Delta t}{h} \end{Bmatrix}$$

Os valores nulos de X_5 e X_6 eram de se esperar, dada a simetria da estrutura e da variação térmica.

Os diagramas de flexão e torção são os da Fig. 7.4.4

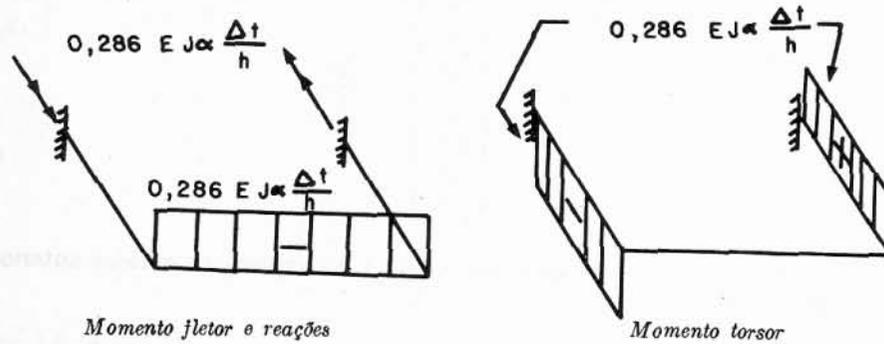


Fig. 7.4.4

7.5. Aplicação às Estruturas Hiperestáticas Submetidas a Recalques de Apoios

No sistema principal, coordenadas auxiliares terão a finalidade de designar as reações $\{\bar{A}\}$ e os recalques de apoios $\{a\}$.

Seja $[C]$ uma matriz de transformação, para exprimir as reações em função das grandezas hiperestáticas $\{X\}$. Têm-se:

$$\{\bar{A}\} = [C] \{X\}.$$

Ora, os problemas de recalques (bem como os de temperatura e modificações de montagem) comportam apenas a solução homogênea, pois os esforços decorrem somente dos hiperestáticos, não existindo cargas aplicadas. As ações $\{\bar{A}\}$ e $\{X\}$ estão em equilíbrio, donde se conclui que

$$\{\bar{A}\}^T \{a\} + \{X\}^T \{x\}_a = 0.$$

$\{a\}$ são os recalques e $\{x\}_a$ são os deslocamentos na direção dos hiperestáticos (ocorridos no sistema principal).

Incluindo nesta última igualdade o valor de $\{\bar{A}\}$ acima obtido:

$$\{X\}^T [C]^T \{a\} = -\{X\}^T \{x\}_a$$

(válida para qualquer $\{X\}$).

Logo:

$$\{x\}_a = -[C]^T \{a\}$$

(no sistema principal).

Na estrutura hiperestática, os deslocamentos $\{x\}$ são nulos. Suas parcelas obtidas no sistema principal (que deve "imitar" a estrutura dada) são:

$\{x\}_a$ — deslocamentos segundo X_i causados pelos recalques no sistema principal;

$[\bar{F}_{11}] \{X\}$ — deslocamentos elásticos segundo X_i causados pelos próprios hiperestáticos.

A superposição dessas parcelas dá:

$$\{x\} = \{x\}_a + [\bar{F}_{11}] \{X\} = \{0\}$$

ou

$$-[C]^T \{a\} + [\bar{F}_{11}] \{X\} = \{0\}$$

(equações de elasticidade para o caso de recalques).

A solução é

$$\{X\} = [\bar{F}_{11}]^{-1} [C]^T \{a\}.$$

As reações são:

$$\{A\} = [C] \{X\}$$

ou simplesmente

$$\{A\} = [C] [\bar{F}_{11}]^{-1} [C]^T \{a\}.$$

Note-se que esta última expressão é da forma $\{A\} = [H] \{a\}$, onde $[H]$ é uma matriz de rigidez, obtida a partir da matriz de rigidez $[\bar{F}_{11}]^{-1}$ por uma mudança de coordenadas

$$[H] = [C] [\bar{F}_{11}]^{-1} [C]^T.$$

Os esforços provocados pelos recalques são:

$$\{S\} = [\bar{B}_1] \{X\} = [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [C]^T \{a\}.$$

Como se vê, os esforços e reações podem ser obtidos diretamente a partir dos recalques $\{a\}$ conhecidos.

Nota. As expressões $\{A\} = [H] \{a\}$ e $\{S\} = [\beta] \{a\}$, (onde

$[\beta] = [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [C]^T$) são oportunas quando se trata de investigar efeitos de interação estrutura-solo, nos quais a estrutura e o solo formam um sistema composto, estaticamente indeterminado (a solução de rotina para os problemas estruturais considera apoios rígidos).

7.5.1. Exemplo

A mesma grelha já estudada sofre os recalques do esgaste A indicados na Fig. 7.5.1. Obter os esforços na estrutura.

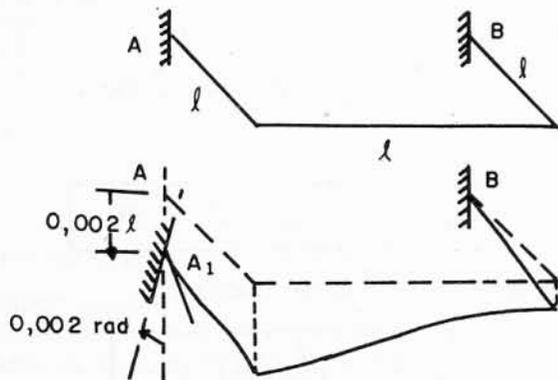


Fig. 7.5.1

Solução. A Fig. 7.5.2 mostra um sistema de coordenadas para reações e recalques no qual:

$$\{\bar{A}\} = [C] \{X\};$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ +l & 0 & 1 \\ -l & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ l & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

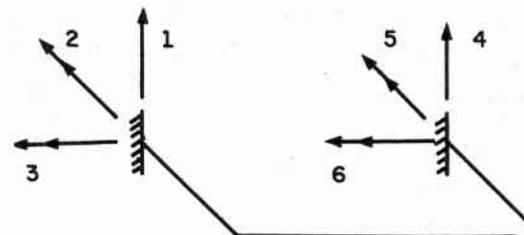


Fig. 7.5.2

Neste sistema de coordenadas, os recalques são:

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} -0,002l \\ 0 \\ -0,002 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{X\} = [\bar{F}_{11}]^{-1} [C]^T \{a\} = \begin{Bmatrix} 3,16 \\ 0,36l \\ -1,58l \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \frac{EJ}{l^2}$$

Os esforços estão na Fig. 7.5.3

(Valores a serem multiplicados por $10^{-3} \frac{EJ}{l}$) (Valores a serem multiplicados por $10^{-3} \frac{EJ}{l}$)

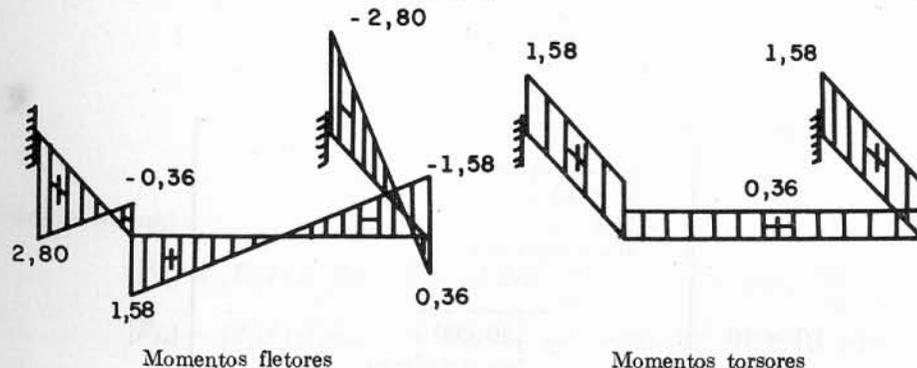


Fig. 7.5.3

7.6. Efeitos de Carregamento e Tensões de Montagem

A estrutura da Fig. 7.6.1 (viga armada hiperestática) deverá ser submetida ao carregamento de 0,6 tf/m, aplicado na viga de rigidez. Por meio de um "esticador" G, deseja-se introduzir na estrutura esforços iniciais, que, somados aos do carregamento, tornem equilibrados os momentos fletores na viga de rigidez AB.

$$\{s\}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a. Efeito do carregamento:

$$X'_5 = - [F_{11}]^{-1} [F_{10}] \{R\} = 4\,460 \text{ kg.}$$

b. Efeito da protensão — δ

$$X''_5 = - [F_{11}]^{-1} [B_1]^T \{s\}_m = + 2325\delta.$$

Os esforços são:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120\,000 \\ +320\,000 \\ -320\,000 \\ +120\,000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 300 & 0,25 & 100 & -0,25 & -300 \\ -300 & 0,75 & -100 & 0,25 & 300 \\ 100 & -0,25 & 300 & -0,75 & -300 \\ -100 & 0,25 & -300 & -0,25 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,25 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3\,900 \\ -200\,000 \\ 3\,900 \\ -200\,000 \\ 4\,460 + 2\,325\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -240\,000 \\ +240\,000 \\ -240\,000 \\ +240\,000 \\ 7\,050 \\ -4\,200 \\ 5\,600 \\ -4\,200 \\ 7\,050 \end{pmatrix}$$

O esforço S_1 (momento fletor em D) deve atingir

$$S_1 = - 2,4 \text{ mt} = - 240\,000 \text{ cm kg.}$$

Logo, desenvolvendo a primeira linha tem-se

$$102\,000 - 697\,500\delta = - 240\,000$$

$$\delta = 0,49 \text{ cm.}$$

Substituindo δ por este valor, são obtidos os outros valores de S .

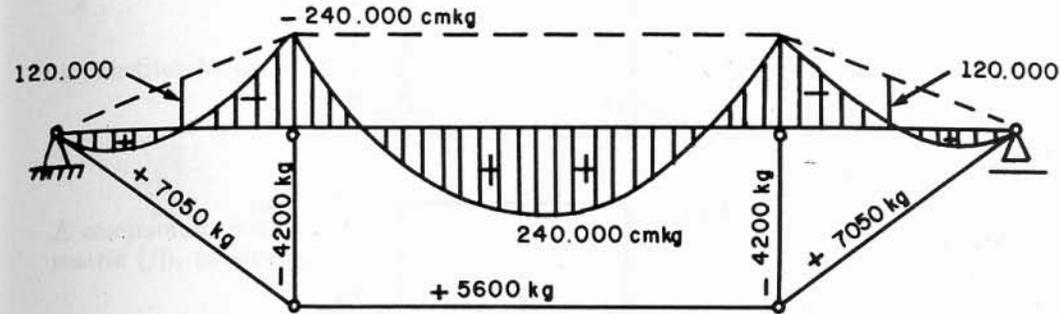


Fig. 7.6.2

7.7. Mudança de Sistema Principal

Em certos casos, quando já se desenvolveu parte do cálculo e se obteve a matriz $[F_{11}]$, surge a conveniência de mudar o sistema principal. Trata-se de aproveitar parte do trabalho realizado, obtendo diretamente a nova matriz de flexibilidade.

7.7.1. Transformação dos Hiperestáticos

Com base em simples condições de equilíbrio, é possível obter uma matriz $[T]$ que exprima os antigos hiperestáticos $\{X\}$, em função dos novos hiperestáticos $\{Y\}$:

$$\{X\} = [T] \{Y\}.$$

Assim, no caso da Fig. 7.7.1, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = [T] \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

onde:

$$(Y_1 = 1) \quad (Y_2 = 1)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1/h \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix}$$

Note-se que a matriz $[T]$ é quadrada e não singular (em todos os casos), pois a transformação inversa é possível;

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = [T]^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Neste exemplo: $[T]^{-1} = \begin{bmatrix} h - l & \\ h & 0 \end{bmatrix}$

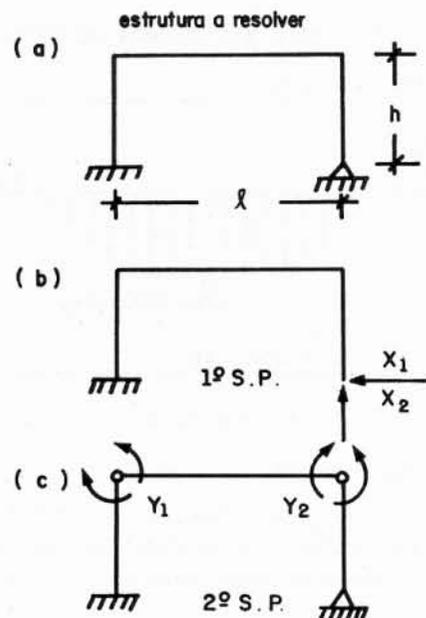


Fig. 7.7.1

7.7.2. Determinação da Nova Matriz de Flexibilidade $[\bar{F}_{11}]_Y$

Convém não perder de vista que a mudança de sistema principal (com a troca dos hiperestáticos X_i para os hiperestáticos Y_i) pode ser encarada como uma simples *mudança de sistema de coordenadas*, cujo estudo foi feito anteriormente (ver item 6.3). A matriz de transformação $[T]$, acima citada, identifica-se com a matriz $[C]_{12}$, também de transformação, referida. A matriz de flexibilidade no novo sistema é

$$[\bar{F}]_2 = [C]_{12}^T [\bar{F}]_1 [C]_{12}$$

Logo, no presente caso, feita a mudança de sistema principal, a nova matriz $[\bar{F}_{11}]_Y$ será

$$[\bar{F}_{11}]_Y = [T]^T [\bar{F}_{11}]_X [T]$$

Esta expressão é importante porque permite obter diretamente a nova matriz, sem que seja necessário fazer a composição através dos elementos.

Nova matriz de incidência $[\bar{B}_1]_Y$. Por serem:

$$[\bar{F}_{11}]_X = [\bar{B}_1]_X^T [f] [\bar{B}_1]_X$$

e

$$[\bar{F}_{11}]_Y = [\bar{B}_1]_Y^T [f] [\bar{B}_1]_Y$$

a substituição de $[\bar{F}_{11}]_X$ na expressão de $[\bar{F}_{11}]_Y$ acima, dá

$$[\bar{F}_{11}]_Y = [T]^T [\bar{B}_1]_X^T [f] [\bar{B}_1]_X [T]$$

A comparação dos dois valores de $[\bar{F}_{11}]_Y$ obtidos (que são válidos para qualquer matriz $[f]$), mostra que

$$[\bar{B}_1]_Y = [\bar{B}_1]_X [T]$$

Esta expressão permite obter diretamente a nova matriz de incidência $[\bar{B}_1]_Y$.

7.7.3. Exemplo

Na estrutura hiperestática da Fig. 7.7.2, a matriz de transformação que exprime $\{X\}$ em função de $\{Y\}$ é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -1/a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (Y_1 = 1) \quad (Y_2 = 1)$$

(X são os hiperestáticos no 1.º sistema, Fig. b, e Y são os do 2.º sistema, Fig. c).

No 1.º sistema principal obtém-se:

$$[\bar{B}_1]_X = \begin{bmatrix} -a & 2a \\ 0 & -2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$[F_{11}]_X = \begin{bmatrix} a^3/3EJ & -a^3/EJ \\ -a^3/EJ & 20a^3/3EJ \end{bmatrix}$$

No 2.º sistema principal as matrizes $[\bar{B}_1]_Y$ e $[\bar{F}_{11}]_Y$ podem ser obtidas diretamente, por transformação:

$$[\bar{B}_1]_Y = \begin{bmatrix} -a & 2a \\ 0 & -2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1/a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{F}_{11}]_Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1/a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^3/3EJ & -a^3/EJ \\ -a^3/EJ & 20a^3/3EJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1/a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a^3/EJ & a^2/3EJ \\ a^2/3EJ & a^3/3EJ \end{bmatrix}$$

Estes resultados podem ser comprovados mediante a composição dessas matrizes a partir dos elementos.

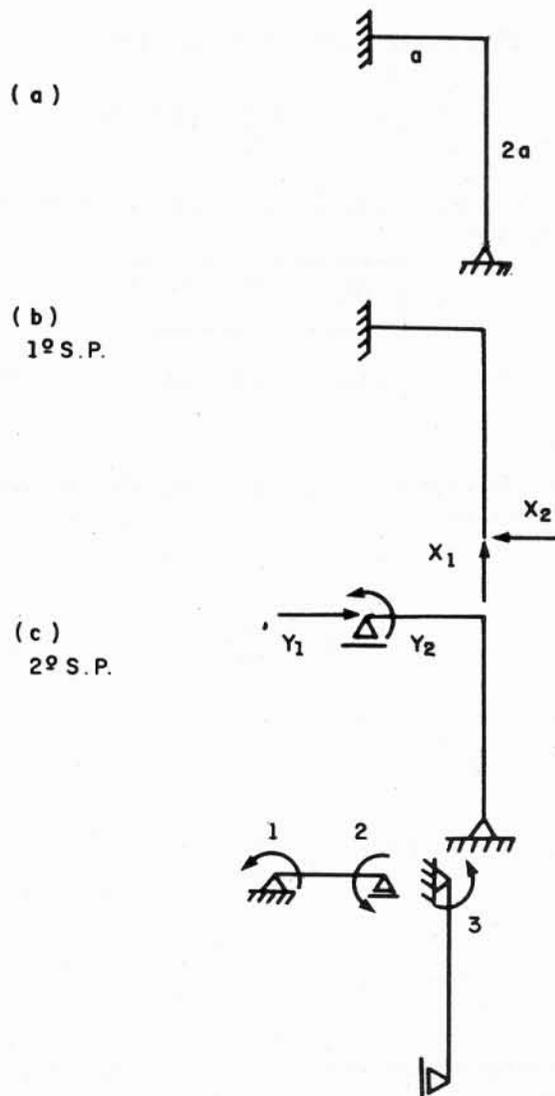


Fig. 7.7.2

7.8. Escolha do Sistema Principal

Como se sabe, a determinação dos hiperestáticos $\{X\}$ implica na inversão, da matriz $[\bar{F}_{11}]$.

Demonstra-se que esta matriz jamais é singular. Suas linhas e colunas são linearmente independentes. Há situações, entretanto, em que o determinante de $[\bar{F}_{11}]$ assume valor muito pequeno. Se isto acontecer e a estrutura for hiperestática de grau muito elevado, a inversão, mesmo em computador, pode acarretar hiperestáticos (e portanto esforços) com larga margem de erro. Diz-se, neste caso, que o sistema principal está *mal condicionado*.

Para evitar esse inconveniente, é de grande importância que os termos da diagonal principal da matriz $[\bar{F}_{11}]$ ($\bar{F}_{11}, \bar{F}_{22}, \bar{F}_{33} \dots \bar{F}_{nn}$) sejam predominantes em suas linhas ou colunas. Fisicamente isto implica em que a ação de cada hiperestático X_i acarrete maior deslocamento na direção do próprio X_i .

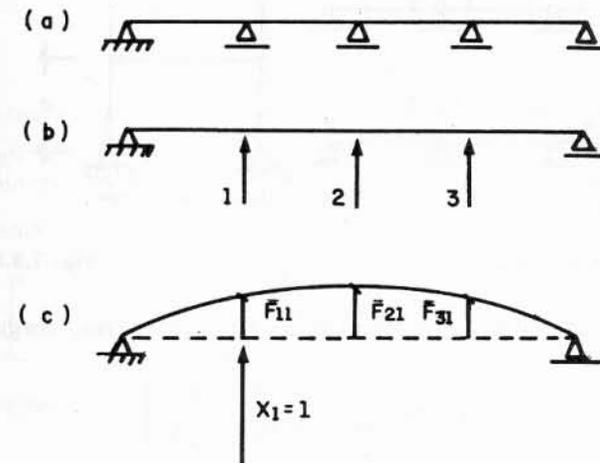


Fig. 7.8.1

1. No caso de viga-contínua da Fig. 7.8.1a, o sistema principal da Fig. b é mal escolhido. Observe-se (Fig. c) que, na primeira coluna da matriz de flexibilidade, o termo \bar{F}_{11} , situado na diagonal principal, será menor do que \bar{F}_{21} e da mesma ordem de grandeza de \bar{F}_{31} .

Já o sistema principal da Fig. 7.8.2 é bem escolhido, pois satisfaz à condição citada, além de levar a vantagem de conduzir a uma matriz $[\bar{F}_{11}]$ clapeyroniana.

$$[\bar{F}_{11}] = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} & 0 \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} & \bar{F}_{23} \\ 0 & \bar{F}_{32} & \bar{F}_{33} \end{bmatrix}$$

2. Na estrutura da Fig. 7.8.3 existe o mesmo inconveniente, se adotado o sistema principal indicado. A matriz $[\bar{F}_{11}]$ é quase singular.

De fato, para $X_2 = 1$, os esforços de flexão são aproximadamente o dobro dos que surgem para $X_1 = 1$. Assim, fixadas as coordenadas locais e obtidas as matrizes $[\bar{B}_1]$ e $[\bar{F}_{11}]$, observa-se que:

- a. a segunda coluna de $[\bar{B}_1]$ é aproximadamente o dobro da primeira coluna;
 b. em consequência, se for $\bar{F}_{11} = c$, será aproximadamente,

$$[\bar{F}_{11}] \approx \begin{bmatrix} c & 2c \\ 2c & 4c \end{bmatrix},$$

cujo determinante é muito pequeno.

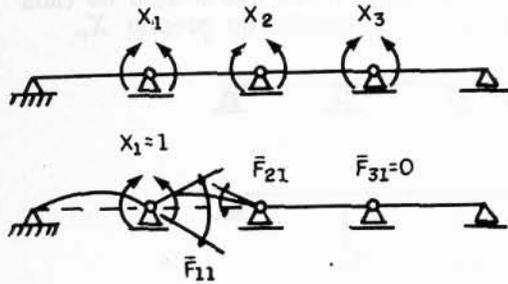


Fig. 7.8.2

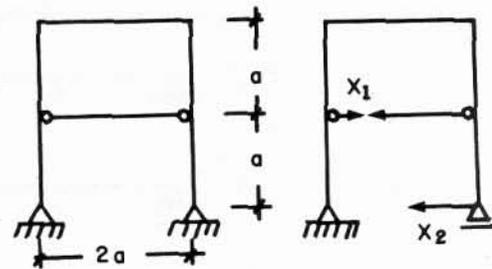


Fig. 7.8.3

Se, nessa estrutura, J for o mesmo para todas as barras, chega-se a

$$[\bar{F}_{11}] = \frac{a^3}{3EJ} \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 18 & 34 \end{bmatrix},$$

cujo determinante é $|\bar{F}_{11}| = 324 - 272 = 52$.

Se as colunas tiverem J muito grande $|\bar{F}_{11}| \rightarrow 0$.

Como regra geral, para fugir a tais inconvenientes:

1. evitar empregar grandezas hiperestáticas de dimensão diferente (forças e momentos, por exemplo), preferindo sempre os hiperestáticos momentos;
2. escolher o sistema principal, de sorte que seus esforços e sua elástica se aproximem ao máximo dos esforços e elástica da estrutura dada (romper vínculos onde se prevê que os hiperestáticos têm pequeno valor e, portanto, influem pouco no conjunto).

Quando não é possível deixar de empregar hiperestáticos-força misturados com hiperestáticos-momento, a matriz $[\bar{F}_{11}]$ sai mal condicionada. Neste caso a utilização dos fatores escala pode eliminar os inconvenientes surgidos.

7.9. Emprego dos Fatores-Escala, para Obter uma Solução Bem Condicionada

O objetivo é evitar a disparidade entre os valores dos termos da matriz $[\bar{F}_{11}]$, principalmente dos termos da diagonal principal entre si.

Na estrutura da Fig. 7.9.1 seriam obtidos:

$$[\bar{B}_1] = \begin{bmatrix} -a & -1 \\ -a & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$[\bar{F}_{11}] = \frac{a}{6EJ} \begin{bmatrix} 4a^2 & 5a \\ 5a & 8 \end{bmatrix}.$$

Se fosse $a = 10$ m, os valores numéricos seriam:

$$[\bar{F}_{11}] = \begin{bmatrix} 400 & 50 \\ 50 & 8 \end{bmatrix} \frac{10}{6EJ}$$

(os inconvenientes apontados são bem claros).

Para corrigir este desequilíbrio, pode-se utilizar uma unidade diferente para o hiperestático-força. Assim, ao formular a matriz $[\bar{B}_1]$, seria obtida a primeira coluna empregando $X_{1*} = \frac{1}{a}$ (e não $X_1 = 1$) com o que vem

$$[\bar{B}_1]_* = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\bar{F}_{11}]_* = \frac{a}{6EJ} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

sem os inconvenientes acima.

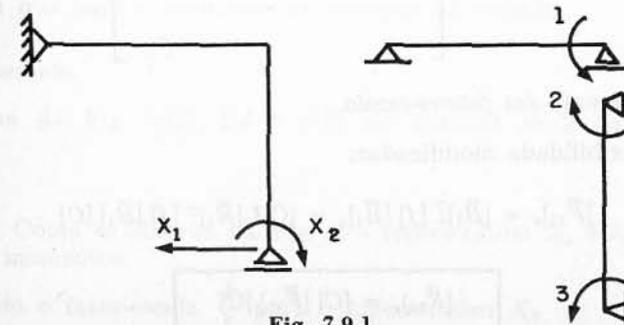
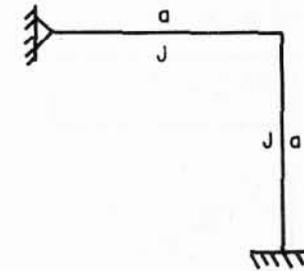


Fig. 7.9.1

Convém verificar as conseqüências deste artifício sobre a marcha e o resultado da solução, num caso qualquer.

Sejam:

X_i, X_{i+1}, \dots, X_n os hiperestáticos

e

c_i, c_{i+1}, \dots, c_n os valores

de X considerados na formulação da matriz $[\bar{B}_1]_*$ (fatores-escala).

A matriz de incidência comum, sem os fatores-escala, seria:

$$[\bar{B}_1] = \begin{bmatrix} b_{ii} & b_{i(i+1)} & \dots & b_{in} \\ b_{(i+1)i} & b_{(i+1)(i+1)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{ni} & b_{n(i+1)} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

com os fatores escala, seria:

$$[\bar{B}_1]_* = \begin{bmatrix} b_{ii} c_i & b_{i(i+1)} c_{i+1} & \dots & \dots \\ b_{(i+1)i} c_i & b_{(i+1)(i+1)} c_{i+1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{ni} c_i & b_{n(i+1)} c_{i+1} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Como se pode observar, as colunas de $[\bar{B}_1]_*$ estão multiplicadas pelos fatores-escala. Logo, é lícito concluir que

$$[\bar{B}_1]_* = [\bar{B}_1] [C]$$

onde

$$[C] = \begin{bmatrix} c_i & & & \\ & c_{i+1} & & \\ & & c_{i+2} & \\ & & & \dots \\ & & & & c_n \end{bmatrix}$$

é a matriz (diagonal) dos fatores-escala.

Matrizes de flexibilidade modificadas:

$$[\bar{F}_{11}]_* = [\bar{B}_1]_*^T [f] [\bar{B}_1]_* = [C]^T [\bar{B}_1]^T [f] [\bar{B}_1] [C]$$

$$[\bar{F}_{11}]_* = [C] [\bar{F}_{11}] [C]$$

(note-se que um termo qualquer $\bar{F}_{ij*} = \bar{F}_{ij} C_i C_j$)

$$[\bar{F}_{10}]_* = [\bar{B}_1]_*^T [f] [\bar{B}_0] = [C]^T [\bar{B}_1]^T [f] [\bar{B}_0]$$

ou

$$[\bar{F}_{10}]_* = [C] [\bar{F}_{10}]$$

porque $[C]^T = [C]$,

ou em geral $\bar{F}_{i0*} = \bar{F}_{i0} c_i$.

As equações são: $[\bar{F}_{10}]_* \{R\} + [\bar{F}_{11}]_* \{X\}_* = \{0\}$,

onde $\{X\}_* = -[\bar{F}_{11}]_*^{-1} [\bar{F}_{10}]_* \{R\}$

ou

$$\{X\}_* = -([C]^{-1} [\bar{F}_{11}]_*^{-1} [C]) ([C] [\bar{F}_{10}]) \{R\} = -[C]^{-1} [\bar{F}_{11}]_*^{-1} [\bar{F}_{10}] \{R\}$$

ou finalmente

$$\{X\}_* = [C]^{-1} \{X\}.$$

É curioso observar que, embora os valores formais dos hiperestáticos tenham mudado, os esforços na estrutura não são afetados:

$$\begin{aligned} \{S\}_* &= \{S_0\} + [\bar{B}_0] \{R\} + [\bar{B}_1]_* \{X\}_* = \\ &= \{S_0\} + [\bar{B}_0] \{R\} + [\bar{B}_1] [C] [C]^{-1} \{X\} = \\ &= \{S_0\} + [\bar{B}_0] \{R\} + [\bar{B}_1] \{X\} = \{S\}. \end{aligned}$$

Daí se conclui que a aplicação dos fatores-escala ao gerar a matriz $[\bar{B}_1]$ pode ser feita, sem que haja necessidade de correção na solução.

7.9.1. Exemplo

Na grelha da Fig. 7.9.2, EJ e GJ_0^* são comuns às 2 barras. É dado $\frac{GJ_0^*}{EJ} = 0,5$.

Solução. Como se observa na Fig. d, o hiperestático X_3 é força, enquanto X_4 e X_5 são momentos.

Será usado o fator-escala $\frac{1}{l}$ para o hiperestático X_3 .

Matriz de incidência (normal):

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

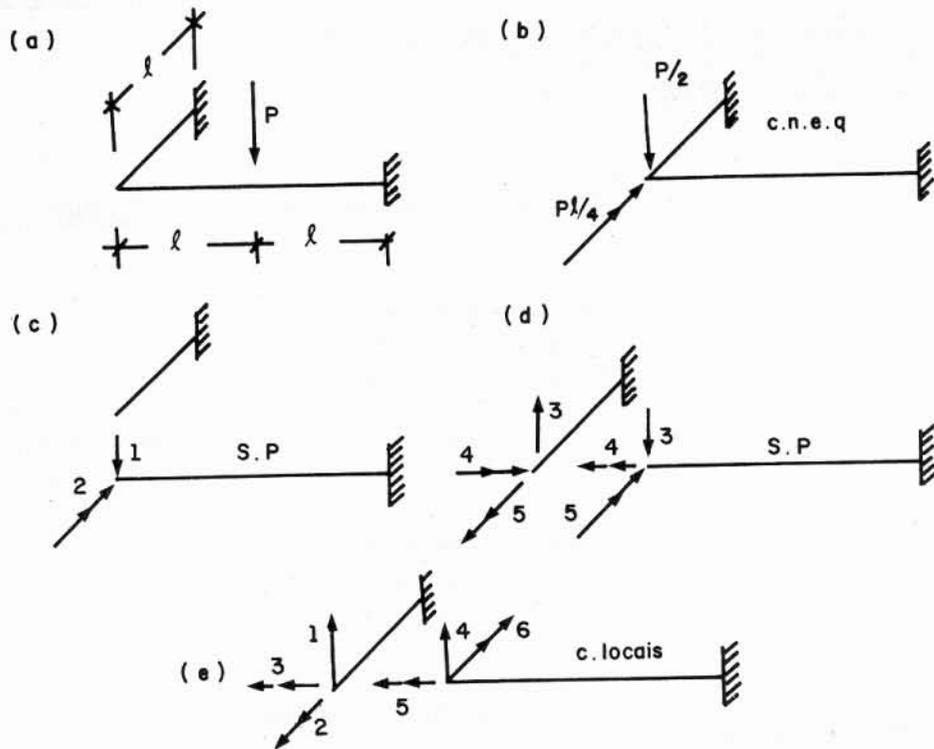


Fig. 7.9.2

Matriz dos fatores escala:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/l & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de incidência $[\bar{B}_1]_*$ modificada:

$$[\bar{B}_1]_* = [\bar{B}_1][C] = \begin{bmatrix} 1/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo

$$[f] = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 2l^2 & 0 & 3l \\ 0 & 12 & 0 \\ 3l & 0 & 6 \\ 16l^2 & 0 & 12l \\ 0 & 24 & 0 \\ 12l & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

vem

$$[\bar{F}_{10}]_* = [\bar{B}_1]_* [f] [\bar{B}_0] = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 16l & -12 \\ 0 & 0 \\ -12l & 12 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{F}_{11}]_* = [\bar{B}_1]_* [f] [\bar{B}_1]_* = \frac{l}{2EJ} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 10 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{F}_{11}]_*^{-1} = \frac{EJ}{156l} \begin{bmatrix} 80 & 8 & 40 \\ 8 & 32 & 4 \\ 40 & 4 & 59 \end{bmatrix}; \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} P/2 \\ Pl/4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix}_* = -[\bar{F}_{11}]_*^{-1} [\bar{F}_{10}]_* \{R\} = \begin{Bmatrix} -280P/936 \\ -28Pl/936 \\ -23Pl/936 \end{Bmatrix}$$

Efetuando o cálculo dos esforços

$$\{S\} = \{S_0\} + [\bar{B}_0] [\bar{B}_1]_* \begin{Bmatrix} R \\ X_* \end{Bmatrix}$$

obtêm-se os diagramas da Fig. 7.9.3.

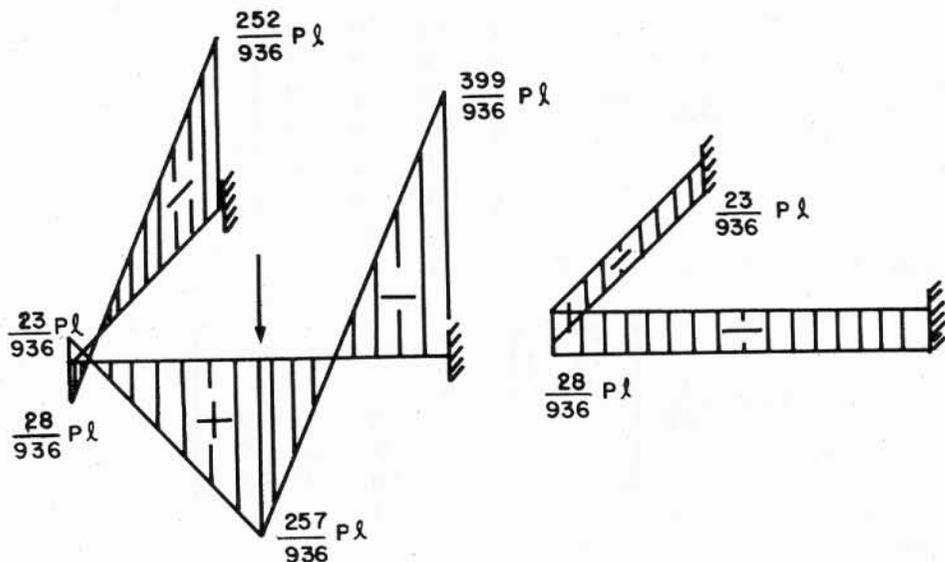


Fig. 7.9.3

7.10. A Troca do Sistema Principal em Parte da Solução

A resolução de uma estrutura hiperestática tem analogias com a resolução de uma equação diferencial. Assim, no cálculo dos esforços e reações, há duas parcelas, ambas computadas no sistema principal:

1. o efeito dos hiperestáticos X_1, X_2, \dots, X_n (atuando sem carregamento exterior), que constitui a *solução homogênea*;
2. o efeito do *carregamento exterior* no sistema principal, que constitui a *solução particular*.

Como se sabe, a solução particular é *qualquer solução* que satisfaça às condições do problema, não envolvendo combinação linear das soluções da parcela homogênea.

Logo, é lícito induzir daí que o *sistema principal, utilizado para avaliar os efeitos do carregamento exterior, não tem obrigação de ser o mesmo empregado para aplicação dos hiperestáticos*.

A seguir, demonstra-se que esta proposição é verdadeira.

Considere-se uma primeira solução, envolvendo um 1.º sistema principal, com matrizes de incidência $[\bar{B}_0]$ e $[\bar{B}_1]$, cargas exteriores $\{R\}$ e hiperestáticos $\{X\}$.

Obtém-se (computando apenas a parcela das cargas nodais):

$$\{S\} = [\bar{B}_0] \{R\} + [\bar{B}_1] \{X\} = ([\bar{B}_0] - [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{F}_{10}]) \{R\}$$

ou ainda

$$\{S\} = ([I] - [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{B}_1]^T [f]) [\bar{B}_0] \{R\}.$$

Uma segunda solução, envolvendo um 2.º sistema principal, daria $[\bar{B}_0]_*$, $[\bar{B}_1]_*$, $\{R\}$, $\{X\}_*$ e

$$\{S\} = ([I] - [\bar{B}_1]_* [\bar{F}_{11}]_*^{-1} [\bar{B}_1]_*^T [f]) [\bar{B}_0]_* \{R\}.$$

Considere-se agora uma solução mista, em que o 1.º sistema principal foi usado para compor a matriz $[\bar{B}_1]$ (e portanto acarretou a mesma matriz $[\bar{F}_{11}]$ da primeira solução) e um 2.º sistema principal foi usado para montar a matriz $[\bar{B}_0]_*$. É claro que $[\bar{F}_{10}]_*$ será diferente e os hiperestáticos $\{X\}_{**}$ serão outros. Os esforços serão:

$$\{S\}_* = ([I] - [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{B}_1]^T [f]) [\bar{B}_0]_* \{R\}.$$

Sabe-se que os esforços dados pela segunda expressão são iguais aos dados pela primeira. Vai-se demonstrar que os da terceira igualdade são iguais aos da segunda. Nesta segunda igualdade um dos termos é

$$[\bar{B}_1]_* [\bar{F}_{11}]_*^{-1} [\bar{B}_1]_*^T = [\bar{B}_1] [C] ([C]^T [\bar{F}_{11}] [C])^{-1} [C]^T [\bar{B}_1]^T =$$

$$- [\bar{B}_1] [C] [C]^{-1} [\bar{F}_{11}]^{-1} [C]^T [\bar{B}_1]^T$$

ou finalmente:

$$[\bar{B}_1]_* [\bar{F}_{11}]_*^{-1} [\bar{B}_1]_*^T = [\bar{B}_1] [\bar{F}_{11}]^{-1} [\bar{B}_1]^T.$$

Levando este valor na segunda expressão de $\{S\}$, verifica-se que ela se torna igual à terceira. Logo, $\{S\}_* = \{S\}$, isto é, a *solução mista é exata*.

Nota. Na transformação feita para demonstrar a proposição, admitiu-se que $[C]$ é uma matriz de incidência estática relacionando os dois sistemas principais, de sorte que se tenha $\{X\} = [C] \{X\}_*$ e portanto, $[\bar{B}_1]_* = [\bar{B}_1] [C]$ e $[\bar{F}_{11}]_* = [C]^T [\bar{F}_{11}] [C]$.

7.10.1. Exemplo da Validade da Troca de Sistema Principal numa das Partes da Solução

A estrutura da Fig. 7.10.1, resolvida com o sistema principal ali indicado, fornece:

$$[\bar{B}] = [\bar{B}_0 \mid \bar{B}_1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[f] = \frac{l^3}{3EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{F}_{10}] = -\frac{l^3}{3EJ}; [\bar{F}_{11}] = \frac{9l^3}{3EJ}$$

$$X_2 = \frac{P}{9}$$

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ P/9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8P/9 \\ P/9 \end{Bmatrix}$$

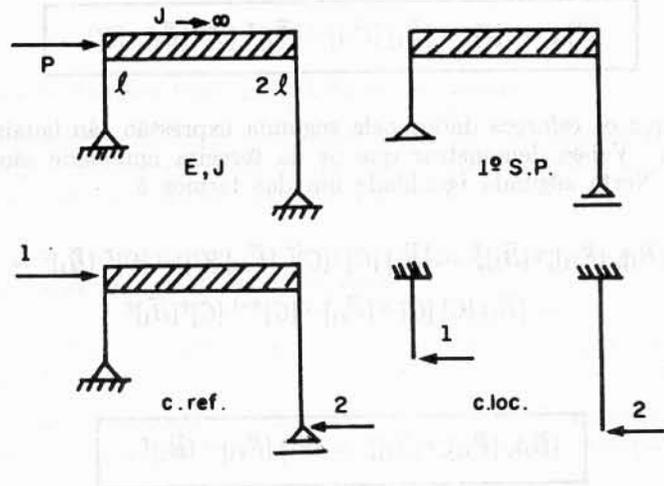


Fig. 7.10.1

Se, entretanto, para aplicar o carregamento e obter a matriz $[\bar{B}_0]_*$, utilizar-se um novo sistema principal (Fig. 7.10.2), obtém-se:

$$[\bar{B}_0]_* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{F}_{10*} = \frac{8l^3}{3EJ}$$

$$\{X_2\}_* = -\frac{3EJ}{9l^3} \times \frac{8l^3}{3EJ} P = \boxed{-\frac{8}{9} P}$$

e

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ -\frac{8}{9} P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8P/9 \\ P/9 \end{Bmatrix}$$

(mesmos resultados já obtidos).

A Fig. 7.10.2 mostra estes efeitos.

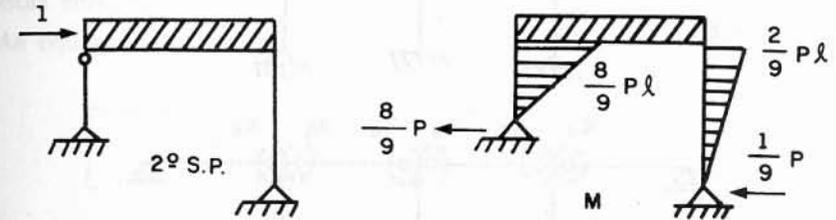


Fig. 7.10.2

7.11. As Grandezas Hiperestáticas como Grupos de Ações — Simplificações Peculiares às Estruturas Simétricas

O conceito de grandeza hiperestática — como ação mecânica a aplicar onde se rompeu vínculo, com a finalidade de substituir a ligação eliminada — não implica em que se trate de ação isolada.

Podem ser n grupos de ações, atuando simultaneamente no sistema principal em que se romperam n vínculos. Esta consideração é particularmente importante no caso das estruturas simétricas.

Assim, no caso da estrutura 6 vezes hiperestática da Fig. 7.11.1a (que é simétrica), a escolha do sistema principal da Fig. d proporciona a fixação de grupos de hiperestáticos simétricos (Fig. b) e anti-simétricos (Fig. c).

Sejam:

$[f]$ — a matriz de flexibilidade da estrutura desmembrada;

$[\bar{B}_1]_S$ — a submatriz de incidência $[B_1]$, referente aos hiperestáticos simétricos da Fig. b;

$[\bar{B}_1]_A$ — a submatriz de incidência referente aos hiperestáticos anti-simétricos da Fig. c;

$[\bar{B}_1] = [[\bar{B}_1]_S \mid [\bar{B}_1]_A]$ a do conjunto.

Ao compor a matriz de flexibilidade da estrutura integrada $[\bar{F}_{11}]$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} [\bar{B}_1]_S^T \\ - \\ [\bar{B}_1]_A^T \end{bmatrix} [f] \begin{bmatrix} [\bar{B}_1]_S \\ [\bar{B}_1]_A \end{bmatrix} = [\bar{F}_{11}]$$

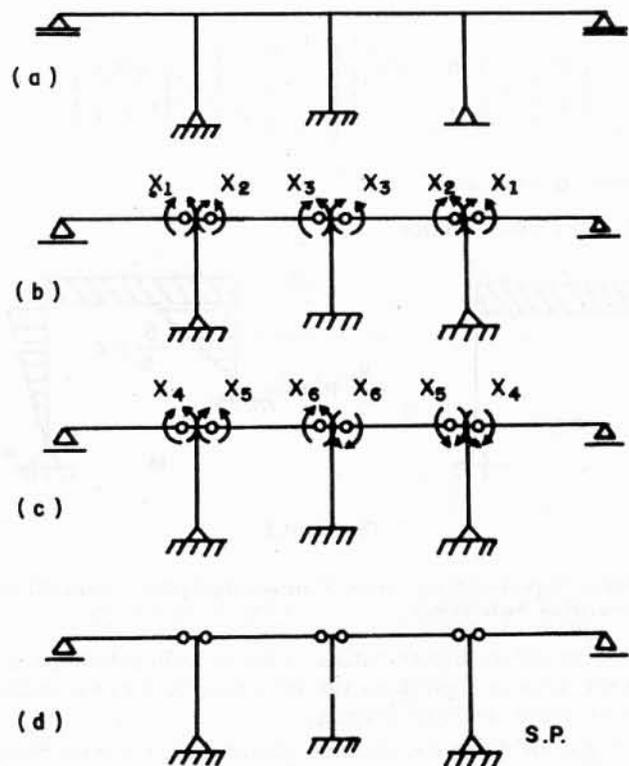


Fig. 7.11.1

ou

$$[\bar{F}_{11}] = \begin{bmatrix} [\bar{B}_1]_S^T [f] [\bar{B}_1]_S & [\bar{B}_1]_S^T [f] [\bar{B}_1]_A \\ [\bar{B}_1]_A^T [f] [\bar{B}_1]_S & [\bar{B}_1]_A^T [f] [\bar{B}_1]_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{F}_{11}]_S & 0 \\ 0 & [\bar{F}_{11}]_A \end{bmatrix}$$

A significação de cada uma das submatrizes de $[\bar{F}_{11}]$ é evidente: representa a soma dos deslocamentos segundo a direção de um dos hiperestáticos (do grupo S ou grupo A), quando se torna unitário o grupo de ações correspondente a outro hiperestático (simétrico ou anti-simétrico). Ora, nessas condições, é claro que o grupo simétrico produzirá na direção do grupo anti-simétrico deslocamentos cuja soma é nula, e vice-versa.

Portanto, a matriz de flexibilidade $[\bar{F}_{11}]$ terá duas submatrizes nulas, como está indicado acima. Será uma matriz subdividida, com subdivisão em diagonal, pois só existem $[\bar{F}_{11}]_S$ e $[\bar{F}_{11}]_A$.

Nas grandes estruturas, em que mesmo a inversão em computador pode constituir dificuldade, esta diagonalização é de grande utilidade, pois cada submatriz pode ser invertida separadamente. Convém lembrar que não é possível resolver a estrutura hiperestática sem inverter a matriz $[\bar{F}_{11}]$.

A outra matriz de flexibilidade que interessa à solução é a matriz $[\bar{F}_{10}]$. No presente caso, tem-se:

$$[\bar{F}_{10}] = \begin{bmatrix} [\bar{B}]_S^T \\ -[\bar{B}_1]_A^T \end{bmatrix} [f] [\bar{B}_0] = \begin{bmatrix} [\bar{F}_{10}]_S \\ -[\bar{F}_{10}]_A \end{bmatrix}$$

Admita-se que as coordenadas de referência destinadas às cargas sejam dispostas simetricamente (embora os vetores $\{R\}$ não obedeçam à simetria).

As equações de elasticidade são:

$$\begin{bmatrix} [\bar{F}_{10}]_S \\ -[\bar{F}_{10}]_A \end{bmatrix} \{R\} + \begin{bmatrix} [\bar{F}_{11}]_S & 0 \\ 0 & [\bar{F}_{11}]_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\}_S \\ \{X\}_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde:

$$\begin{cases} \{X\}_S = -[\bar{F}_{11}]_S^{-1} [\bar{F}_{10}]_S \{R\} \\ \{X\}_A = -[\bar{F}_{11}]_A^{-1} [\bar{F}_{10}]_A \{R\} \end{cases}$$

Como se vê, os hiperestáticos dos primeiro e segundo grupos têm solução independente.

Deve ser observado que:

1. se o carregamento dado for simétrico, tem-se

$$[\bar{F}_{10}]_S \{R\} \neq \{0\} \quad \text{e} \quad [\bar{F}_{10}]_A \{R\} = \{0\}$$

$$\{X\}_A = \{0\} \quad (\text{o 2.º grupo é nulo});$$

2. se o carregamento proposto for anti-simétrico, será

$$[\bar{F}_{10}]_S \{R\} = \{0\} \quad \therefore \quad \{X\}_S = \{0\} \quad (\text{o 1.º grupo é nulo}).$$

Se a estrutura for simétrica em relação a dois eixos (v e h), como na Fig. 7.11.2, a ruptura dos vínculos e estabelecimento dos hiperestáticos pode ser feita de sorte que estes sejam grupados em quatro conjuntos:

1. o dos simétricos em relação a v e h ;
2. o dos simétricos em relação a h e anti-simétricos em relação a v ;

- 3. o dos simétricos em relação a v e anti-simétricos em relação a h ;
- 4. o dos anti-simétricos em relação a v e h .

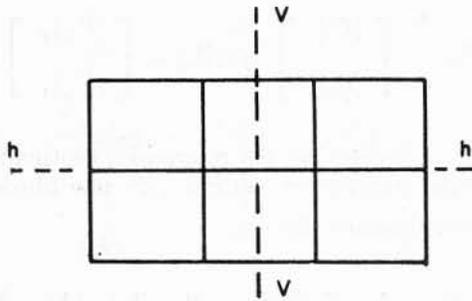


Fig. 7.11.2

A matriz $[\bar{F}_{11}]$ ficará subdividida em quatro submatrizes, dispostas em banda:

$$[\bar{F}_{11}] = \begin{bmatrix} [\bar{F}_{11}]_{SvSh} & & & \\ & [\bar{F}_{11}]_{SvAh} & & \\ & & [\bar{F}_{11}]_{AvSh} & \\ & & & [\bar{F}_{11}]_{AvAh} \end{bmatrix}$$

Haverá quatro partes independentes na solução, fornecendo os quatro grupos de hiperestáticos:

$$\{X\}_{SvSh}; \{X\}_{SvAh}; \{X\}_{AvSh} \text{ e } \{X\}_{AvAh}.$$

Se o carregamento for, por exemplo, simétrico em relação a h , só não serão nulos os primeiro e terceiro grupos. Se for anti-simétrico em relação a ambos os eixos, só existirá o quarto grupo.

7.11.1. Exemplos

1. Considere-se a estrutura simétrica da Fig. 7.11.3a (todas as barras não-rígidas têm mesmo EJ). Um arranjo de cargas e reações conduz (a menos de erros pequenos de esforços normais) a situação da Fig. b, que se pode considerar anti-simétrica em relação ao eixo horizontal u e ao eixo vertical v (dupla anti-simetria).

A estrutura dada é 6 vezes hiperestática e o sistema principal escolhido foi o das Figs. c a g.

Reservando a coordenada de referência n.º 1 para o carregamento (Fig. g), foram fixadas as demais tendo em vista 4 grupos de hiperestáticos:

— na Fig. c, para hiperestáticos que produzem efeitos simétricos tanto em relação a u como em relação a v ($SuSv$);

— na Fig. d, para os simétricos em relação a u e anti-simétricos em relação a v ($SuAv$);

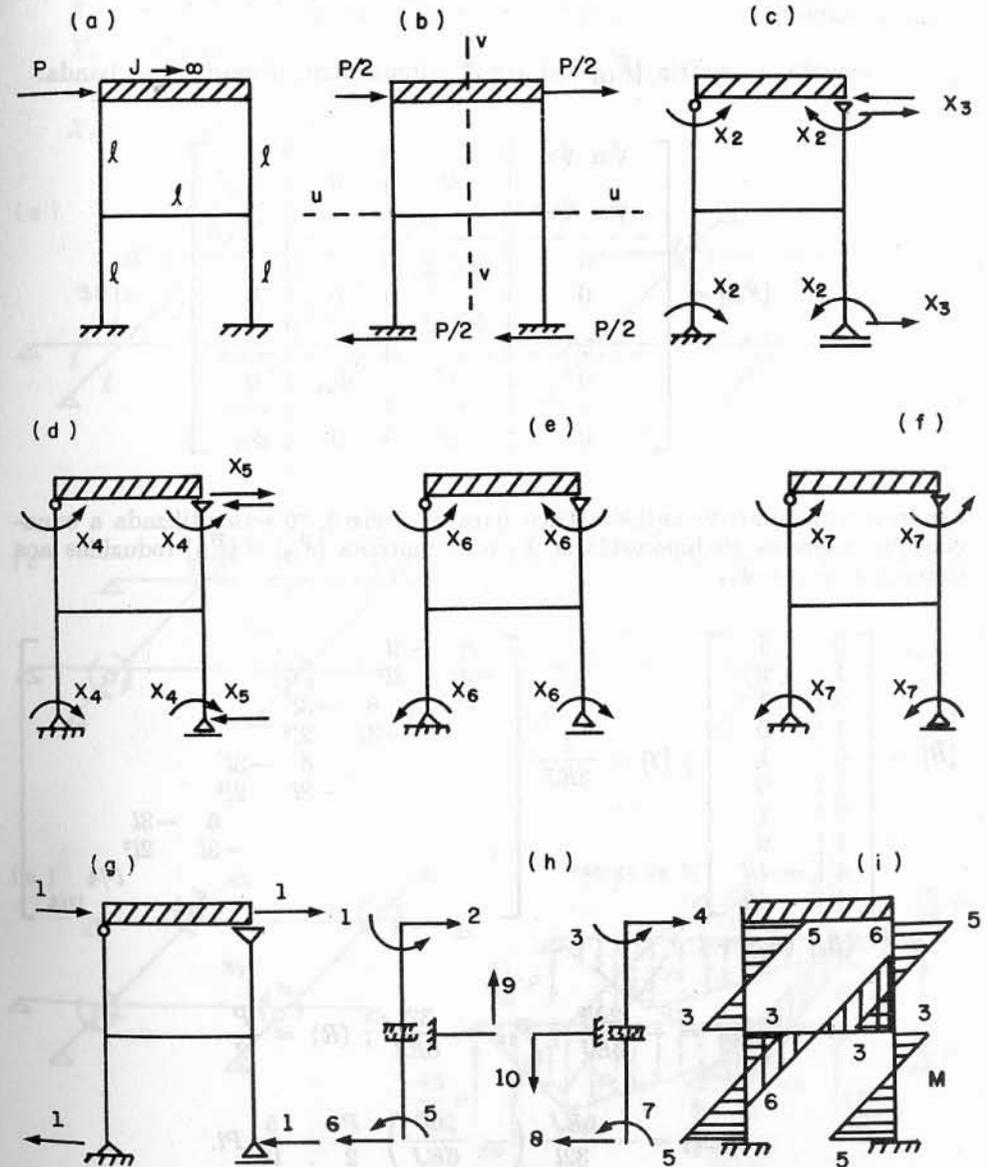


Fig. 7.11.3 (x P l / 16)

— na Fig. e é prevista a situação $AuSv$;

— finalmente, na Fig. f, há um hiperestático correspondente à *anti-simetria biaxial* ($AuAv$).

Observe-se que no total há 6 hiperestáticos (tantos quantos graus de indeterminação havia).

Evidentemente, a matriz $[\bar{F}_{11}]$ vai ter 4 submatrizes, dispostas em banda:

$$[\bar{F}_{11}] = \begin{bmatrix} \psi_{22} & \psi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{32} & \psi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \psi_{44} & \psi_{45} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{54} & \psi_{55} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \psi_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{77} \end{bmatrix}$$

Sendo o carregamento anti-simétrico para os 2 eixos, só será utilizada a equação que interessa ao hiperestático X_7 e às matrizes $[\bar{F}_{10}]$ e $[\bar{F}_{11}]$ reduzidas aos elementos ψ_{70} e ψ_{77} :

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -4/l \\ 4 & -4/l \end{bmatrix} ; [f] = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 6 & -3l \\ -3l & 2l^2 \\ l^2/4 & \\ l^2/4 & \end{bmatrix}$$

$(\bar{B}_0) (\bar{B}_7)$

$$\bar{F}_{70} = -\frac{20l^2}{6EJ} ; \bar{F}_{77} = \frac{32l}{6EJ} ; \{R\} = \frac{P}{2}$$

$$X_7 = -\frac{6EJ}{32l} \left(-\frac{20l^2}{6EJ} \right) \frac{P}{2} = \frac{5}{16} Pl$$

Daí vem o diagrama final da Fig. i.

2. A grelha simétrica da Fig. 7.11.4a tem barras de mesmo EJ . Não há engaste entre as barras. O carregamento (assimétrico) e coordenadas de referência para cargas constam da Fig. a.

Os hiperestáticos estão divididos em grupos X_4, X_5, X_6 e X_7 , de sorte que:

X_4 é simétrico em relação a X e a Y ($S_X S_Y$);

X_5 é ($A_X S_Y$);

X_6 é ($S_X A_Y$);

X_7 é ($A_X A_Y$).

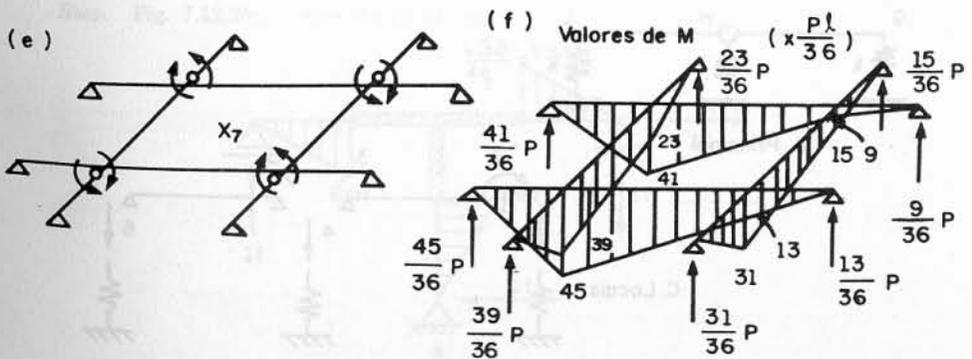
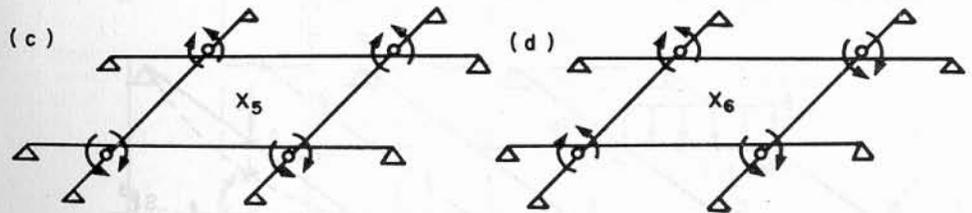
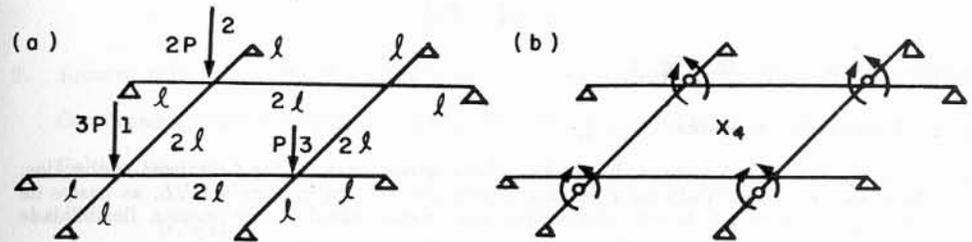


Fig. 7.11.4

Adotado um sistema qualquer de coordenadas locais, a matriz $[\bar{F}_{11}]$ é:

$$[\bar{F}_{11}] = \frac{l}{3EJ} \begin{bmatrix} 32 & & & \\ & 72 & & \\ & & 18 & \\ & & & 16 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista o vetor $\{R\}$:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} 3P \\ 2P \\ P \end{Bmatrix}$$

chega-se à solução da Fig. f.

7.12. Exercícios Propostos

1. Na grelha da Fig. 7.12.1a, todas as hastes são iguais, com E, J e l supostos conhecidos. Num modelo simplificado para estudar os esforços na viga carregada GHL , as hastes de apoio AB, CD e EF foram substituídas por apoios elásticos, de mesma flexibilidade $f = \frac{\beta}{6EJ}$.

Resolva pelo método da flexibilidade, obtendo momentos fletores e reações na viga GHL . (Sugestões. Sistema principal e coordenadas locais da figura.)

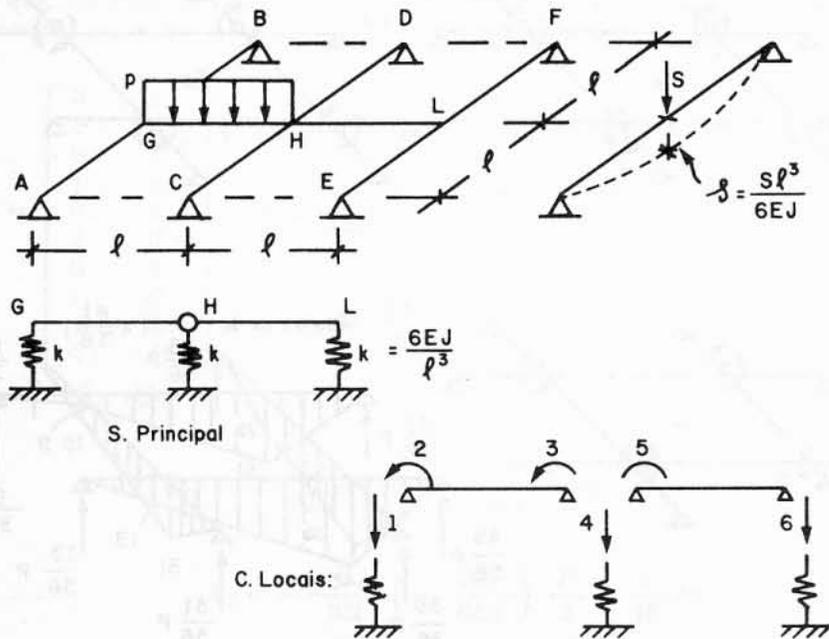


Fig. 7.12.1a

Resp. Na Fig. 7.12.1b.

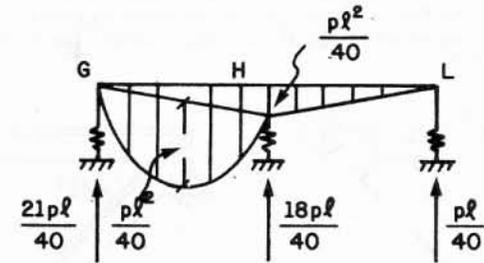


Fig. 7.12.1b

2. Resolva pelo método da flexibilidade, obtendo momentos fletores e reações. (Sugestão. Coordenadas locais indicadas na figura, com $f = \frac{\beta}{3EJ}$, sendo $EJ = 7200 \text{ tm}^2$.) Calcule também o deslocamento vertical do ponto D.

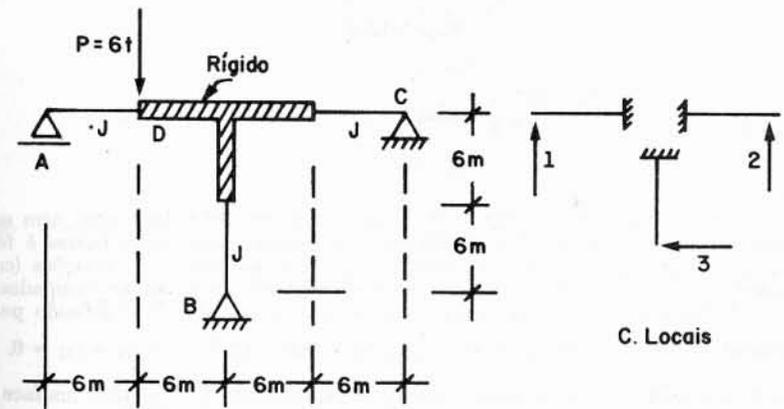


Fig. 7.12.2a

Resp. Fig. 7.12.2b; $r_1 = 0,5 \times 10^{-2} \text{ m}$.

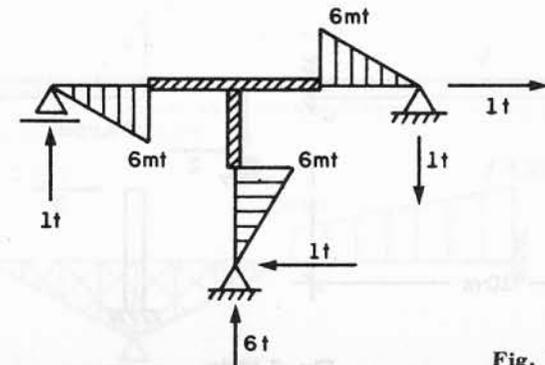


Fig. 7.12.2b

3. As barras da estrutura da Fig. 7.12.3 (contidas num plano horizontal e com apoios isostáticos) têm seção reta retangular, com altura constante $h = 0,5$ m. Havendo diminuição de temperatura de 20°C na face superior das vigas e aumento de 20°C na face inferior, calcule as rotações despertadas segundo as duas coordenadas de referência. O coeficiente térmico é $\alpha = 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

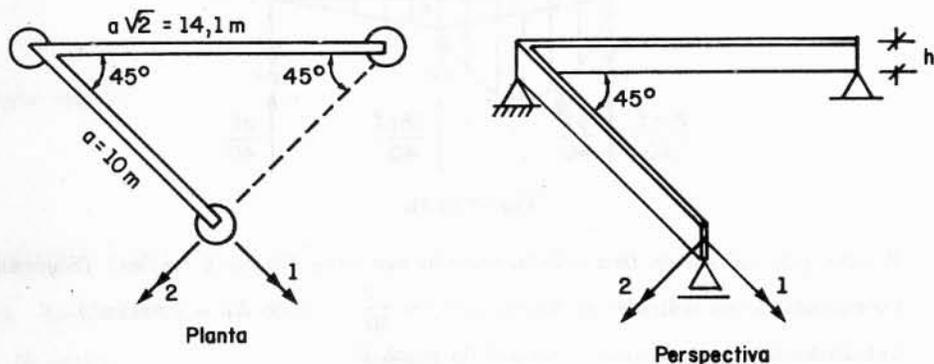


Fig. 7.12.3

Resp. $\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} -4 \times 10^{-3} \\ +4 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$ (rad).

4. Na estrutura hiperestática da Fig. 7.12.4a, as hastes vertical e horizontal têm seção retangular com $h = 0,5$ m e $EJ = 33\,333 \text{ tm}^2$. A ligação entre essas hastes é feita por uma pequena placa de material elástico, que permite livremente as rotações (como articulação), mas reage a deslocamentos lineares relativos entre as extremidades B das hastes. O elemento elástico de ligação (coordenadas locais 1 e 2) é definido pelos seus coeficientes de flexibilidade $f_{11} = 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{t}}$; $f_{22} = 0,5 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{t}}$ e $f_{12} = f_{21} = 0$.

O conjunto é submetido a variações desiguais de temperatura $t_i = -15^\circ\text{C}$ (na face externa das hastes) e $t_s = +15^\circ\text{C}$ (na face interna). Resolva pelo método da flexibilidade e obtenha o diagrama do momento fletor.

(Sugestão. Sistema principal com articulações em A e C.)

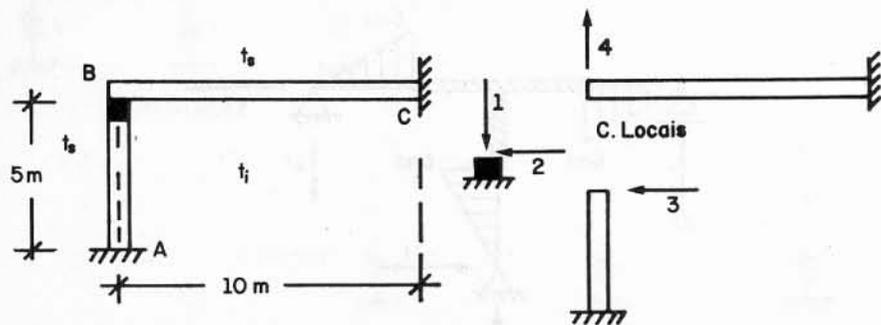


Fig. 7.12.4a

Resp. Na Fig. 7.12.4b.

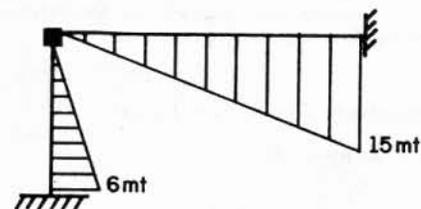


Fig. 7.12.4b

5. A estrutura da Fig. 7.12.5a é submetida ao carregamento indicado. Resolva pelo método da flexibilidade e obtenha o diagrama do momento fletor.

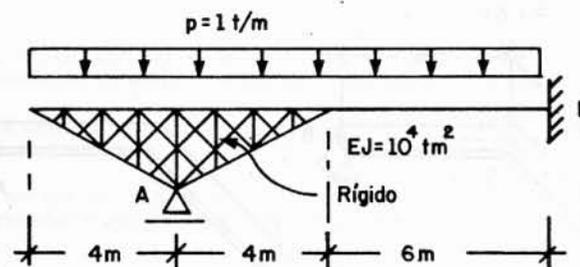


Fig. 7.12.5a

Resp. Na Fig. 7.12.5b.

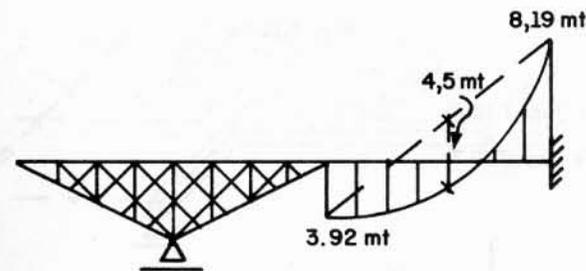


Fig. 7.12.5b

6. A mesma estrutura do Exerc. 7.12.5 sofre um recalque vertical de um centímetro, do apoio A, $\rho_{AV}(\downarrow)$. Considerando só os efeitos do recalque, resolva novamente e obtenha o diagrama dos momentos fletores.

Resp. Na Fig. 7.12.6.

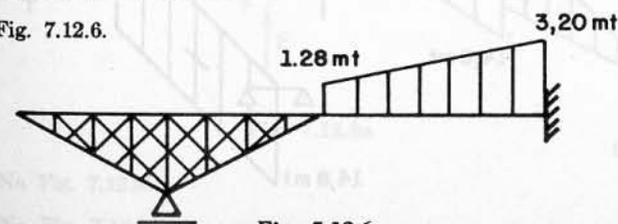


Fig. 7.12.6

7. Na estrutura da Fig. 7.12.7a, as articulações em A e B são cilíndricas, proporcionando engastamento à torção. Resolva pelo método da flexibilidade, obtendo os momentos fletores e torsões para os dois seguintes casos:

- (a) Ação da carga concentrada $P = 4t$ (ver figura);
- (b) Efeitos de recalques do apoio A:

$\rho_{AV} = 1 \text{ cm}$, vertical, dirigido para baixo, e $\rho_{A\theta} = 10^{-3} \text{ rad}$, rotação em torno do eixo x , no sentido do movimento dos ponteiros do relógio. As duas hastes têm $EJ = GJ_0^* = 50\,000 \text{ tm}^2$, devendo ser computada a influência da torção.

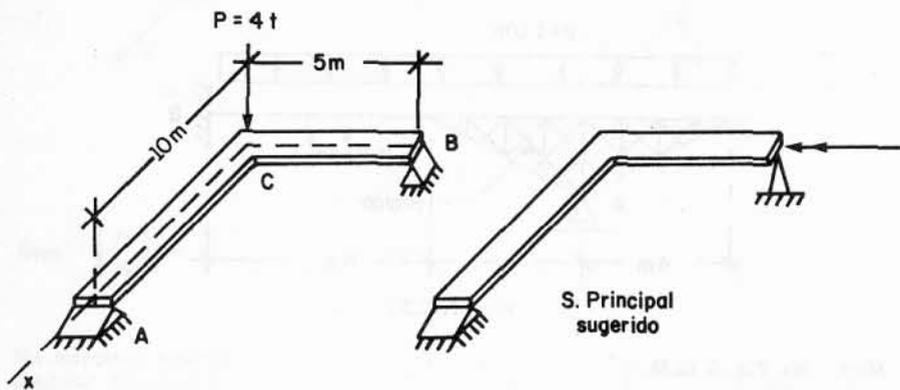


Fig. 7.12.7a

Resp. (a) Na Fig. 7.12.7b.
(b) Na Fig. 7.12.7c.

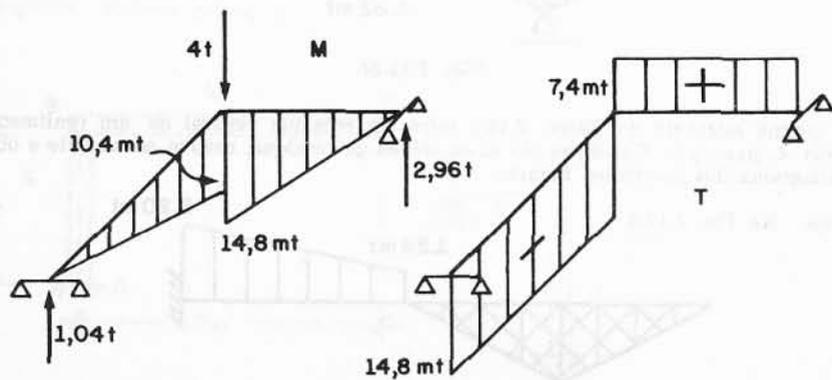


Fig. 7.12.7b

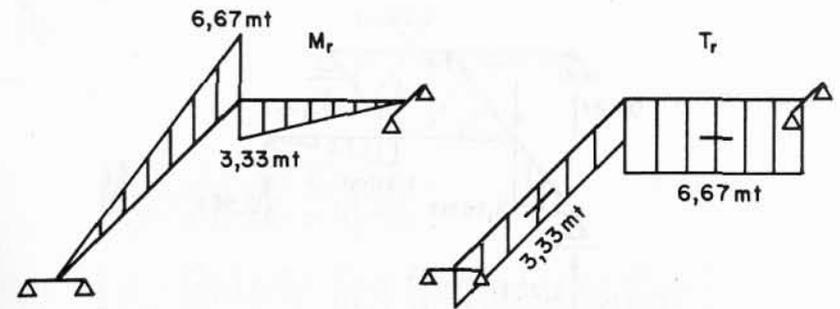


Fig. 7.12.7c

8. A estrutura considerada compõe-se de um bloco central BCDE, rígido, e 3 vigas iguais com seção retangular de altura $h = 0,5 \text{ m}$; $EJ = 9\,000 \text{ tm}^2$ e coeficiente térmico $\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$.

- (a) Resolva e obtenha as reações e momentos fletores causados pelas duas forças $P = 2t$ da figura 7.12.8a;
- (b) Resolva novamente, considerando apenas um aumento de temperatura de 30°C na face inferior das vigas, sem modificação na face superior (admita que o bloco não se deforma).

(Sugestão. Coordenadas locais da figura.)

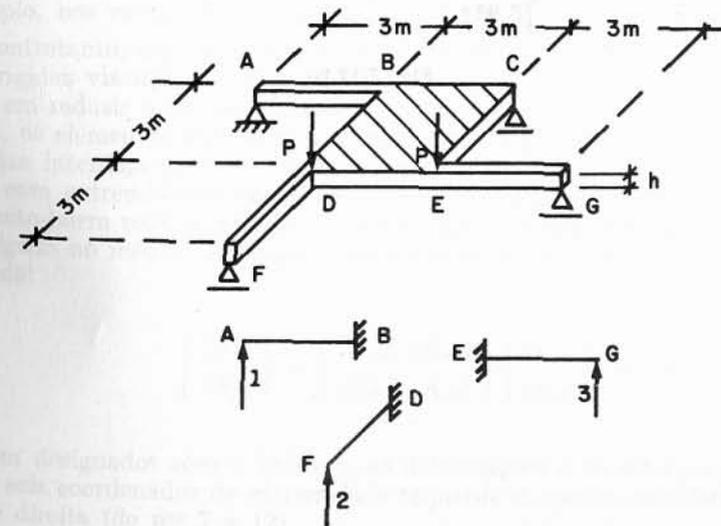


Fig. 7.12.8a

Resp. (a) Na Fig. 7.12.8b.
(b) Na Fig. 7.12.8c.

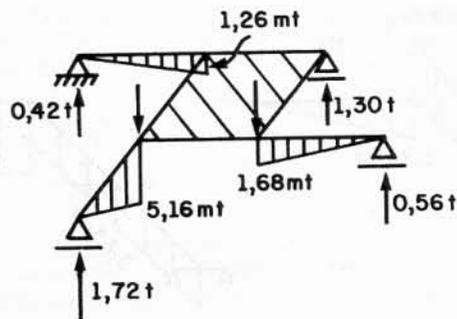


Fig. 7.12.8b

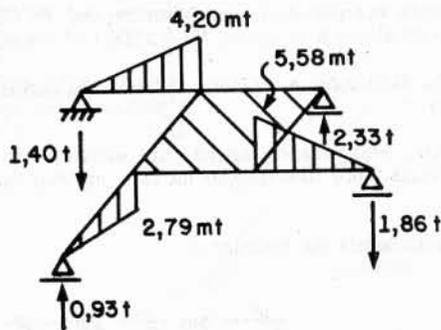


Fig. 7.12.8c

Método da Rigidez (ou Método dos Deslocamentos)

8.1. Matriz de Rigidez de uma Barra

No Item 7.1, foi estudada uma forma completa de determinar a matriz de flexibilidade de uma barra, abrangendo vários tipos de coordenadas e os casos de peças curvas, planas ou não, com seção constante ou variável. Foram considerados, inclusive, os casos em que se julgam significativas as deformações provenientes de todos os esforços.

Deste modo, a determinação da matriz de rigidez do elemento se torna mais cômoda, em geral, pela simples inversão da matriz de flexibilidade. Isto será válido, por exemplo, nos casos de barras curvas, nos de barras com J variável etc.

Há, entretanto, uma dificuldade a contornar. É que quando se usa o método da rigidez visando obviamente à solução em computador, não há grande empenho em reduzir o número de coordenadas locais (no caso da matriz de flexibilidade, os elementos são peças engastadas ou biapoiadas, para que não haja coordenadas interdependentes). Assim, surge agora freqüentemente o caso do elemento com extremidades livres, com 12 coordenadas. A Fig. 8.1.1a mostra um elemento-barra para o método da flexibilidade e a Fig. 8.1.1b, o que poderá ser empregado no método da rigidez (com 12 coordenadas locais). Neste caso, seria obtido:

$$\begin{Bmatrix} \{S\}_e \\ \{S\}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}] & [K_{ed}] \\ [K_{de}] & [K_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{s\}_e \\ \{s\}_d \end{Bmatrix}$$

onde foram designados com o índice e as deformações e os esforços correspondentes às seis coordenadas da extremidade esquerda e , com d , as referentes à extremidade direita (de nº 7 a 12).

A matriz K , que é (12×12) , fica então com 4 submatrizes:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ee}] & [K_{ed}] \\ [K_{de}] & [K_{dd}] \end{bmatrix}$$

Não resta a menor dúvida de que se podem referir as submatrizes $[K_{ee}]$ e $[K_{da}]$ (Fig. 8.1.1b) à matriz de flexibilidade $[F]$ de elementos como os 8.1.1a

$$[K_{da}] = [F_{da}]^{-1},$$

$$[K_{ee}] = [F_{ee}]^{-1}.$$

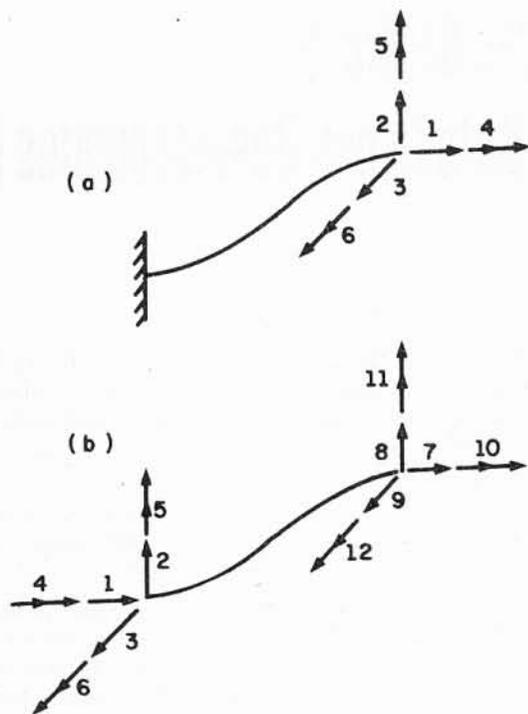


Fig. 8.1.1

Quanto às duas outras submatrizes, uma das quais é transposta da outra, observações feitas em 7.1 permitem concluir que

$$[K_{de}] = -[T][F_{ee}]^{-1} = -\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} [F_{ee}]^{-1}.$$

Portanto:

$$[K] = \begin{bmatrix} [F_{ee}]^{-1} & -\begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} [F_{da}]^{-1} \\ -\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} [F_{ee}]^{-1} & [F_{da}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{matriz } 12 \times 12)$$

ou simplesmente
$$[K] = \begin{bmatrix} [I] & -[T]^T \\ -[T] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [F_{ee}]^{-1} \\ [F_{da}]^{-1} \end{bmatrix}.$$

No caso da barra plana da Fig. 8.1.2, é fácil obter diretamente a matriz de rigidez:

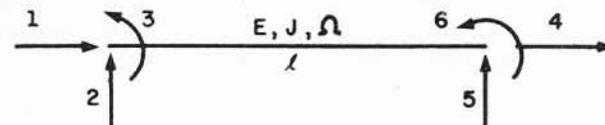


Fig. 8.1.2

$$[K] = \begin{bmatrix} E\Omega/l & 0 & 0 & -E\Omega/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 & 0 & -12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 \\ 0 & 6EJ/l^2 & 4EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 2EJ/l \\ -E\Omega/l & 0 & 0 & E\Omega/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 & 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ 0 & 6EJ/l^2 & 2EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{bmatrix}.$$

Em cada coluna, devem ser nulos, por motivos de equilíbrio ($\sum X = 0$ e $\sum Y = 0$):

- a soma dos 1.º e 4.º termos;
- a soma dos 2.º e 5.º termos.

Nota. Tratando-se de uma barra sem apoios (com seis movimentos livres), esta matriz de rigidez tem de ser singular, pois no mesmo sistema de coordenadas, a matriz de flexibilidade — que seria a sua inversa — não pode existir. E de fato, é fácil notar que a primeira e a quarta colunas são linearmente dependentes (uma delas é múltipla da outra).

8.2. Grau de Indeterminação Cinemática

O menor número de deslocamentos nodais r , cujo conhecimento é necessário para que se determinem univocamente as deformações (e os esforços) nos elementos é o grau de indeterminação cinemática.

Será considerado na solução através de d coordenadas destinadas a esses deslocamentos eleitos como incógnitas x .

8.3. Solução Geral pelo Método da Rigidez

Considere-se o caso geral da resolução de uma estrutura submetida:

- a. a deslocamentos (recalques ou outros) impostos a alguns de seus nós;
- b. a ações nodais aplicadas (forças e momentos).

Fixadas as coordenadas de referência (das quais d são peculiares aos deslocamentos eleitos como incógnitas x), a estrutura se torna cinematicamente determinada. Convém frisar que a escolha dos d deslocamentos não é arbitrária, pois depende de uma análise que deve levar em conta os tipos de deformações (axiais etc.) dos elementos considerados significativos. Em princípio, haverá coordenadas onde houver cargas aplicadas, deslocamentos nodais impostos, deslocamentos x e reações a calcular.

A matriz de incidência cinemática $[\bar{A}]$ terá então duas submatrizes: $[\bar{A}_1]$ para transformar $\{x\}$ em deformações $\{s\}$; $[\bar{A}_0]$, para transformar em deformações os demais deslocamentos nodais segundo as coordenadas:

$$\{s\} = \begin{bmatrix} [\bar{A}_0] \\ [\bar{A}_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}.$$

A matriz de rigidez da estrutura desmembrada é função das coordenadas locais e seu aspecto em submatrizes dispostas em banda já é conhecido:

$$[k] = \begin{bmatrix} [k]_I & & & \\ & [k]_{II} & & \\ & & \ddots & \\ & & & [k]_n \end{bmatrix}.$$

A matriz de rigidez total, da estrutura integrada, é

$$[\bar{K}] = [\bar{A}]^T [k] [\bar{A}]$$

ou

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{A}_0]^T \\ [\bar{A}_1]^T \end{bmatrix} [k] \begin{bmatrix} [\bar{A}_0] \\ [\bar{A}_1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{A}_0]^T [k] [\bar{A}_0] & [\bar{A}_0]^T [k] [\bar{A}_1] \\ [\bar{A}_1]^T [k] [\bar{A}_0] & [\bar{A}_1]^T [k] [\bar{A}_1] \end{bmatrix}$$

ou

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{00}] & [\bar{K}_{01}] \\ [\bar{K}_{10}] & [\bar{K}_{11}] \end{bmatrix}$$

onde

$[\bar{K}_{00}]$ é a matriz de rigidez (quadrada e simétrica) que dá as ações nodais ou reações $\{R\}$ segundo $\{r\}$ (na hipótese de $\{x\} = \{0\}$), associadas às configurações deformadas com $\{r\}$ unitários;

$[\bar{K}_{01}]$ é a matriz de rigidez cruzada que dá as ações ou reações $\{R\}$ associadas a configurações deformadas com $\{x\}$ unitários;

$[\bar{K}_{10}]$ é a matriz de rigidez cruzada que dá as ações $\{X\}$ nas direções de $\{x\}$, associadas a deformações com $\{r\}$ unitários e $\{x\}$ nulos;

$[\bar{K}_{11}]$ é a matriz de rigidez direta (quadrada e simétrica), que dá as ações $\{X\}$ associadas a configurações deformadas com $\{x\}$ unitários e $\{r\}$ nulos.

As equações de equilíbrio são

$$\begin{Bmatrix} \{R\} \\ \{X\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{00}] & [\bar{K}_{01}] \\ [\bar{K}_{10}] & [\bar{K}_{11}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}.$$

Se forem conhecidos os deslocamentos impostos $\{r\}$ e as ações aplicadas $\{X\}$, pode-se resolver o 2.º grupo de equações obtendo:

$$[\bar{K}_{10}] \{r\} + [\bar{K}_{11}] \{x\} = \{X\}$$

donde

$$\{x\} = [\bar{K}_{11}]^{-1} (\{X\} - [\bar{K}_{10}] \{r\})$$

Conhecidas as incógnitas $\{x\}$, tem-se:

$$\{R\} = [\bar{K}_{00}] \{r\} + [\bar{K}_{01}] \{x\} \quad (\text{ações e reações}).$$

Os esforços são:

$$\{S\} = \{S_0\} + [k] \{s\}$$

ou

$$\{S\} = \{S_0\} + [k] \begin{bmatrix} [\bar{A}_0] \\ [\bar{A}_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}$$

$\{S_0\}$ são os esforços de engastamento perfeito.

Observação. Se não houver recalques, mas apenas cargas aplicadas, $\{X\}$, obtém-se

$$\{X\} = [\bar{K}_{11}] \{x\}$$

donde

$$\{x\} = [\bar{K}_{11}]^{-1} \{X\}.$$

Os esforços são:

$$\{S\} = \{S_0\} + [k] [\bar{A}_1] [\bar{K}_{11}]^{-1} \{X\}.$$

Cargas nodais na Fig. 8.3.3:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} -\frac{pl^2}{12} \\ -\frac{pl^2}{24} \end{Bmatrix}$$

Solução

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{l}{188EJ} \begin{bmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -pl^2/12 \\ -pl^2/24 \end{Bmatrix} = -\frac{pl^3}{2256EJ} \begin{Bmatrix} 15 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Esforços:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ pl^2/12 \\ -pl^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ pl^2/8 \\ -pl^2/8 \end{Bmatrix} + [k] \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{15pl^3}{2256EJ} \\ -\frac{4pl^3}{2256EJ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -30 \\ -60 \\ 60 \\ -117 \\ -8 \\ -16 \\ 133 \\ -145 \end{Bmatrix}, \frac{pl^3}{1128}$$

8.4. Processo da Rigidez Direta

É interessante resolver a mesma estrutura utilizando o processo da rigidez direta, que é cômodo neste caso. Considerem-se as coordenadas da Fig. 8.4.1,

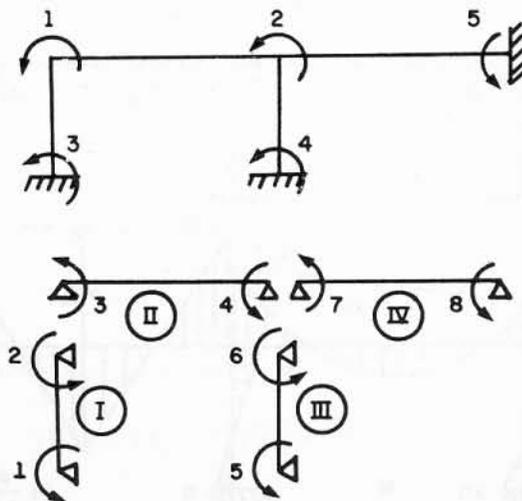


Fig. 8.4.1

onde 1 e 2 definem as rotações incógnitas a considerar e 3, 4 e 5 localizam reações-momento e recalques angulares porventura ocorridos nos apoios.

É necessário exprimir a correspondência entre as coordenadas gerais e locais, que pode ser assinalada nas próprias matrizes de rigidez dos elementos I, II ..., barras da estrutura:

$$[k]_{I} = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \end{matrix}; [k]_{II} = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix};$$

$$[k]_{III} = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{4} \end{matrix}; [k]_{IV} = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{5} \end{matrix};$$

Note-se que os números colocados em círculos em cima e ao lado das colunas e linhas, respectivamente, indicam a coordenada de referência correspondente, em posição, à coordenada local de que trata a coluna ou linha da matriz de rigidez das barras.

Assim, no caso da barra I, a primeira coluna é gerada atribuindo-se deslocamento unitário $s_1 = 1$. O número 3 colocado em cima indica que a coordenada de referência n.º 3 também se refere à rotação no mesmo local. Há, portanto, coincidência entre a coordenada local n.º 1 e a de referência n.º 3. E assim por diante.

Para obter a matriz de rigidez $[\bar{K}]$ da estrutura integrada, basta calcular cada termo \bar{K}_{ij} somando-se todos os valores contidos nas matrizes das barras, que tenham a ordem ij na numeração contida nos círculos.

Por exemplo, $\bar{K}_{11} = \frac{EJ}{l} (8 + 4) = \frac{12EJ}{l}$

$\bar{K}_{12} = \frac{2EJ}{l}$; $\bar{K}_{22} = \frac{EJ}{l} (4 + 8 + 4) = \frac{16EJ}{l}$ e assim por diante;

Os resultados são

$$[\bar{K}] = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 0 & 4 & 2 \\ \hline 4 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(nesta matriz podem ser identificadas as submatrizes:

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{1r} \\ \bar{K}_{r1} & \bar{K}_{rr} \end{bmatrix}$$

a significação dessas submatrizes é conhecida).

Para o carregamento dado no exemplo em estudo, e considerando nulos os recalques nos apoios, tem-se:

$$\frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 0 & 4 & 2 \\ \hline 4 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pl^2/12 \\ -pl^2/24 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix}$$

A resolução da primeira parte dá:

$$\frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pl^2/12 \\ -pl^2/24 \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = -\frac{pl^3}{2256EJ} \begin{Bmatrix} 15 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

A segunda parte das equações fornece as reações (momentos):

$$\begin{Bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -pl^2/8 \end{Bmatrix} + \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 15 \\ 4 \end{Bmatrix} \left(-\frac{pl^3}{2256EJ} \right) + \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -30 \\ -8 \\ -145 \end{Bmatrix} \frac{pl^3}{1128}$$

(estes são valores já obtidos, na solução anterior).

Nota. Como se pode perceber, neste tipo de solução não há necessidade de formular a matriz de incidência cinemática $[\bar{A}]$, para poder chegar à estrutura integrada. Não é difícil perceber, por outro lado, que as ligações cinemáticas entre os elementos do sistema aparecem (como não podia deixar de ser), embora discretamente, apresentadas sob a forma de correspondência entre números-índices, como está mostrado nas matrizes $[k]_I$, $[k]_{II}$ etc. É incontestável que, do ponto de vista computacional, este modo de proceder é mais objetivo e, por isso, tem emprego corrente nos casos de rotina. Será constatado depois, em situações

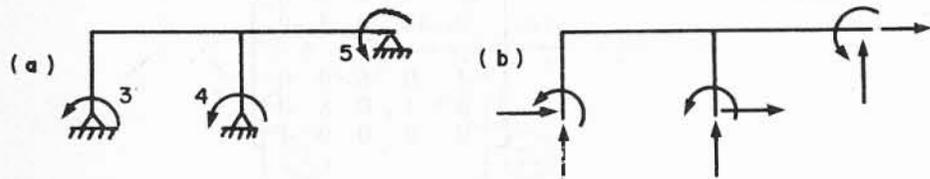


Fig. 8.4.2

que envolvem estruturas de configuração e ligação da matriz $[K]$ vai trazer outras dificuldades.

e a formulação direta

A solução através da matriz de incidência, menos prática em termos de rotina, é geral, pois decorre de considerações energéticas.

Outra particularidade curiosa é que a matriz $[\bar{K}]$ obtida não é singular, fato este que decorre de não ter sido considerada inteiramente livre a estrutura, quando se destinaram coordenadas para reações apenas quanto aos momentos de engastamento nos apoios (Fig. 8.4.2a)

Se fossem estabelecidas para reações as coordenadas da Fig. b, resultaria uma matriz $[\bar{K}]$ singular, pois seria a matriz de rigidez de um sólido livre.

8.4.1. Segundo Exemplo

Vai ser resolvida agora uma viga com engastes elásticos, capazes de permitir rotações proporcionais aos respectivos momentos de engastamento (tipo de ligação este que ocorre freqüentemente nas associações entre peças de estrutura e, mesmo, nos apoios).

No presente caso, é dada a rigidez à rotação dos engastes elásticos K_1 e K_2 . Apenas para efeito numérico admitiu-se que os valores correspondentes sejam $K_1 = K_2 = \frac{EJ}{l} \left(\frac{mt}{rad} \right)$, onde E , J e l são os das barras.

O problema tem 2 graus de indeterminação cinemática: as rotações realmente ocorridas em C e B.

Na decomposição em elementos (Fig. 8.4.3e), os engastes elásticos, funcionando como verdadeiras molas, são considerados.

Resulta:

$$[\bar{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; [k] = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ & 4 & 2 \\ & 2 & 4 \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

rigidez dos engastes elásticos.

Matriz de rigidez para o conjunto:

$$[\bar{K}_{11}] = [\bar{A}_1]^T [k] [\bar{A}_1] = \frac{EJ}{9} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix};$$

Carregamento nodal equivalente:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} Pl/8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolução:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = [\bar{K}_{11}]^{-1} \{X\} = \frac{l}{41EJ} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Pl/8 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5Pl^2/328EJ \\ -2Pl^2/328EJ \end{Bmatrix}$$

Os esforços $\{S\}$ são:

$$\{S\} = \{S_0\} + [k] [\bar{A}_1] \{x\}$$

(pode ser aplicado elemento por elemento).

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Pl/8 \\ -Pl/8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10 \\ 20 \\ 5 \\ 16 \\ 2 \\ -2 \end{Bmatrix} \frac{Pl}{328} = \begin{Bmatrix} 51 \\ -21 \\ 5 \\ 16 \\ 2 \\ -2 \end{Bmatrix} \frac{Pl}{328}$$

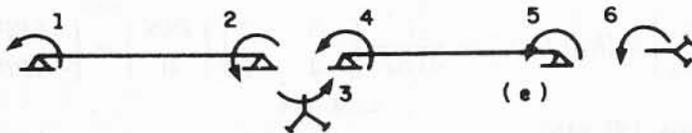
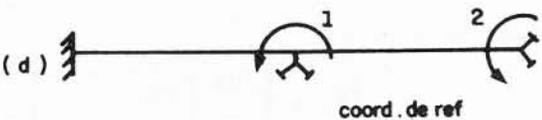
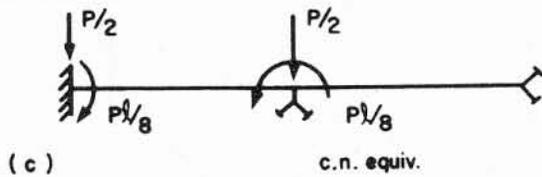
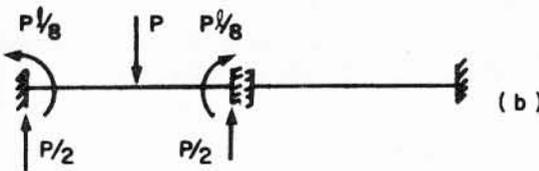
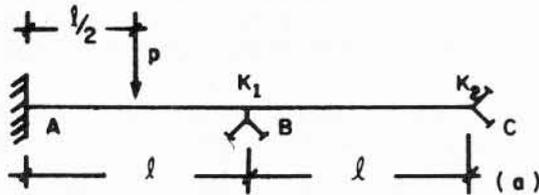


Fig. 8.4.3

O diagrama dos momentos fletores está na Fig. 8.4.4. (cotas a serem multiplicadas por $\frac{Pl}{328}$).

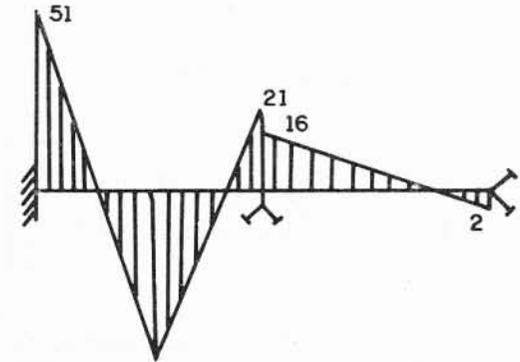


Fig. 8.4.4

Observação

Cálculo de reações. Se as coordenadas referentes às reações já não estiverem incluídas no sistema de referência, podem ser obtidas pela maneira já vista no método da flexibilidade.

Sejam $\{A\}$ as reações a calcular (os seus deslocamentos seriam $\{a\}$) (Fig. 8.4.5a).

Fazendo $a_1 = 1$, depois $a_2 = 1$ e $a_3 = 1$ (sempre com $x_1 = x_2 = 0$), ocorrem as configurações das Figs. b, c e d, que permitem fazer:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/l & -1/l & 0 \\ 1/l & -1/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1/l & -1/l \\ 0 & +1/l & -1/l \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [C] \{a\}.$$

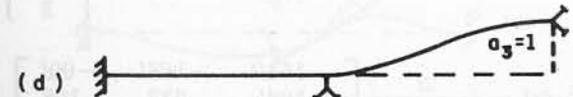
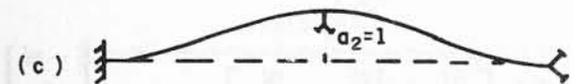
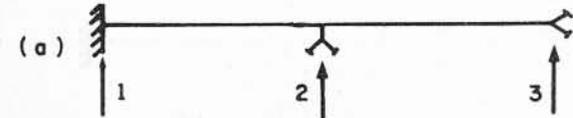


Fig. 8.4.5

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [\bar{K}_{11}]^{-1} \{X\} = \frac{2pl^3}{4947EJ} \begin{Bmatrix} -187 l \\ 204 p \\ 238 p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +0,743 pl \\ -0,041 pl^2 \\ -0,027 pl^2 \\ -0,330 pl \\ 0,082 pl^2 \\ 0,069 pl^2 \\ -0,412 pl \\ 0,096 pl^2 \\ 0,124 pl^2 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_0\} = \{S_0\} + |k| [\bar{A}_1] \{x\} =$$

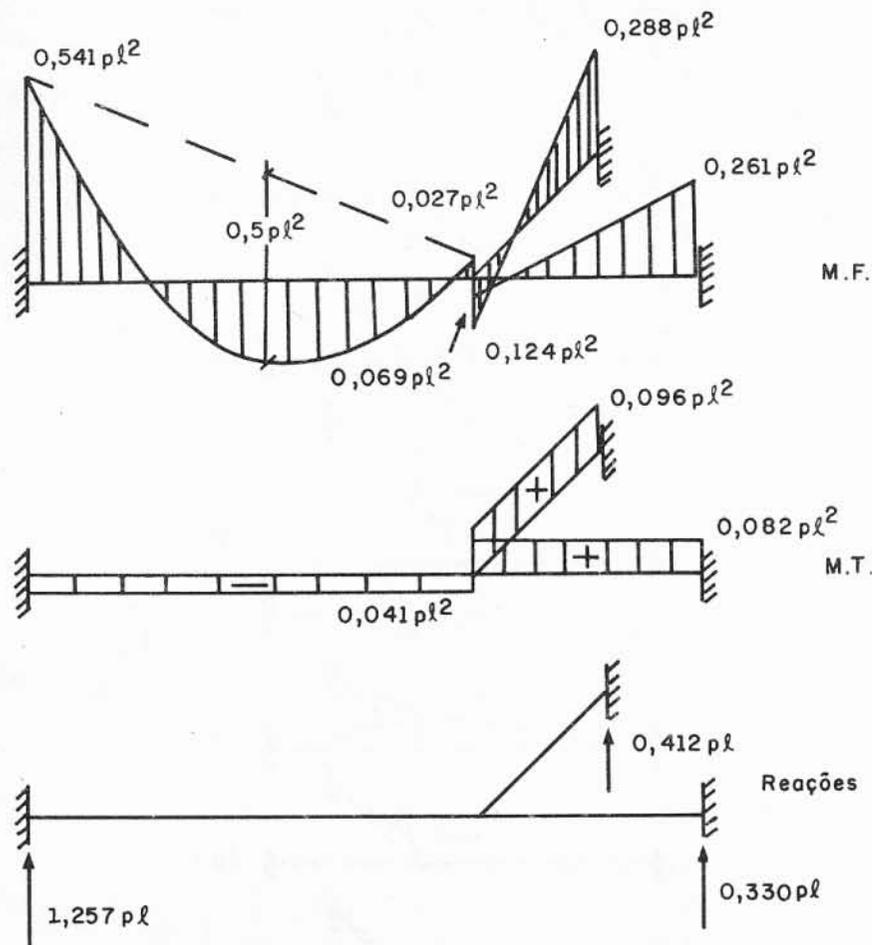


Fig. 8.4.7

8.5. Efeitos de Recalques de Apoios

Os deslocamentos impostos aos apoios ou outros nós da estrutura (expressos em coordenadas de referência) compõem o vetor $\{r\}$.

Como não há carregamento, mas apenas deslocamentos impostos (conhecidos, não coincidentes com x), as equações de equilíbrio são:

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{00}] & [\bar{K}_{01}] \\ [\bar{K}_{10}] & [\bar{K}_{11}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r\} \\ \{x\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

(onde $\{R\}$ são as ações mecânicas na direção dos $\{r\}$, associadas às configurações deformadas).

Solução

O segundo grupo de equações dá os deslocamentos incógnitos $\{x\}$:

$$[\bar{K}_{10}] \{r\} + [\bar{K}_{11}] \{x\} = \{0\}$$

donde

$$\{x\} = -[\bar{K}_{11}]^{-1} [\bar{K}_{10}] \{r\}$$

Observe-se que a solução é semelhante à que apresenta o método da flexibilidade, quando há carregamento exterior aplicado.

Estes valores de $\{x\}$, levados ao primeiro grupo de equações, dão as ações $\{R\}$ (que no caso de recalques constituem as reações de apoio correspondentes):

$$\{R\} = [\bar{K}_{00}] \{r\} + [\bar{K}_{10}]^T \{x\} \quad (\text{Obs.: } [\bar{K}_{01}] = [\bar{K}_{10}]^T)$$

ou ainda

$$\{R\} = ([\bar{K}_{00}] - [\bar{K}_{10}]^T [\bar{K}_{11}]^{-1} [\bar{K}_{10}]) \{r\}.$$

Os esforços nos elementos são:

$$\{S\} = [k] \begin{bmatrix} [\bar{A}_0] \\ [\bar{A}_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}$$

ou

$$\{S\} = [k] ([\bar{A}_0] + [\bar{A}_1] ([\bar{K}_{00}] - [\bar{K}_{10}]^T [\bar{K}_{11}]^{-1} [\bar{K}_{10}])) \{r\}.$$

Se a solução for conduzida pelo processo da rigidez direta, o tratamento é semelhante.

8.5.1. Exemplo

Mesma grelha do exemplo anterior. O apoio B sofre um recalque vertical

$$\rho_B = \frac{l}{1\,000}$$

Obter os momentos fletores e torsões.

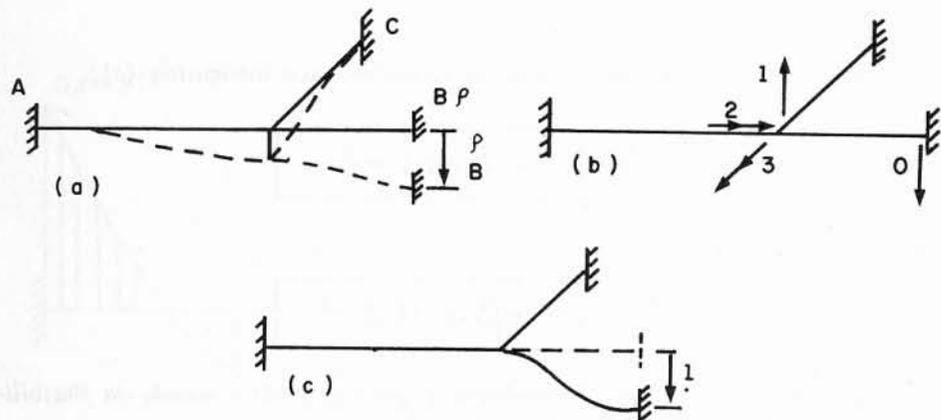


Fig. 8.5.1

Solução. A matriz de incidência $[\bar{A}_1]$ já foi obtida no exemplo anterior. As coordenadas de referência incluem agora mais uma (coordenada 0), na direção do recalque ρ_B . Tem-se:

$$\{\bar{A}_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(fazendo $r_0 = 1$ e obtendo as deformações em coordenadas locais).

Já foi obtida a matriz de rigidez:

$$[\bar{K}_{11}] = \frac{EJ}{2l^3} \begin{bmatrix} 51 & 12l & 9l \\ 12l & 11l^2 & 0 \\ 9l & 0 & 14l^2 \end{bmatrix}$$

Resultam agora

$$[\bar{K}_{10}] = [\bar{A}_1]^T [k] [\bar{A}_0] = \begin{Bmatrix} 24 \\ 0 \\ 12l \end{Bmatrix} \frac{EJ}{2l^3}$$

$$[\bar{K}_{00}] = [\bar{A}_0]^T [k] [\bar{A}_0] = \frac{12EJ}{l^3}$$

Já tendo sido obtida $[\bar{K}_{11}]^{-1}$, pode-se chegar diretamente a:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = -\frac{2l}{4947EJ} \begin{bmatrix} 154l^2 & -168l & -99l \\ -168l & 633 & 108 \\ -99l & 108 & 417 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 24 \\ 0 \\ 12l \end{Bmatrix} \cdot \frac{l}{1000} \cdot \frac{EJ}{2l^3} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -0,51 \times 10^{-3}l \\ +0,55 \times 10^{-3} \\ -0,53 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

No local onde houve recalque, a reação vertical é

$$R = [\bar{K}_{00}] \{r\} + [\bar{K}_{10}]^T \{x\} = (0,012 - 0,006 - 0,003) \frac{EJ}{l^2}$$

$$R = 0,003 \frac{EJ}{l^2}$$

$$\{S\} = [k] \begin{Bmatrix} [\bar{A}_0] \\ [\bar{A}_1] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r\} \\ \{x\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,03 \\ 0,27 \\ -0,30 \\ 2,83 \\ -0,55l \\ -0,83l \\ -2,78 \\ -0,53l \\ 0,83l \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \frac{EJ}{l^2}$$

Diagramas na Fig. 8.5.2 (Cotas a serem multiplicadas por $\frac{10^{-3}EJ}{l}$).

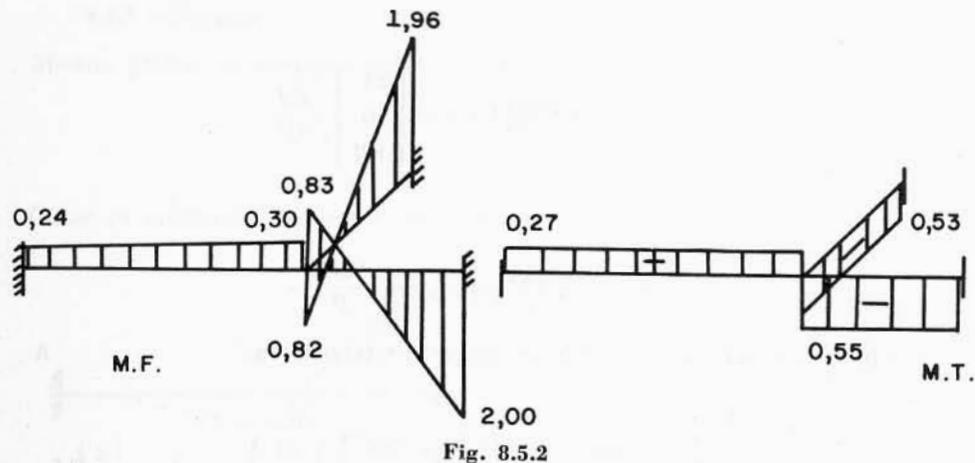


Fig. 8.5.2

8.6. O Método da Rigidez nos Casos de Variações de Temperatura e Modificações de Montagem

8.6.1. Reações de Engastamento Perfeito de uma Haste Sujeita a Temperatura ou Modificações

Anteriormente (Item 7.2) tratou-se da determinação das deformações de uma barra por efeito térmico:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{Bmatrix}_t$$

Considerou-se inclusive o caso de barras curvas e a possibilidade de a variação de temperatura não ser uniforme.

O passo inicial para resolver, pelo método da rigidez, uma estrutura de barras em tais condições é separar essas barras, engastando-as nas extremidades e obter as reações de fixação provocadas pela temperatura ou modificações de montagem. Com essas reações de fixação (tendo os sentidos trocados), compõe-se o carregamento nodal equivalente, que dará lugar a solução de tipo já conhecido.

Sejam:

$\{s\}_t$ — o vetor das deformações térmicas do elemento (ou modificações de montagem);

$\{k\}_i$ — a matriz de rigidez do elemento i .

É evidente que, estando fixadas as extremidades da barra, haverá nos seus extremos ações $\{S_0\}$ tais que, atuando elasticamente, produzem contradeformações $\{s\}_e$ (elásticas) capazes de anular os efeitos de $\{s\}_t$:

$$\boxed{\{s\}_t + \{s\}_e = \{0\}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\{s\}_e = -\{s\}_t}$$

A Fig. 8.6.1a mostra a barra; na Fig. b são vistas as deformações térmicas (ou modificações) sem restrições, acarretando movimentos das extremidades; a Fig. c mostra as ações de fixação $\{S_0\}$ anulando esses movimentos.

$$\{S_0\} = [k] \{s\}_e = -[k] \{s\}_t$$

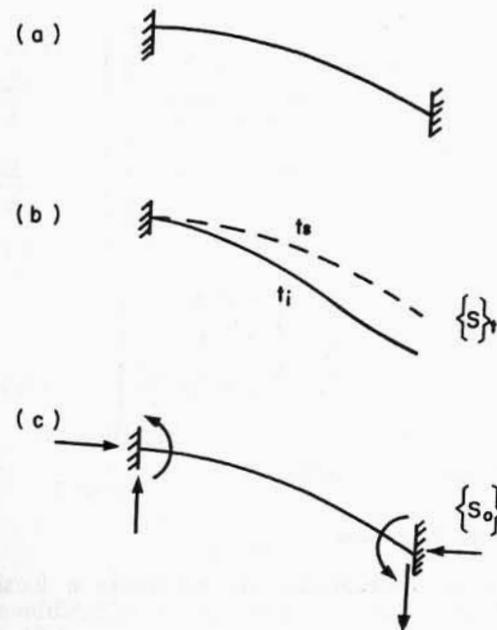


Fig. 8.6.1

Caso de uma barra reta com seção constante, dados E, Ω, h, J, α e temperaturas diferentes nos dois lados, acarretando variações t_o e $\Delta t = t_i - t_o$.

Para as coordenadas da Fig. 8.6.2b, conforme foi visto anteriormente:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha t_o & l \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} & \frac{l^2}{2} \\ \alpha \frac{\Delta t}{h} & l \end{Bmatrix}$$

Sendo a matriz de rigidez:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{E\Omega}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

vem

$$\begin{Bmatrix} S_{01} \\ S_{02} \\ S_{03} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E\Omega}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\alpha t_o & l \\ -\alpha \frac{\Delta t}{h} & \frac{l^2}{2} \\ -\alpha \frac{\Delta t}{h} & l \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} S_{01} \\ S_{02} \\ S_{03} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -E\Omega\alpha t_o \\ 0 \\ -EJ\alpha \frac{\Delta t}{h} \end{Bmatrix}$$

É interessante notar que l não influi.

8.6.2. Resolução da Estrutura

1. Estabelecidas as coordenadas de referência e locais, formulam-se as matrizes $[\bar{A}_1]$ e $[k]$.
2. Calculam-se as reações de fixação $\{S_0\}$, como foi visto atrás.
3. Compõem-se as ações nodais equivalentes $\{X\}$:
 - seja diretamente (como já tem sido feito);
 - seja indiretamente (ou, a rigor, mecanicamente), por meio da seguinte expressão que explora a contragradência (Clebsh):

$$\{X\} = -[\bar{A}_1]^T \{S_0\}.$$

4. Resolve-se pelo método da rigidez, como se fossem cargas exteriores $\{X\}$:

$$[\bar{K}_{11}] \{x\} = \{X\} \quad \therefore \quad \{x\} = [\bar{K}_{11}]^{-1} \{X\}.$$

5. Os esforços são

$$\{S\} = \{S_0\} + [k][\bar{A}_1]\{x\} = \{S_0\} - [k][\bar{A}_1][\bar{K}_{11}]^{-1}[\bar{A}_1]^T \{S_0\}$$

$$\{S\} = ([I] - [k][\bar{A}_1][\bar{K}_{11}]^{-1}[\bar{A}_1]^T) \{S_0\}.$$

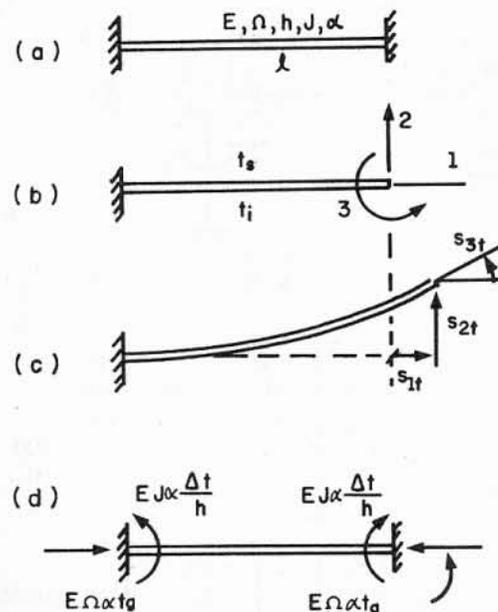


Fig. 8.6.2

Nos casos de modificações de montagem, basta considerar essas modificações nos valores de $\{S_0\}$:

$\{S_0\} = [k] \{-s_0\}_m$ onde $\{s_0\}_m$ é o vetor das modificações feitas.

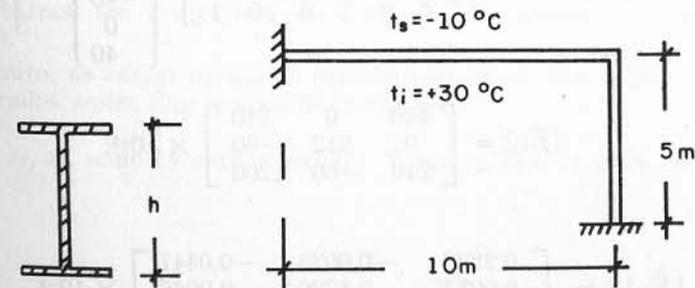


Fig. 8.6.3

8.6.3. Exemplo

Estrutura da Fig. 8.6.3, na qual:

$$\Omega = 0,2 \text{ m}^2; \quad J = 0,5 \times 10^{-1} \text{ m}^4; \quad h = 1 \text{ m}; \quad \alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}; \quad \Delta t = +40 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$t_0 = \frac{30 - 10}{2} = 10^\circ\text{C}.$$

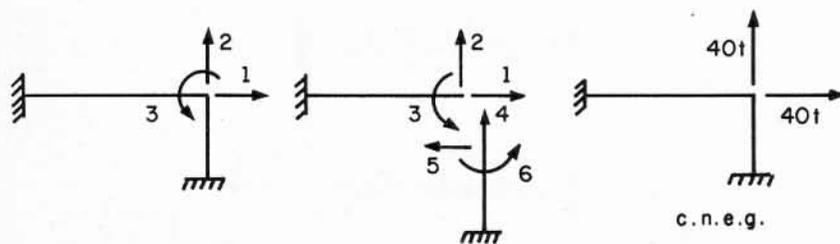


Fig. 8.6.4

Tem-se

$$[\bar{A}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [k] = 10^2 \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & 800 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & -60 & 0 & 96 & -240 \\ 0 & -60 & 400 & 0 & -240 & 800 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{01} \\ S_{02} \\ S_{03} \\ S_{04} \\ S_{05} \\ S_{06} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40 \text{ t} \\ 0 \\ -40 \text{ mt} \\ -40 \text{ t} \\ 0 \\ +40 \text{ mt} \end{Bmatrix};$$

$$\{X\} = -[\bar{A}_1]^T \{S_0\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -40 \\ 0 \\ -40 \\ -40 \\ 0 \\ 40 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40 \text{ t} \\ 40 \text{ t} \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$[\bar{K}_{11}] = \begin{bmatrix} 496 & 0 & 240 \\ 0 & 812 & -60 \\ 240 & -60 & 1200 \end{bmatrix} \times 10^{-2};$$

$$[\bar{K}_{11}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2230 & -0,0033 & -0,0447 \\ -0,0033 & 0,1230 & 0,0068 \\ 0,0447 & 0,0068 & 0,0925 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [\bar{K}_{11}]^{-1} \{X\} = \begin{Bmatrix} 8,79 \times 10^{-4} \text{ m} \\ 4,79 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -1,52 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix};$$

$$\{S\} = \{S_0\} + [k][\bar{A}_1]\{x\} = \begin{Bmatrix} -40 \\ 0 \\ -40 \\ -40 \\ 0 \\ 40 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 35,2 \\ 1,69 \\ 21,0 \\ 38,3 \\ -4,8 \\ -21,0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4,8 \text{ mt} \\ -1,69 \text{ t} \\ -19,0 \text{ t} \\ -1,70 \text{ t} \\ -4,8 \text{ t} \\ 19,0 \text{ mt} \end{Bmatrix}$$

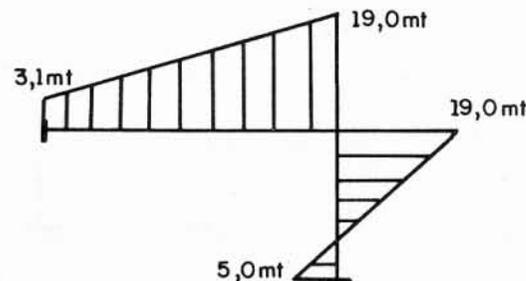


Fig. 8.6.5

8.7. Subdivisão da Matriz de Rigidez

Em certos casos, a matriz $[\bar{K}_{11}]$ é de dimensão tal que a resolução da estrutura fica complicada pelo elevado número de grandezas a serem manipuladas (incluindo a inversão da matriz).

Mesmo para cargas quaisquer, desde que o carregamento nodal não exista em todas as coordenadas de referência, x_i , será possível subdividir $[\bar{K}_{11}]$, permitindo operar por partes.

A estrutura da Fig. 8.7.1a (na qual pretende-se desprezar as deformações axiais das barras) tem 7 incógnitas-deslocamento, pelo método da rigidez (os das Figs. c e d).

Entretanto, as cargas nodais só existem segundo 1, 2 e 3 (Fig. c). Podem ser considerados assim dois grupos de incógnitas:

1. x_1, x_2, x_3 , onde há cargas nodais;
2. y_4, y_5, y_6 e y_7 , onde não há cargas nodais.

Tem-se

$$\{S\} = \begin{bmatrix} [\bar{A}_x] & \\ & [\bar{A}_y] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix}$$

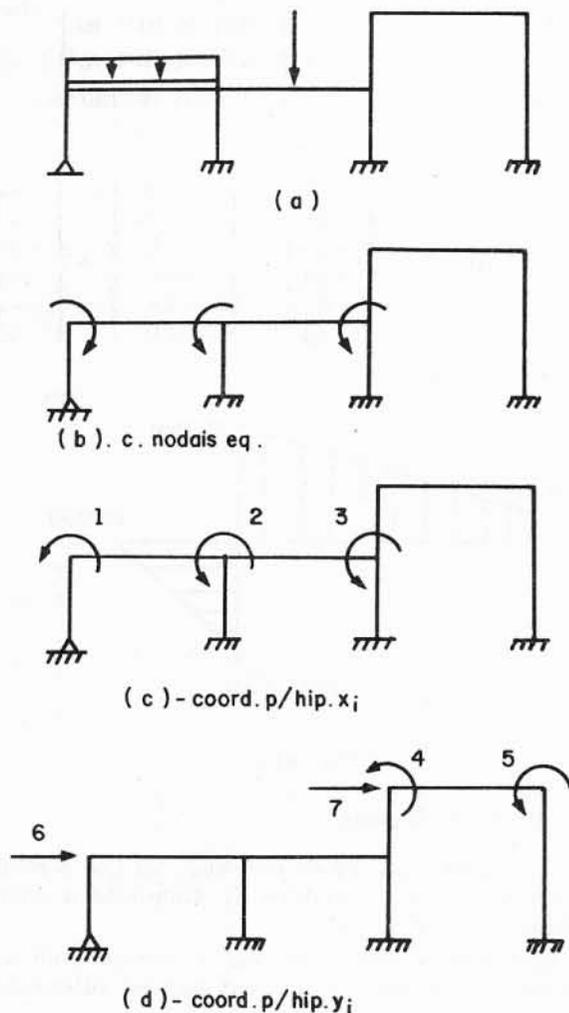


Fig. 8.7.1

Portanto,

$$[\bar{K}_{11}] = \begin{bmatrix} [\bar{A}_x]^T \\ [\bar{A}_y]^T \end{bmatrix} [k] \begin{bmatrix} [\bar{A}_x] \\ [\bar{A}_y] \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} [\bar{A}_x]^T [k] [\bar{A}_x] & [\bar{A}_x]^T [k] [\bar{A}_y] \\ [\bar{A}_y]^T [k] [\bar{A}_x] & [\bar{A}_y]^T [k] [\bar{A}_y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{xx}] & [\bar{K}_{xy}] \\ [\bar{K}_{yx}] & [\bar{K}_{yy}] \end{bmatrix}$$

onde

$[\bar{K}_{xx}]$ = ações segundo x_i , associadas a x_j unitários;

$[\bar{K}_{xy}]$ = ações segundo x_i , associadas a y_k unitários;

$[\bar{K}_{yx}]$ = ações segundo y_k , associadas a x_i unitários;

$[\bar{K}_{yy}]$ = ações segundo y_k , associadas a y_l unitários.

Observe-se que $[\bar{K}_{xx}]$ e $[\bar{K}_{yy}]$ são quadradas e que $[\bar{K}_{xy}] = [\bar{K}_{yx}]^T$.

As equações de equilíbrio, do método da rigidez, são:

$$\begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{xx}] & [\bar{K}_{xy}] \\ [\bar{K}_{yx}] & [\bar{K}_{yy}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix}$$

Estas equações, desmembradas em dois grupos, podem ser resolvidas em partes.

O segundo grupo de equações dá:

$$[\bar{K}_{yx}] \{x\} + [\bar{K}_{yy}] \{y\} = \{0\}$$

donde se tira:

$$\{y\} = -[\bar{K}_{yy}]^{-1} [\bar{K}_{yx}] \{x\}.$$

O primeiro grupo de equações é: $[\bar{K}_{xx}] \{x\} + [\bar{K}_{xy}] \{y\} = \{X\}$. Introduzindo o valor de $\{y\}$ acima obtido, vem:

$$([\bar{K}_{xx}] - [\bar{K}_{xy}] [\bar{K}_{yy}]^{-1} [\bar{K}_{yx}]) \{x\} = \{X\}.$$

Se se fizer

$$[\bar{K}_{xx}]_* = [\bar{K}_{xx}] - [\bar{K}_{xy}] [\bar{K}_{yy}]^{-1} [\bar{K}_{yx}]^T$$

tem-se

$$[\bar{K}_{xx}]_* \{x\} = \{X\}.$$

Em resumo, a solução tem esta seqüência:

1. Calcular $[\bar{K}_{yy}]^{-1}$.
2. Calcular $[\bar{K}_{xx}]_* = [\bar{K}_{xx}] - [\bar{K}_{xy}] [\bar{K}_{yy}]^{-1} [\bar{K}_{yx}]^T$.
3. Calcular $[\bar{K}_{xx}]_*^{-1}$.
4. Calcular $\{x\} = [\bar{K}_{xx}]_*^{-1} \{X\}$.
5. Calcular $\{y\} = -[\bar{K}_{yy}]^{-1} [\bar{K}_{yx}]^T \{X\}$.

Carregamento:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} -10 \text{ mt} \\ +10 \text{ mt} \end{Bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = [\bar{K}_{xx}]^{-1} \{X\} = \begin{Bmatrix} -2,08 \\ +1,15 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \text{ rad}.$$

$$\begin{Bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = -[\bar{K}_{yy}]^{-1} [\bar{K}_{xy}]^T \{x\} = \begin{Bmatrix} -0,462 \\ +1,162 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \text{ (rad)} \\ \text{(m)}.$$

$$\{S\} = \{S_0\} + [k] \begin{Bmatrix} [\bar{A}_x] \\ [\bar{A}_y] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10,00 \\ -10,00 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2,77 \\ -6,98 \\ -3,02 \\ 0,28 \\ 3,70 \\ 6,02 \\ 3,70 \\ 0,46 \\ -0,46 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2,77 \\ -6,98 \\ 6,98 \\ -9,72 \\ 3,70 \\ 6,02 \\ 3,70 \\ 0,46 \\ -0,46 \end{Bmatrix} \text{ (mt)}.$$

Momentos fletores na Fig. 8.7.3.

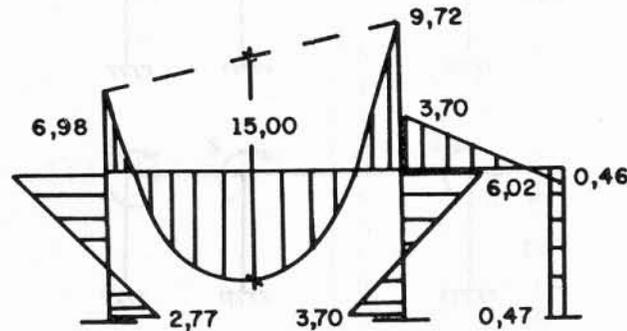


Fig. 8.7.3

8.8. Estruturas com Peças Rígidas

Como é óbvio, neste caso tais elementos *não são considerados* na fixação das coordenadas locais. Mas a sua presença *influi no grau de indeterminação cinemática da estrutura, reduzindo o número de incógnitas*, o que exige uma análise prévia cuidadosa.

Numa estrutura de concreto armado (como a da Fig. 8.8.1), a grande rigidez das lajes no seu plano e a forte predominância do momento de inércia das vigas

(com a colaboração das lajes) sobre o das colunas torna viável que, *para cargas horizontais* (vento etc.), *seja feita a hipótese de só serem deformáveis as colunas* (por flexão e torção), como se estas fossem engastadas nas lajes rígidas.

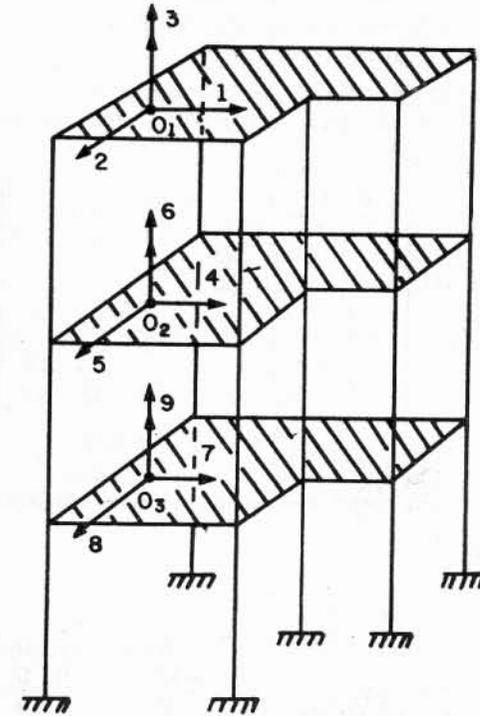


Fig. 8.8.1

Nas condições desse modelo matemático aproximado, a estrutura terá apenas 9 incógnitas: os 9 deslocamentos 1, 2, 4, 5, 7, 8 (de translação) e 3, 6 e 9 (de rotação) das 3 lajes, referentes a pólos O_1 , O_2 e O_3 , arbitrariamente escolhidos. Note-se que, em consequência destes, ficam definidas as posições dos extremos de todas as colunas.

Modernamente, tem sido dada grande ênfase (em comunicações, pesquisas e trabalhos especializados) a essa maneira de considerar o problema das estruturas de edifícios sujeitas a cargas horizontais ou a efeitos dinâmicos (vibrações por máquinas, vento etc.).

8.8.1. Exemplos

1. Como exemplo de estrutura com peças absolutamente rígidas, considere-se o quadro da Fig. 8.8.2a, que vai ser resolvido:

a. para a ação do carregamento;

Resolução do item b — recalque — $r = 0,009$ m:

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{1920} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 30/9 \\ -60/9 \end{Bmatrix} \times 160 \times 0,009 = \begin{Bmatrix} +2,5 \\ +7,5 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \text{ m.}$$

$$\{S\} = [k] \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r\} \\ \{x\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2,0 \text{ mt} \\ 0 \\ -2,0 \text{ mt} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{Fig. 8.8.4}).$$

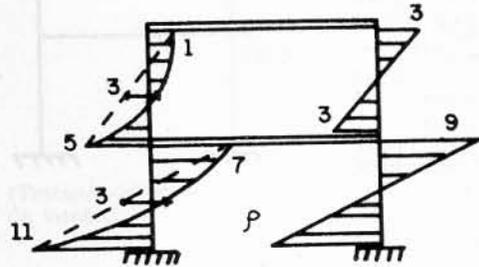


Fig. 8.8.3

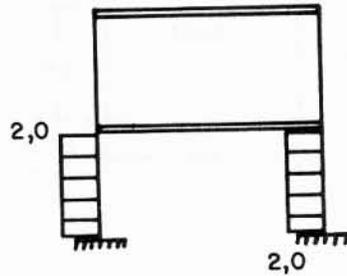


Fig. 8.8.4

O fato curioso de não haver esforços nas colunas superiores tem sua lógica: a presença da viga rígida do primeiro teto praticamente isolou a parte superior da estrutura dos efeitos do recalque, de sorte que o quadro superior se desloca rigidamente (sem momentos nas colunas), ficando a flexão por conta apenas das colunas inferiores (ver a Fig. 8.8.5).

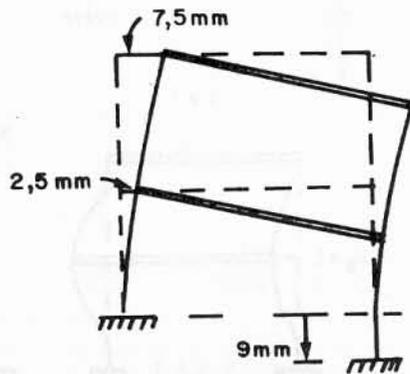


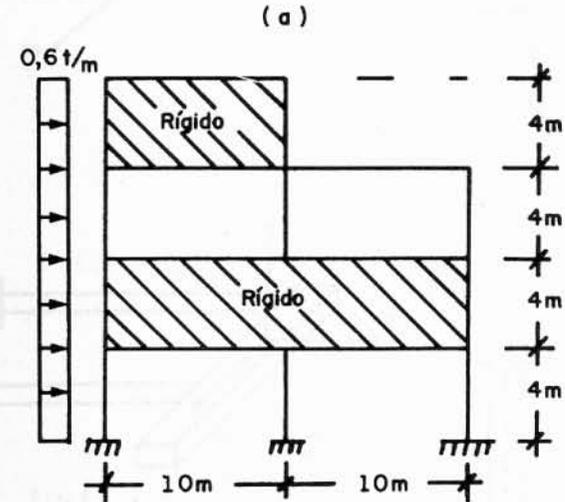
Fig. 8.8.5

2. Resolver a estrutura da Fig. 8.8.6a, na qual as partes rígidas estão indicadas. Partes não-rígidas:

- colunas — $EJ = 4\,000 \text{ tm}^2$;
- viga superior — $EJ = 10\,000 \text{ tm}^2$.

A resposta (momentos fletores em mt) está na Fig. b.

Convém observar que o carregamento atuando nas partes rígidas pode ser substituído por 2 componentes iguais aplicadas nos nós.



(b)

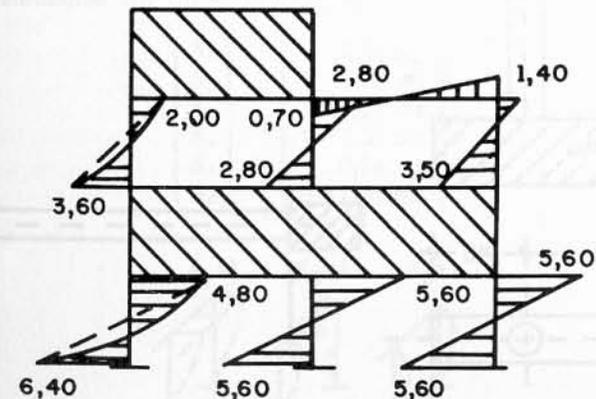


Fig. 8.8.6

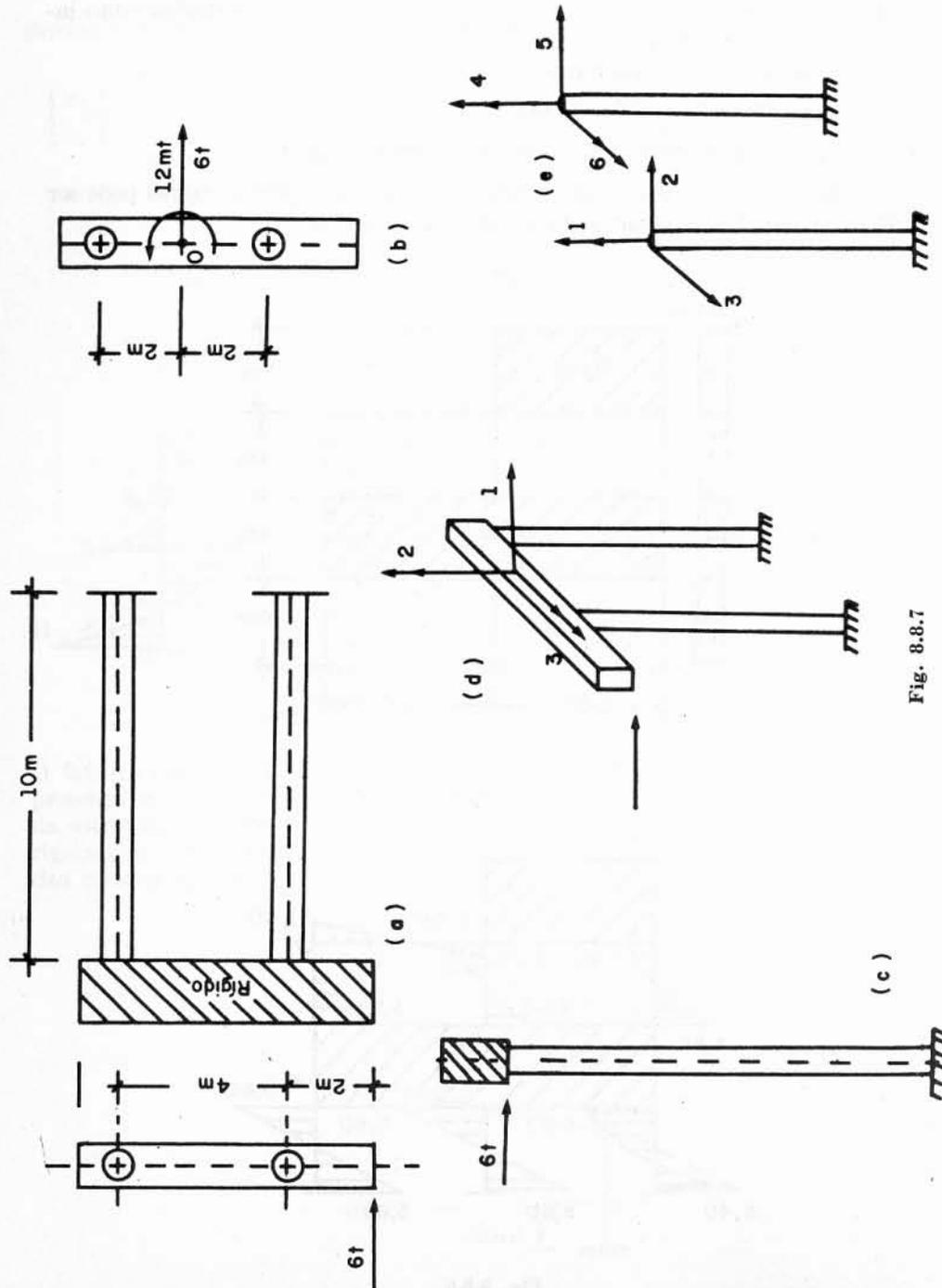


Fig. 8.8.7

3. Trata-se de um bloco rígido sobre 2 colunas, para as quais

$$EJ = 1,25GJ_0^*$$

A estrutura tem três graus de indeterminação cinemática. Coordenadas de referência na Fig. 8.8.7d, localizadas no pólo O (meio do vão).

As cargas nodais equivalentes são 6 t e 12 mt, transportadas para o pólo O . (Fig. b).

$$[\bar{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_{11}] = \frac{EJ}{1000} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 120 \\ 0 & 256 & 0 \\ 120 & 0 & 800 \end{bmatrix}$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} 6 \text{ t} \\ 24 \text{ mt} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [\bar{K}_{11}]^{-1} \{X\} = \frac{1000}{EJ} \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0,094 \\ -0,150 \end{Bmatrix}$$

Os esforços, calculados em conseqüência, dão:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7,52 \text{ mt} \\ 5,26 \text{ t} \\ 11,28 \text{ mt} \\ 7,52 \text{ mt} \\ 0,74 \text{ t} \\ -11,28 \text{ mt} \end{Bmatrix}$$

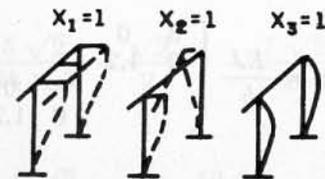


Fig. 8.8.8

4. Como uma quarta aplicação importante, considere-se o caso do viga-mento de uma escada, com dois lances e patamar rígido, sem apoio intermediário (Fig. 8.8.10).

As duas vigas são retangulares e admite-se que $GJ_0^* = 1,2 EJ$, sendo ainda supostas rígidas à flexão no plano de sua maior dimensão. A carga é uniformemente distribuída, vertical, ocupando toda a escada, no valor de 1 t/m^2 de projeção horizontal.

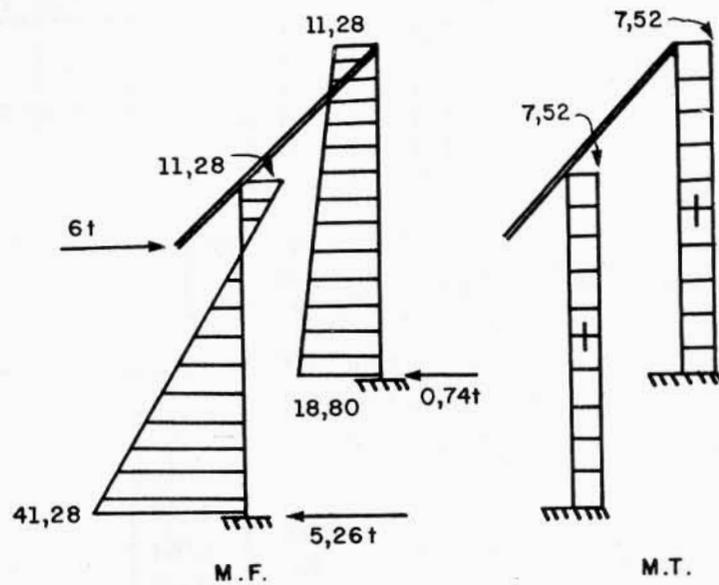


Fig. 8.8.9

O sistema só tem um grau de liberdade. Escolhendo para pólo o ponto f do patamar (que é fixo), são interdependentes as rotações do patamar rígido em torno de y e z (Fig. b) e não há rotação em torno de x .

A coordenada de referência n.º 1 está localizada no próprio eixo y , paralelo a uma das diagonais do patamar. As coordenadas locais estão na Fig. c .

Matriz de rigidez da estrutura desmembrada:

$$[k] = \frac{EJ}{5} \begin{bmatrix} 3 & 0 & & & & \\ 0 & 1,2 & & & & \\ & & 3 & 0 & & \\ & & 0 & 1,2 & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

Para formular a matriz de incidência $\{\bar{A}_1\}$ (no caso, um vetor), basta observar que, fazendo $r_1 = 1$:

a. os pontos b e d se deslocam $\frac{\sqrt{2}}{4} = 0,353 \text{ m}$ na vertical, $\frac{3\sqrt{2}}{16} = 0,265 \text{ m}$ horizontalmente e $\frac{5\sqrt{2}}{16} = 0,442 \text{ m}$ perpendicularmente ao eixo da viga;

b. segundo z , a rotação é $\frac{3\sqrt{2}}{8} = 0,530$.

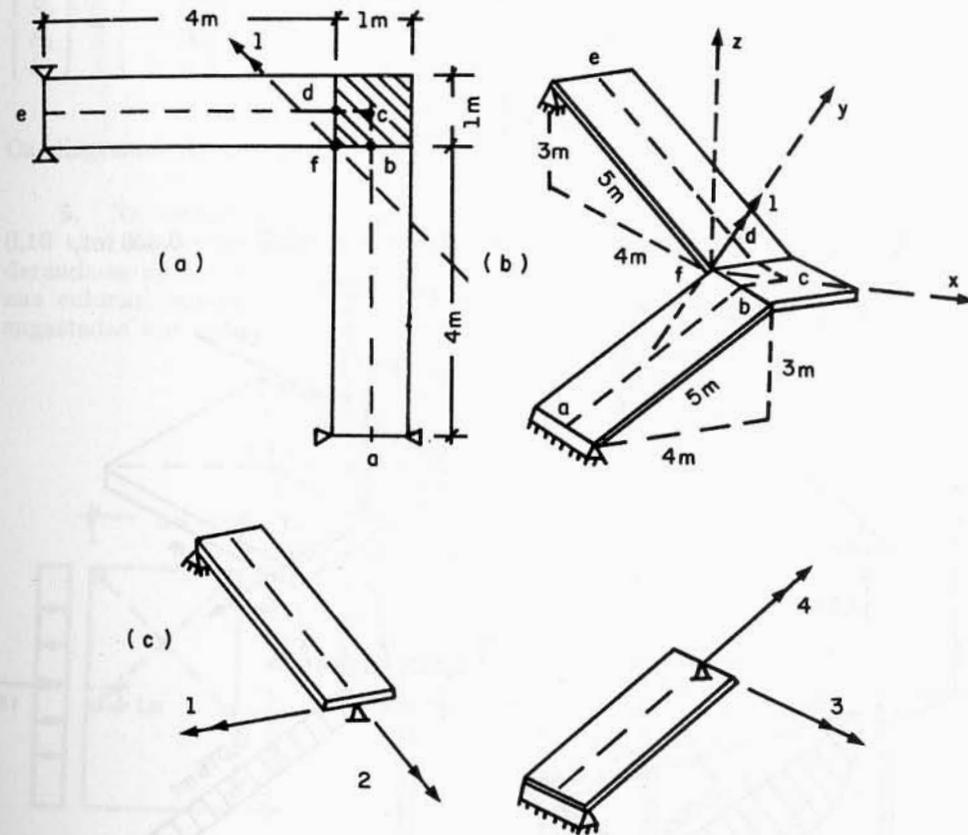


Fig. 8.8.10

Portanto,

$$s_1 = + \frac{5\sqrt{2}}{16 \times 5} - \frac{\sqrt{2}}{2} = - \frac{7\sqrt{2}}{16} = -0,619 = s_3$$

$$s_2 = - \frac{5\sqrt{2}}{16 \times 0,5} = - \frac{10\sqrt{2}}{16} = -0,884 = -s_4$$

$$\{A_1\} = \begin{Bmatrix} -0,619 \\ -0,884 \\ -0,619 \\ +0,884 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{K}_{11} = 0,230 + 0,187 + 0,230 + 0,187 = 0,834 EJ.$$

Sendo

$$\{S_0\} = \begin{Bmatrix} -2,00 \\ 0 \\ -2,00 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_1 = -2 \times 2 \times 0,70 + 2 \times 2,5 \times 0,353 + 1 \times 0,707 = -0,356 \text{ mt},$$

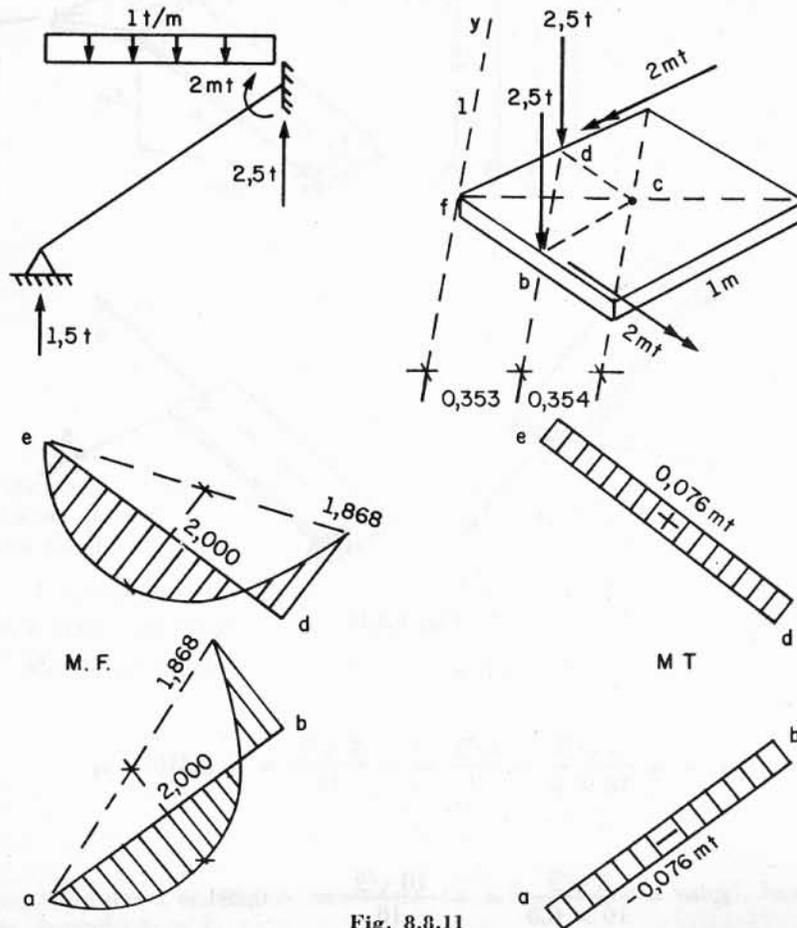


Fig. 8.8.11

tem-se

$$x_1 = \bar{K}_{11}^{-1} X_1 = -\frac{1,271}{EJ}$$

e

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2,00 \\ 0 \\ -2,00 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,24 \\ & 0,6 & 0 \\ & 0 & 0,24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,619 \\ -0,884 \\ -0,619 \\ -0,884 \end{Bmatrix} \times 0,356 = \begin{Bmatrix} -1,868 \text{ mt} \\ 0,076 \text{ mt} \\ -1,868 \text{ mt} \\ -0,076 \text{ mt} \end{Bmatrix}$$

Os diagramas de momentos fletor e torsor estão na Fig. 8.8.11.

5. Na estrutura de edifício da Fig. 8.8.12, sujeito à ação do vento de $0,10 \text{ t/m}^2$ numa das fachadas, admite-se que o bloco superior seja rígido, considerando-se apenas os efeitos de flexão e torção nas colunas. Obter os esforços nas colunas, supostas circulares, com $EJ = 25\,000 \text{ tm}^2$ e $GJ_0 = 20\,000 \text{ tm}^2$ e engastadas nos extremos.

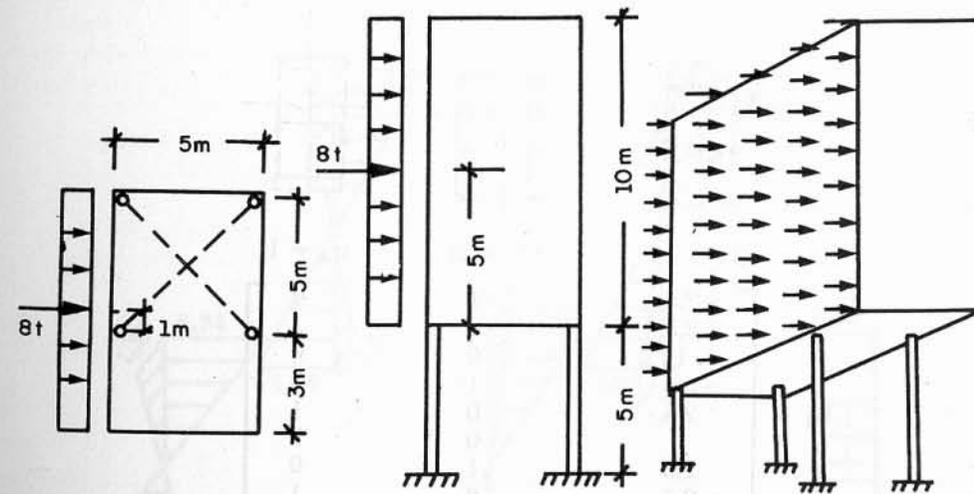


Fig. 8.8.12

Dadas as hipóteses feitas, há 3 graus de liberdade do sistema: dois deslocamentos horizontais de um pólo qualquer do bloco rígido e uma rotação em torno do pólo. Na Fig. 8.8.13a estão indicadas as coordenadas de referência (pólo no centro geométrico do quadrado formado pelas quatro colunas, que é o centro elástico da suspensão). As coordenadas locais estão indicadas na Fig. b.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [K_{11}]^{-1} \{X\} = \begin{Bmatrix} + 0,088 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ + 0,833 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,470 \text{ t} \\ -0,528 \text{ t} \\ 0,352 \text{ mt} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,470 \text{ t} \\ 0,528 \text{ t} \\ 0,352 \text{ mt} \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} S_7 \\ S_8 \\ S_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,530 \text{ t} \\ -0,528 \text{ t} \\ 0,352 \text{ mt} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,530 \text{ t} \\ 0,528 \text{ t} \\ 0,352 \text{ mt} \end{Bmatrix}.$$

Os diagramas de flexão e torção nas colunas estão na Fig. 8.8.14.

8.9. Emprego das Épuras de Deslocamentos (Williot) Quando se Desprezam as Deformações pelo Esforço Normal

Quando se considera dever desprezar as deformações pelo esforço normal, o número de incógnitas fica consideravelmente reduzido (e, portanto, também reduzida a dimensão das matrizes manipuladas na solução). Em contraposição a isso, esta vantagem é compensada por dificuldades de mecanização da solução, face à necessidade de fazer apelo à Cinemática (através de épuras) para que se possam exprimir as matrizes de entrada: a de incidência $[\bar{A}]$ e, em certos casos, o vetor do carregamento nodal equivalente $\{X\}$.

Considere-se a estrutura da Fig. 8.9.1a (6 incógnitas considerando-se o esforço normal e 3 sem essa consideração). Desprezando as deformações axiais, existem as incógnitas (x_1, x_2, x_3) da Fig. d.

O carregamento nodal (Fig. c) tem forças em outras direções exigindo coordenadas de referência provisórias (4, 5, 6, Fig. e). Estas ações serão depois transformadas para o sistema $\{X\}$ (Fig. d).

Para gerar a matriz de incidência $[\bar{A}_1]$, são necessárias as configurações deformadas:

1. para $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, que não têm dificuldade (Figs. f e g);
2. para $x_3 = 1$, exigindo uma épura de deslocamentos como a de Williot (Figs. i e h). Nesta épura da Fig. i, todos os deslocamentos absolutos dos nós são vetores $(0g, 0f)$ que partem do pólo 0. O deslocamento relativo vertical de G em relação a F é fg no Williot (o da figura tem a escala 1 unidade \rightarrow 2 cm).

A matriz $[A_1]$ será, então:

$$[\bar{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1,414 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

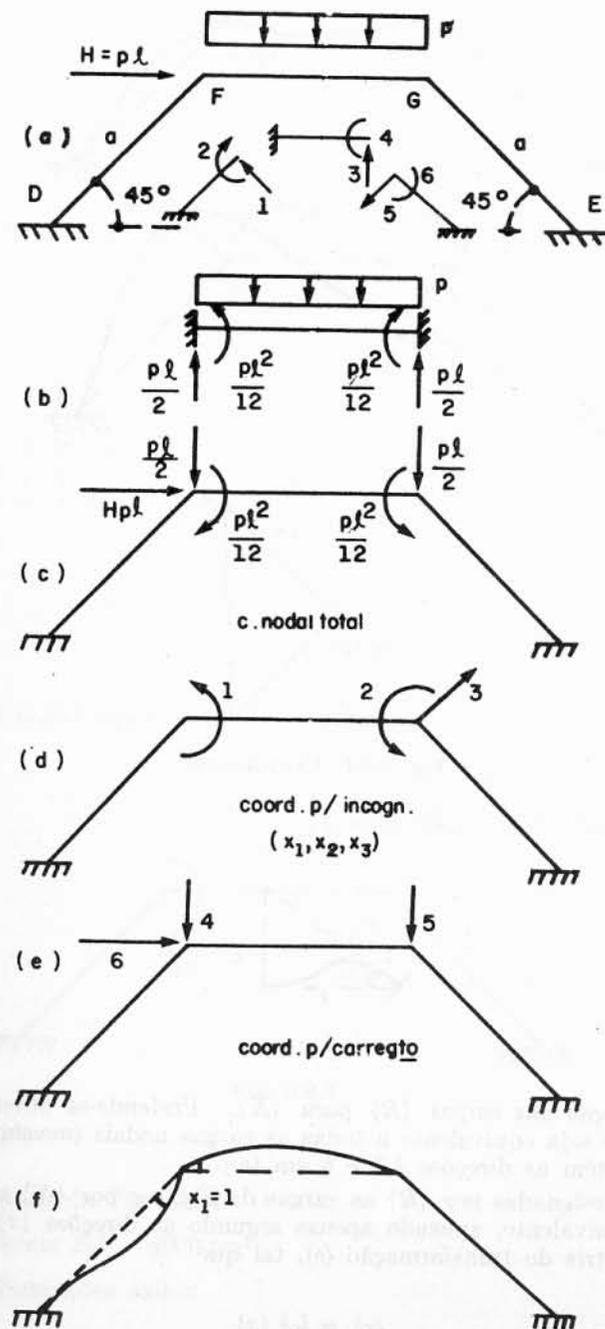


Fig. 8.9.1

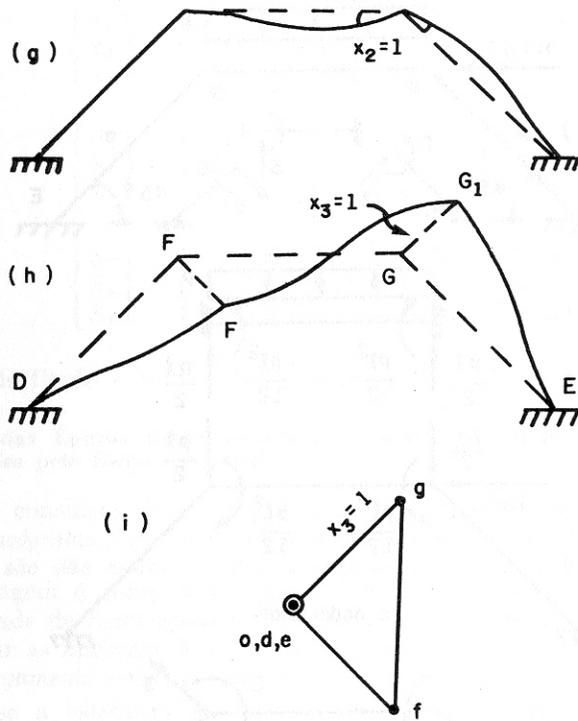


Fig. 8.9.1 Continuação

(Observar o valor $-l$ da coordenada 3.)

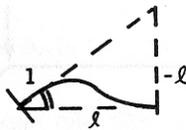


Fig. 8.9.2

Transformação das cargas $\{R\}$ para $\{X\}$. Pretende-se obter um carregamento $\{X\}$ que seja equivalente a todas as cargas nodais (mesmo as cargas da Fig. 8.9.1 que têm as direções 4,5 e 6 em (e)).

Se forem designadas por $\{R\}$ as cargas da Fig. c e por $\{X\}$ as que formam um sistema equivalente, aplicado apenas segundo as direções $\{x\}$, pode-se formular uma matriz de transformação (c), tal que

$$\{r\} = [c] \{x\}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,707 \\ 0 & 0 & 0,707 \\ 0 & 0 & -0,707 \end{bmatrix}$$

Pelo princípio da contragradência, tem-se $\{X\} = [c]^T \{R\}$.

Ora,

$$\{X\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,707 & 0,707 & -0,707 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{pl^2}{12} \\ \frac{pl^2}{12} \\ 0 \\ \frac{pl}{2} \\ pl \\ \frac{pl}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{pl^2}{12} \\ +\frac{pl^2}{12} \\ +\frac{pl}{2} \\ +pl \\ +\frac{pl}{2} \end{Bmatrix}$$

O carregamento nodal equivale ao da Fig. 8.9.3.

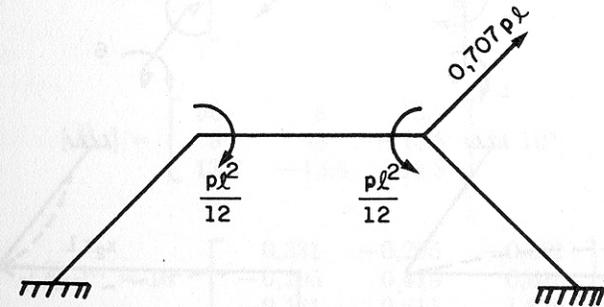


Fig. 8.9.3

8.9.1. Exemplos

Resolver a estrutura da Fig. 8.9.4.

Para todas as barras $EJ = 4000 \text{ tm}^2$.

Desprezar as deformações axiais.

Solução

Há 3 incógnitas (x_1, x_2, x_3).

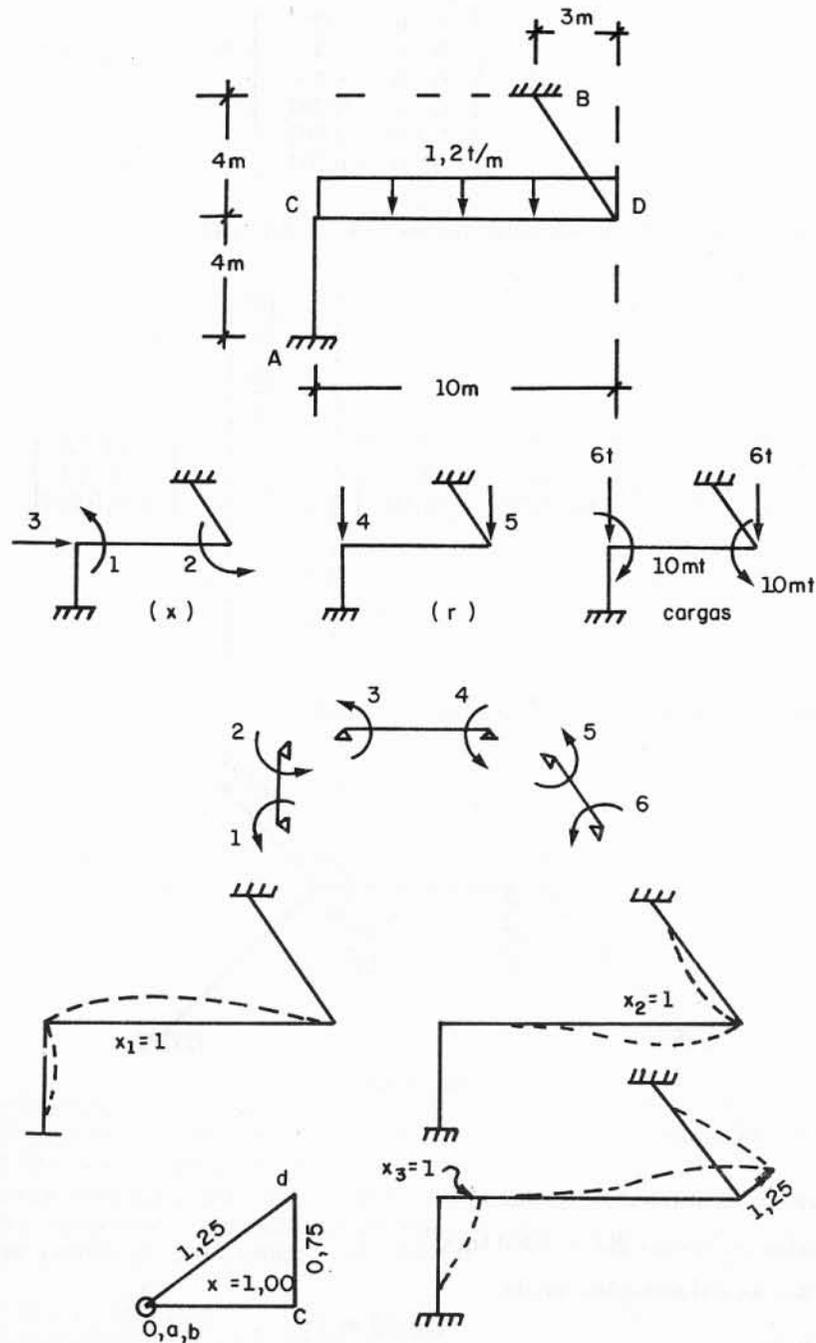


Fig. 8.9.4

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} -10 \text{ mt} \\ 10 \text{ mt} \\ 0 \\ 6 \text{ t} \\ 6 \text{ t} \end{Bmatrix}$$

$$[\bar{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,250 \\ 1 & 0 & 0,250 \\ 1 & 0 & -0,075 \\ 0 & 1 & -0,075 \\ 0 & 1 & -0,250 \\ 0 & 0 & -0,250 \end{bmatrix}$$

$$\{C\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,75 \end{bmatrix}$$

$$[k] = 10^2 \begin{bmatrix} 40 & 20 & & & & \\ 20 & 40 & & & & \\ & & 16 & 8 & & \\ & & 8 & 16 & & \\ & & & & 32 & 16 \\ & & & & 16 & 32 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_{11}] = \begin{bmatrix} 56 & 8 & 13,2 \\ 8 & 48 & -13,8 \\ 13,2 & -13,8 & 13,8 \end{bmatrix} \times 10^2;$$

$$[\bar{K}_{11}]^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,331 & -0,205 & -0,521 \\ -0,205 & 0,419 & 0,615 \\ -0,521 & 0,615 & 1,838 \end{bmatrix}$$

$$\{X\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0,75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -10 \\ +10 \\ 0 \\ +6 \\ +6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \text{ mt} \\ +10 \text{ mt} \\ -4,5 \text{ t} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [\bar{K}_{11}]^{-1} \{X\} = \begin{Bmatrix} -0,302 \\ +0,347 \\ +0,310 \end{Bmatrix} \times 10^{-2}$$

Esforços:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10,0 \\ -10,0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1,4 \\ -7,4 \\ -2,6 \\ +2,6 \\ +7,4 \\ +1,8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,4 \text{ mt} \\ -7,4 \text{ mt} \\ +7,4 \text{ mt} \\ -7,4 \text{ mt} \\ +7,4 \text{ mt} \\ +1,8 \text{ mt} \end{Bmatrix}$$

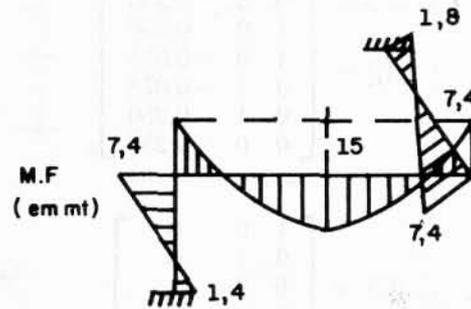


Fig. 8.9.5

8.10 Consideração dos Efeitos do Esforço Normal

Em coordenadas locais orientadas segundo a direção de cada barra, a matriz de rigidez é (Fig. 8.10.1):

$$[\bar{k}]_i = \begin{bmatrix} E\Omega/l & 0 & 0 & -E\Omega/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 & 0 & -12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 \\ 0 & 6EJ/l^2 & 4EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 2EJ/l \\ E\Omega/l & 0 & 0 & E\Omega/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 & 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ 0 & 6EJ/l^2 & 2EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{bmatrix}$$

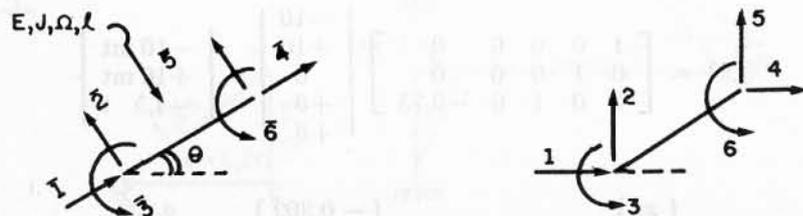


Fig. 8.10.1

Para referir a rigidez a coordenadas com direções paralelas às de referência (Fig. b), há que operar a transformação:

$$[k_i] = [T]^T [\bar{k}]_i [T],$$

onde

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ & -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A solução se desenvolve como segue:

1. $[k_i] = [T_i]^T [\bar{k}]_i [T_i]$;
2. $[\bar{K}_{11}] = [\bar{A}_1]^T [k] [\bar{A}_1] = \sum_{i=1}^n [\bar{A}_1]_i^T [k_i] [\bar{A}_1]_i$

(onde $[\bar{A}_1]$ está referida a coordenadas já transformadas);

3. $\{x\} = [\bar{K}_{11}]^{-1} \{X\}$;
4. Para os esforços, com referência às primitivas coordenadas locais,

$$\{\bar{S}\}_i = \{\bar{S}_0\}_i + [T_i] [k_i] [\bar{A}_1]_i \{x\}$$

(é vantajoso obter os vetores $\{\bar{S}\}$ barra por barra).

8.10.1. Exemplo

Ver Fig. 8.10.2:

$$EJ = 20\,000 \text{ tm}^2;$$

$$E\Omega = 100\,000 \text{ t.}$$

Dados sobre as barras

$$\text{Barra } \textcircled{a} - \theta_a = \text{arctg } \frac{4}{3};$$

$$\text{sen}\theta_a = 0,80; \quad \cos\theta_a = 0,60.$$

$$[\bar{k}_a] = \begin{bmatrix} 10\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 240 & -1200 \\ 0 & -1200 & 8000 \end{bmatrix}$$

$$[T_a] = \begin{bmatrix} 0,60 & 0,80 & 0 \\ -0,80 & 0,60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k_a] = [T_a]^T [\bar{k}_a] [T_a] = \begin{bmatrix} 3754 & 4685 & 960 \\ 4685 & 6486 & -720 \\ 960 & -720 & 8000 \end{bmatrix}$$

Barra (b): $\theta_b = 90^\circ$.

$$[\bar{k}_b] = \begin{bmatrix} 16 & 667 & 0 & 0 \\ 0 & 1110 & -3333 & 0 \\ 0 & -3333 & 13333 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [k_b] = \begin{bmatrix} 1110 & 0 & 3333 \\ 0 & 16667 & 0 \\ 3333 & 0 & 13333 \end{bmatrix}$$

Barra (c): $\theta_c = 0$.

$$[T_c] = [I]; [\bar{k}_c] = [k_c] = \begin{bmatrix} 16667 & 0 & 0 \\ 0 & 1110 & -3333 \\ 0 & -3333 & 13333 \end{bmatrix}$$

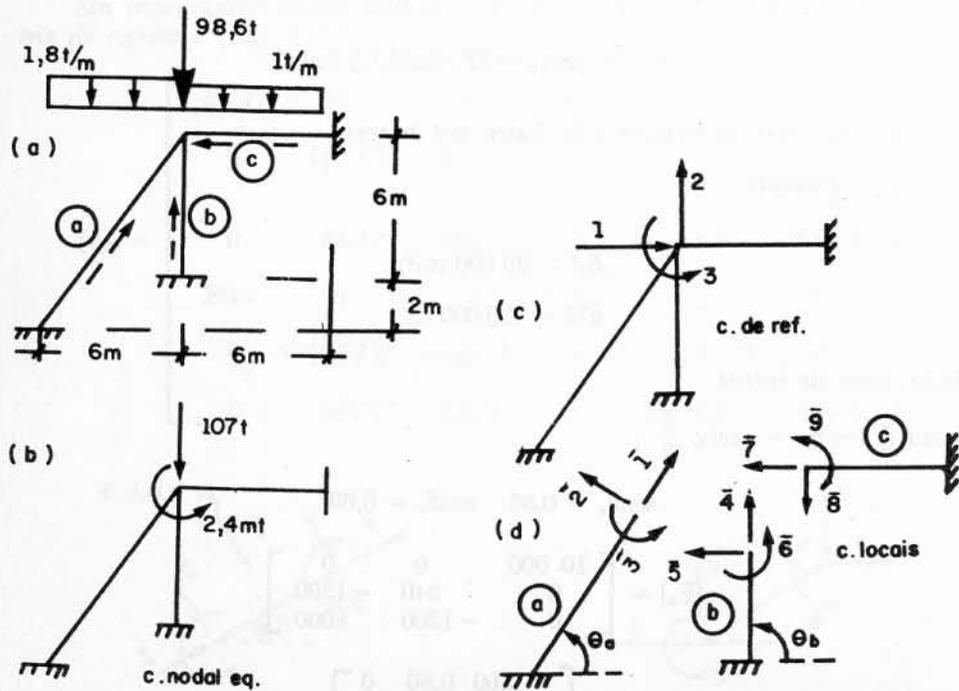


Fig. 8.10.2

$$[\bar{A}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [K_{11}] = \begin{bmatrix} 21530 & 4680 & 4290 \\ 4680 & 24260 & 2610 \\ 4290 & 2610 & 34670 \end{bmatrix}; \{X\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -107 \\ 2,4 \end{Bmatrix}$$

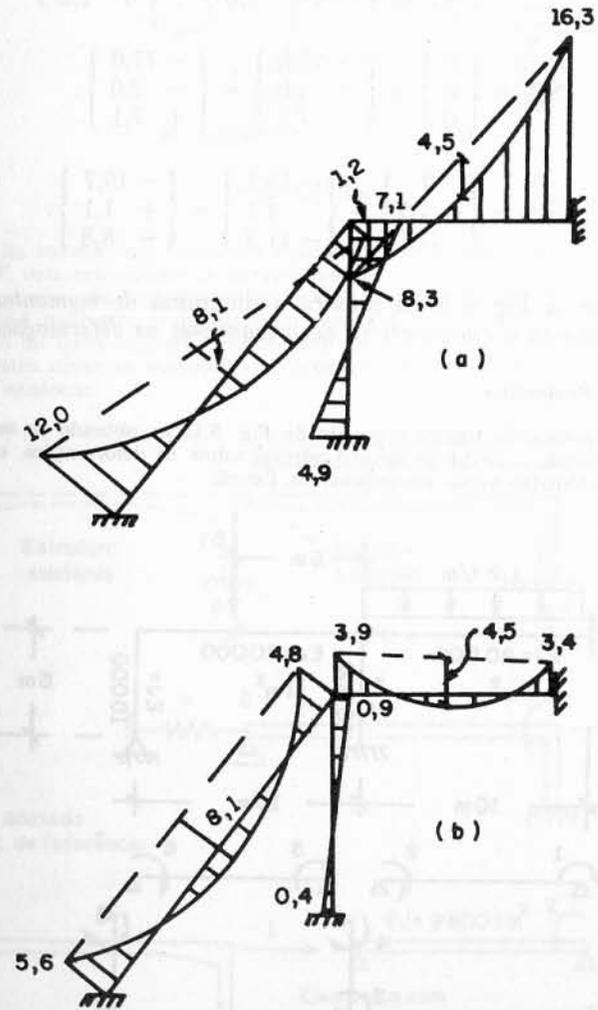


Fig. 8.10.3

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{16870 \times 10^3} \begin{bmatrix} 838 & -151 & -92 \\ -151 & 727 & -36 \\ -92 & -36 & 501 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -107 \\ 2,4 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{16,87 \times 10^6} \begin{Bmatrix} 15936 \\ -77884 \\ 5020 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{S}_a\} = \begin{Bmatrix} 4,30 \\ 3,25 \\ -5,40 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -33,6 \\ -1,2 \\ +6,6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -29,3 \\ +2,0 \\ +1,2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{S}_b\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -77,0 \\ -2,0 \\ +7,1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -77,0 \\ -2,0 \\ +7,1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{S}_c\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3,0 \\ 3,0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -15,7 \\ 4,1 \\ -11,3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15,7 \\ +1,1 \\ -8,3 \end{Bmatrix}$$

Para comparação: a Fig. 8.10.3a mostra o diagrama de momentos fletores deste caso; a Fig. b mostra o que ocorreria desprezando-se as deformações axiais.

8.11. Exercícios Propostos

1. Resolva pelo método da rigidez o quadro da Fig. 8.11.1a, obtendo os momentos fletores. Sugere-se desprezar o efeito do esforço normal sobre as deformações e utilizar os elementos e coordenadas locais assinalados na figura.

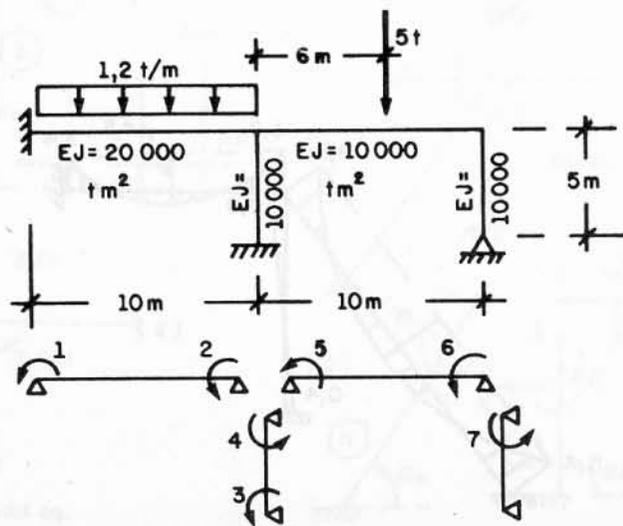


Fig. 8.11.1a

Como exercício, componha a matriz de rigidez da estrutura em conjunto de dois modos distintos: (1) pelo emprego da matriz de incidência $[A]$; (2) pelo processo da rigidez direta.

Resp. Na Fig. 8.11.1b.

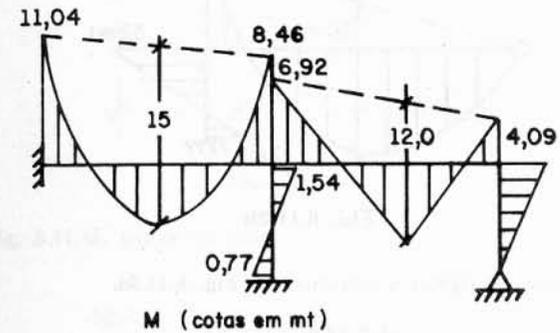


Fig. 8.11.1b

2. A Fig. 8.11.2a mostra uma estrutura existente, que se deseja ampliar, acrescentando-lhe o quadro DEF, com articulação na extremidade D. A observação direta da estrutura existente mostrou que uma força horizontal de 0,52 t, aplicada em D, produz um deslocamento horizontal de 1 milímetro, o que define a rigidez da estrutura existente considerada como um elemento do novo conjunto (coordenada local n.º 1 sugerida). Resolva pelo método da rigidez para obter os momentos fletores na nova estrutura e o empuxo transmitido à estrutura existente.

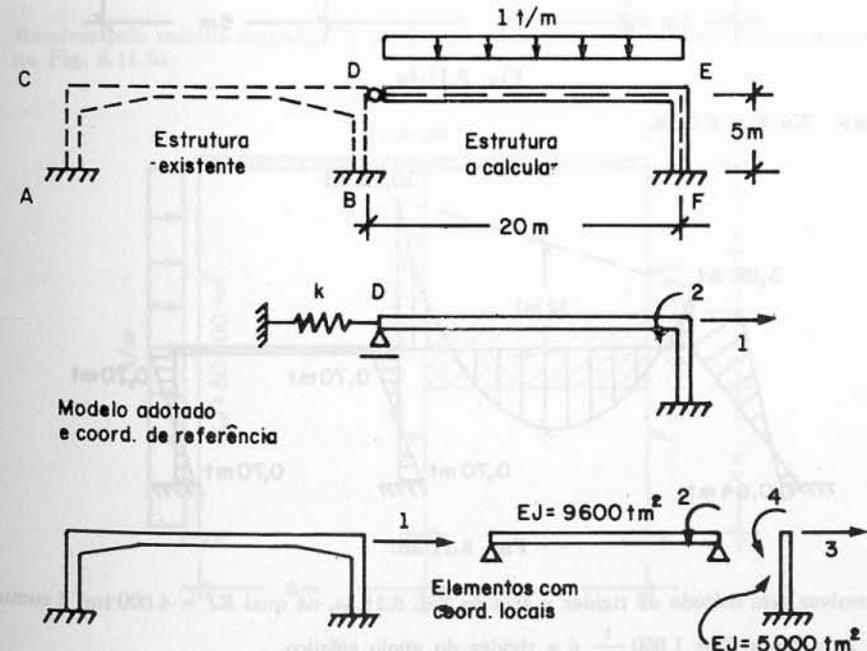


Fig. 8.11.2a

Resp. Na Fig. 8.11.2b. Força transmitida $F = 7,80 \text{ t} (\leftarrow)$.

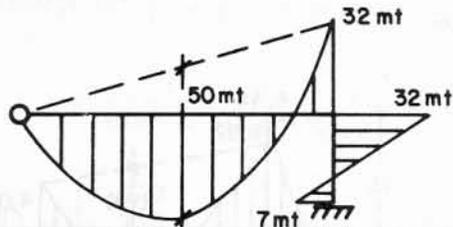


Fig. 8.11.2b

3. Resolva pelo método da rigidez a estrutura da Fig. 8.11.3a.

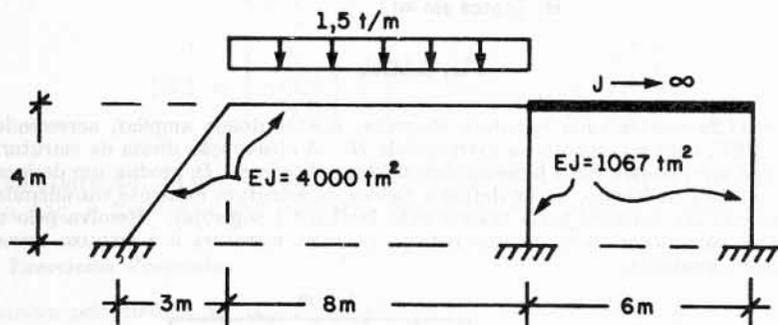


Fig. 8.11.3a

Resp. Na Fig. 8.11.3b.

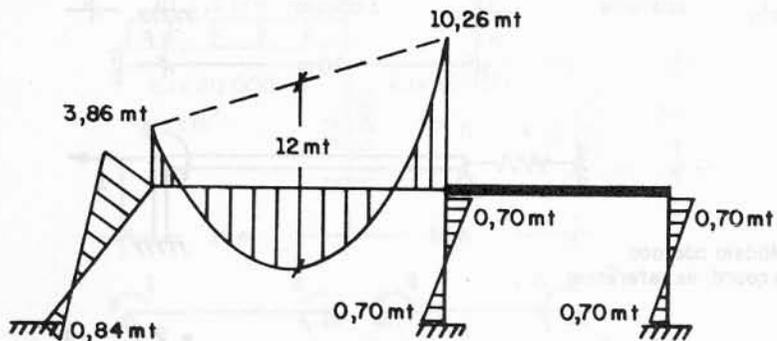


Fig. 8.11.3b.

4. Resolver pelo método da rigidez a viga da Fig. 8.11.4a, na qual $EJ = 4000 \text{ tm}^2$ é comum às 2 hastes e $K = 1600 \frac{\text{t}}{\text{m}}$ é a rigidez do apoio elástico.

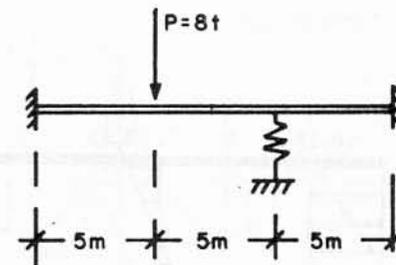


Fig. 8.11.4a

Resp. Na Fig. 8.11.4b. (cotas em mt).

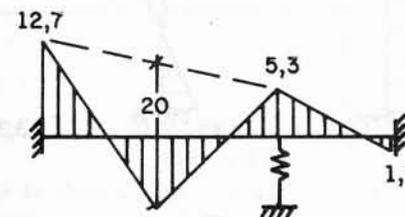


Fig. 8.11.4b

5. Resolver pelo método da rigidez o quadro com colunas elásticas e tetos rígidos assinalados na Fig. 8.11.5a.

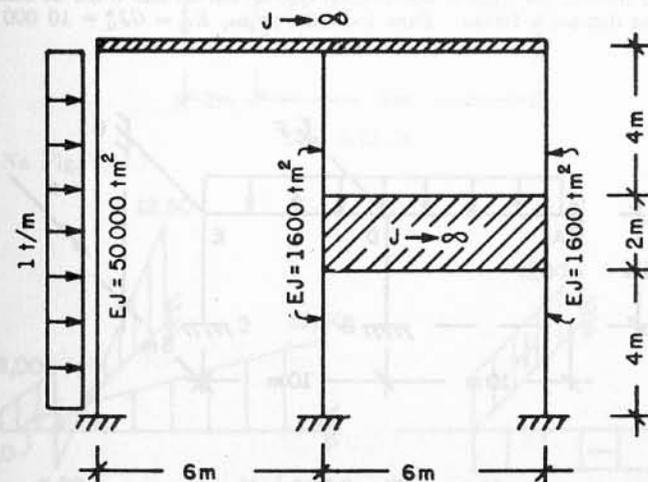


Fig. 8.11.5a

Resp. Na Fig. 8.11.5b. Cotas em mt.

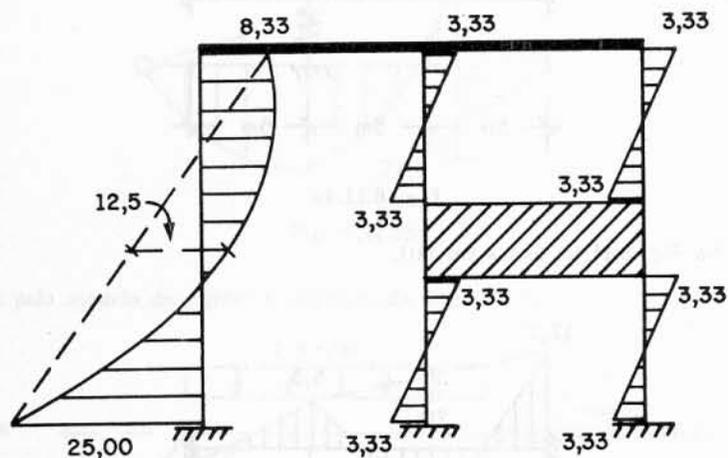


Fig. 8.11.5b

6. Para um carregamento geral qualquer, e mesmo desprezando as deformações pelo esforço normal, o quadro no espaço da Fig. 8.11.6a tem 6 incógnitas-rotação. Para o carregamento da figura, entretanto, só não são nulas as rotações nodais segundo eixos paralelos a x , havendo portanto duas incógnitas. Resolva pelo método da rigidez, observando que as barras ED e EG só serão submetidas à torção e as demais à flexão. Para todas as peças, $EJ = GJ_0^* = 10\ 000\ \text{tm}^2$.

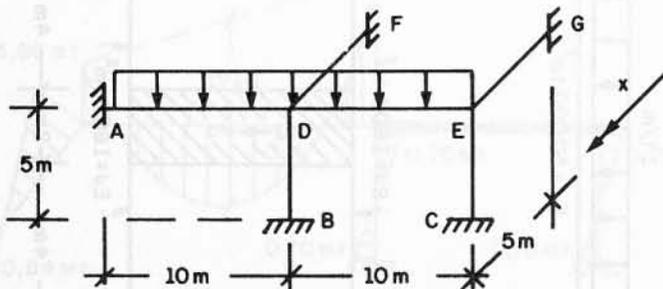


Fig. 8.11.6a

Resp. Na Fig. 8.11.6b.

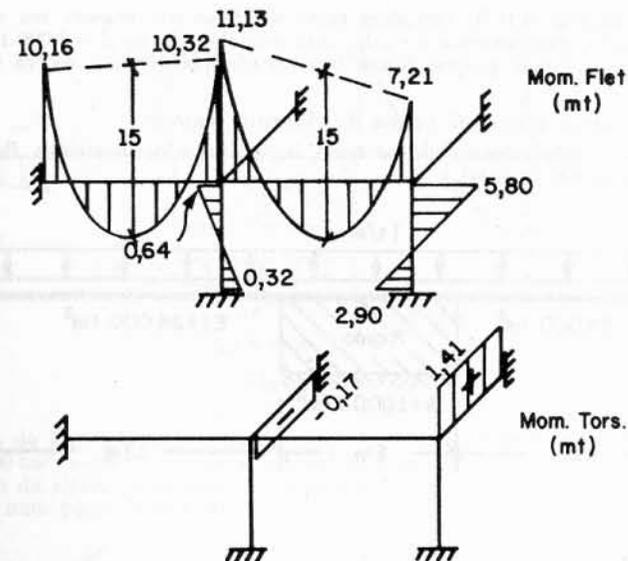


Fig. 8.11.6b

7. Resolva pelo método da rigidez, admitindo que $EJ = GJ_0^*$, para todas as peças. (Obs.: A estrutura existe num plano horizontal e tem carga vertical.)

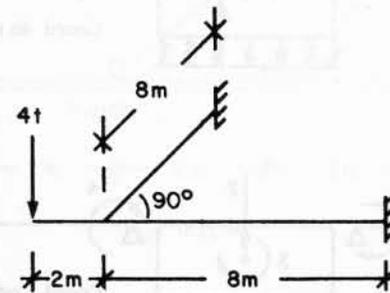


Fig. 8.11.7a

Resp. Na Fig. 8.11.7b.

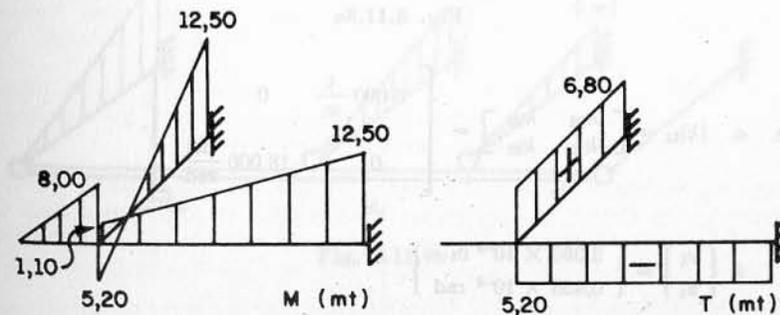


Fig. 8.11.7b

8. A estrutura da Fig. 8.11.8a tem duas vigas solidárias por engaste em um bloco rígido central, apoiado elasticamente no solo, com módulo elástico $\beta = 1000 \text{ t/m}^2$. Adotando o modelo sugerido pela própria figura (ver coordenadas locais) resolva pelo método da rigidez:

- determinando a matriz de rigidez do elemento central;
- obtendo os deslocamentos eleitos como incógnitas e os momentos fletores nas vigas e reações (inclusive no solo).

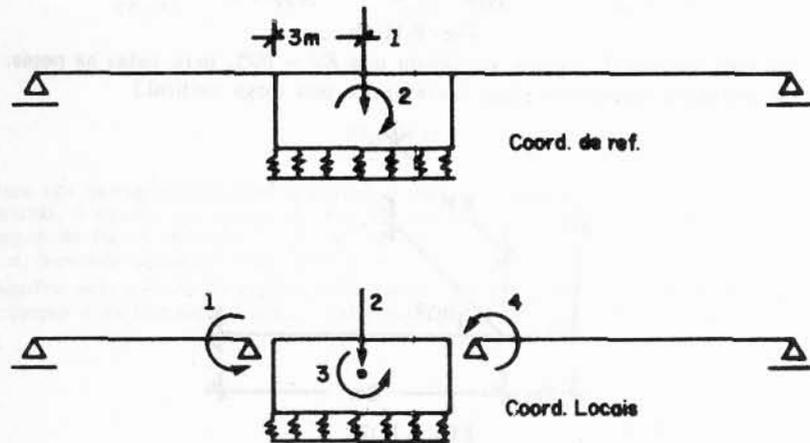
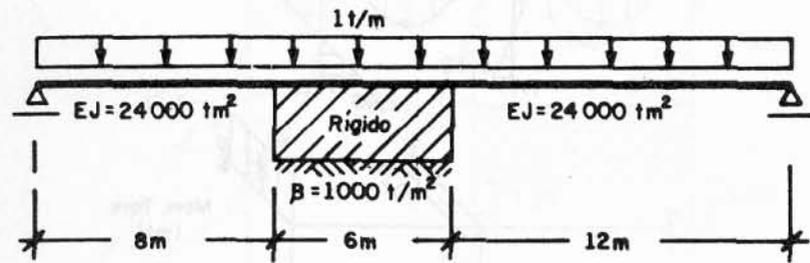


Fig. 8.11.8a

Resp. a. $[k]_{II} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \frac{\text{t}}{\text{m}} & 0 \\ 0 & 18000 \frac{\text{mt}}{\text{rad}} \end{bmatrix}$

b. $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,060 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 0,458 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$

Ver Fig. 8.11.8b.

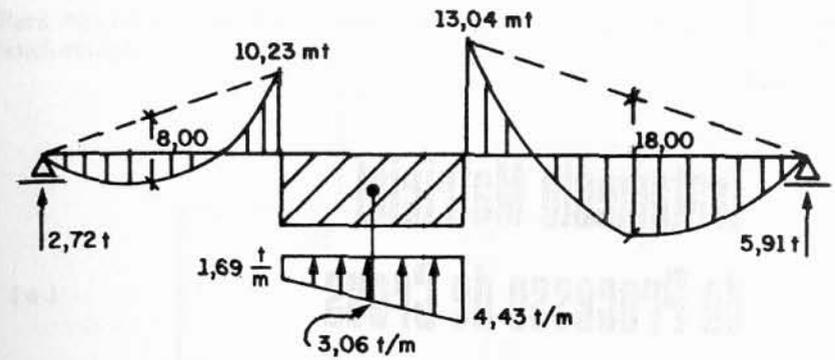


Fig. 8.11.8b

9. A estrutura da Fig. 8.11.9a, na qual a viga AC é rígida e as demais são elásticas, com $EJ = 12500 \text{ tm}^2$, sofre um recalque vertical do apoio B, de 12 milímetros (\downarrow). Resolva pelo método da rigidez e obtenha os momentos fletores nas peças não-rígidas. A estrutura existe num plano horizontal.

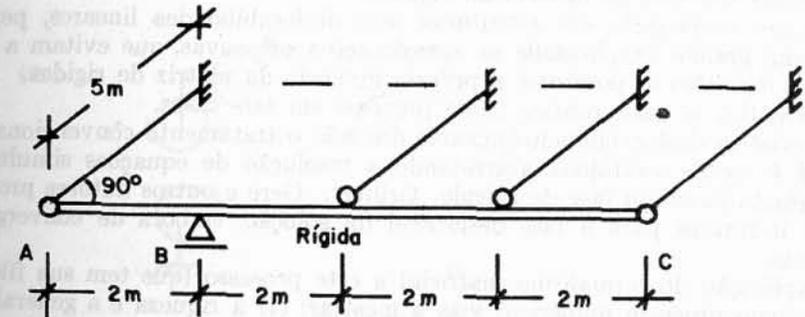


Fig. 8.11.9a

Resp. Na Fig. 8.11.9b.

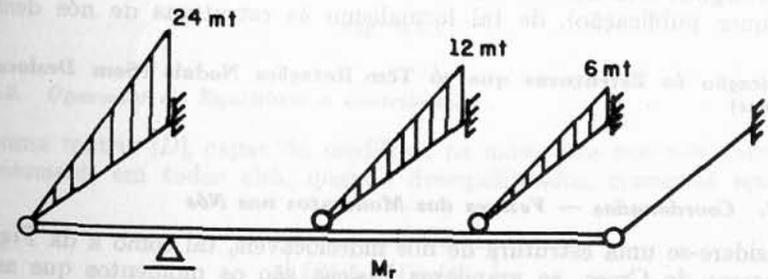


Fig. 8.11.9b

Tratamento Matricial do Processo de Cross

9.1. Introdução

O processo numérico de Cross, como se sabe, visa resolver as estruturas por iteração aplicada ao método da rigidez.

Quando empregado em estruturas sem deslocabilidades lineares, permite operar com grande simplicidade as aproximações sucessivas, que evitam a resolução das equações e, portanto, a própria inversão da matriz de rigidez. Seria ocioso ressaltar o valor prático deste processo em tais casos.

Se existem deslocabilidades lineares dos nós, o tratamento convencional por Cross já é menos vantajoso, acarretando a resolução de equações simultâneas num segundo passo ou fase de cálculo. Grinter, Gere e outros autores propõem soluções iterativas para a fase deslocável da solução, embora de convergência mais lenta.

A aplicação do formalismo matricial a este processo (que tem sua filosofia própria como processo numérico) visa a mostrar: (1) a riqueza e a generalidade da análise matricial; (2) a própria razão da convergência do processo de Cross. O emprego deste tratamento nas estruturas indeslocáveis será feito aqui nos moldes da solução proposta por Laursen (ver bibliografia), que se limita a tais casos. A seguir, será apresentada a extensão, idealizada pelo autor (e não vista em qualquer publicação), de tal formalismo às estruturas de nós deslocáveis.

9.2. Aplicação às Estruturas que só Têm Rotações Nodais (Sem Deslocabilidade Linear)

9.2.1. Coordenadas — Vetores dos Momentos nos Nós

Considere-se uma estrutura de nós indeslocáveis, tal como a da Fig. 9.2.1a. Pelo processo de Cross, as grandezas básicas são os momentos que as barras transmitem aos nós. Para designar e ordenar tais momentos, institui-se um sistema de coordenadas, como o da Fig. 9.2.1b, no que fica definido um vetor dos momentos nos nós, $\{S\}$.

Todas as coordenadas ali estão estabelecidas com os sentidos positivos da convenção de Grinter, usada no processo de Cross.

Para equilibrar, distribuir e transmitir momentos, serão utilizadas matrizes de transformação.

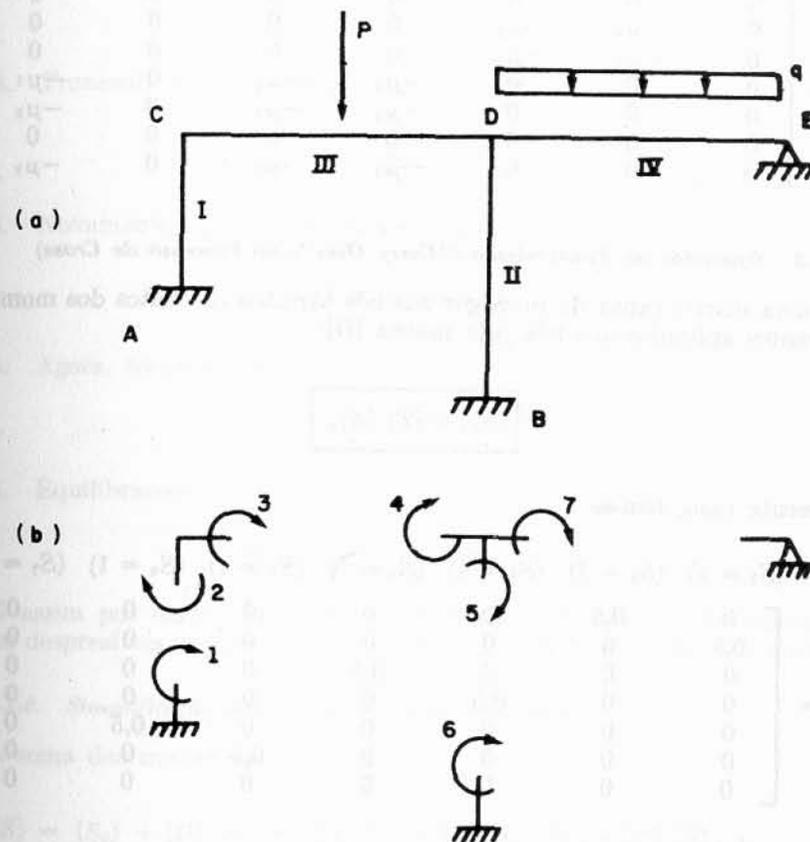


Fig. 9.2.1

9.2.2. Operador de Equilíbrio e Distribuição

É uma matriz $[D]$, capaz de modificar os momentos nos nós, introduzindo simultaneamente em todos eles, quando desequilibrados, momentos equilibrantes

$$\{S\}_e = [D] \{S\}.$$

Se μ_i forem os coeficientes de distribuição do processo de Cross, a matriz $[D]$ pode ser formulada facilmente. No caso citado se tem, como nas matrizes de incidência:

$$[D] = \begin{matrix} (S_1 = 1) & (S_2 = 1) & (S_3 = 1) & (S_4 = 1) & (S_5 = 1) & (S_6 = 1) & (S_7 = 1) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_3 & -\mu_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_4 & -\mu_4 & 0 & -\mu_4 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_5 & -\mu_5 & 0 & -\mu_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_7 & -\mu_7 & 0 & -\mu_7 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

9.2.3. Operador de Transmissão ("Carry Over", do Processo de Cross)

É uma matriz capaz de propagar aos nós vizinhos os efeitos dos momentos equilibrantes aplicados aos nós pela matriz $[D]$:

$$\{S\}_t = [T] \{S\}_e$$

No presente caso, tem-se:

$$[T] = \begin{matrix} (S_1 = 1) & (S_2 = 1) & (S_3 = 1) & (S_4 = 1) & (S_5 = 1) & (S_6 = 1) & (S_7 = 1) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

9.2.4. Vetor dos Momentos de Engastamento Perfeito

É constituído de elementos com o mesmo significado usual neste processo. No caso em estudo, se, por exemplo, a carga P estiver no meio do vão l_{III} :

$$\{S_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ + Pl_{III/8} \\ - Pl_{III/8} \\ 0 \\ 0 \\ + ql_{IV/8}^2 \end{Bmatrix}$$

9.2.5. Mecanismo da Iteração, Segundo Cross

1. Inicialmente, estando os nós engastados, os momentos são $\{S_0\}$.

2. Libertando simultaneamente todos os nós, surgem momentos equilibrantes:

$$\{\bar{S}\}_1 = [D] \{S_0\}.$$

3. Transmitindo os efeitos para os nós vizinhos;

$$\{\bar{S}\}_2 = [T] \{\bar{S}\}_1.$$

4. Novamente equilibrando todos os nós, tem-se:

$$\{\bar{S}\}_3 = [D] \{S\}_2 = [D] [T] \{\bar{S}\}_1.$$

5. Agora, transmitindo:

$$\{\bar{S}\}_4 = [T] \{\bar{S}\}_3.$$

6. Equilibrando:

$$\{\bar{S}\}_5 = [D] \{S\}_4 = [D] [T] \{\bar{S}\}_3.$$

E assim por diante, até que as parcelas equilibrantes ou transmitidas se tornem desprezíveis, termo por termo, conforme é usual nos processos iterativos.

9.2.6. Simplificação das Operações. Convergência

A soma dos momentos $\{S\}$ será;

$$\{S\} = \{S_0\} + [D] \{S_0\} + [T] \{\bar{S}\}_1 + [D] [T] \{\bar{S}\}_1 + [T] \{\bar{S}\}_3 + \dots + [D] [T] \{\bar{S}\}_3 + \dots$$

Pode também ser apresentada sob a forma:

$$\{S\} = \{S_0\} + [D] \{S_0\} + ([I] + [D]) [T] \{\bar{S}\}_1 + ([I] + [D]) [T] \{\bar{S}\}_3 + \dots$$

Fazendo

$$([I] + [D]) [T] = [E]$$

e reajustando a numeração das parcelas $\{\bar{S}\}$, tem-se:

$$[D] \{S_0\} = \{S\}_1$$

$$[E] \{S\}_1 = \{S\}_2$$

$$[E] \{S\}_2 = \{S\}_3 \dots$$

$$\{S\} = \{S_0\} + \{S\}_1 + \{S\}_2 + \{S\}_3 + \dots$$

onde, a partir do índice 2:

$$\{S\}_i = [E] \{S\}_{i-1}$$

Uma aplicação, feita a seguir, mostrará a automatização do processo.

Observação. A expressão de $\{S\}$ pode ser apresentada como soma de uma série geométrica:

$$\{S\} = \{S_0\} + \{S\}_1 + [E] \{S\}_1 + [E]^2 \{S\}_1 + [E]^3 \{S\}_1 + \dots$$

ou

$$\{S\} = \{S_0\} + ([I] + [E] + [E]^2 + [E]^3 + \dots) [D] \{S_0\}$$

Como se vai ver, a razão $[E]$ é uma matriz de elementos de pequeno valor (< 1), o que justifica a convergência.

9.2.7. Exemplo

Seja proposto resolver a estrutura da Fig. 9.2a, cujo engaste A é elástico, de rigidez $K_e = 13000 \text{ mt/rad}$, sendo dado ainda $EJ_c = 20000 \text{ tm}^2$. As coordenadas são as da Fig. b. Os valores absolutos da rigidez das barras e do engaste permitem estabelecer os coeficientes de distribuição μ da Fig. c. Operador de equilíbrio e distribuição:

$$[D] = \begin{bmatrix} -0,35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,28 & -0,28 & -0,28 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,40 & -0,40 & -0,40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,32 & -0,32 & -0,32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,40 & -0,40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,60 & -0,60 \end{bmatrix}$$

Operador de transmissão:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operador $[E] = ([I] + [D])[T]$:

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 & 0,325 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,36 & 0 & 0 & 0 & -0,14 & -0,14 & 0 \\ -0,20 & 0 & 0 & 0 & 0,30 & 0,30 & 0 \\ -0,16 & 0 & 0 & 0 & -0,16 & -0,16 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,30 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note-se que esta matriz é a razão da série geométrica cuja soma dá o valor total de $\{S\}$. Seus termos são pequenos e decrescem muito com a potenciação de $[E]$.

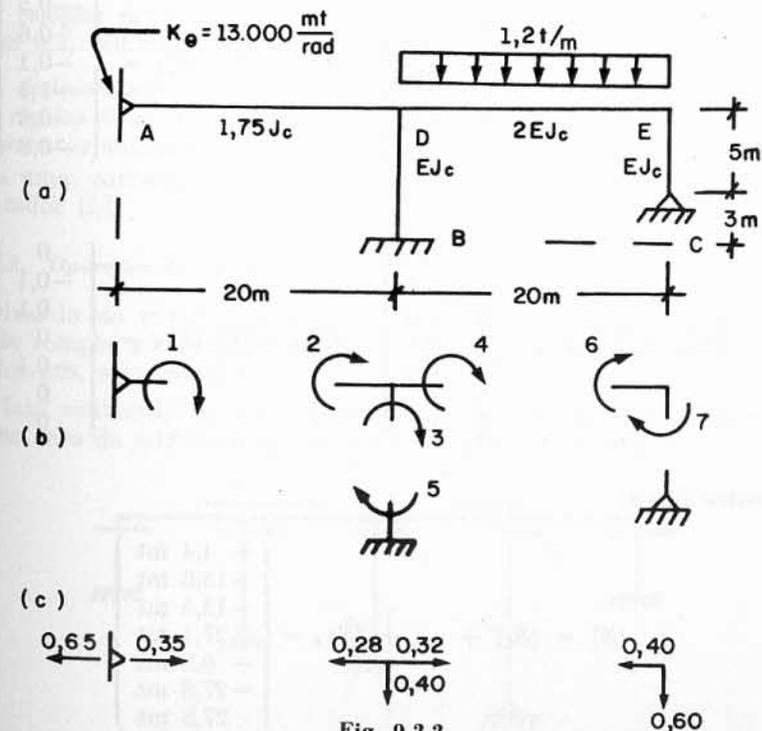


Fig. 9.2.2

Momentos de engastamento perfeito (ver a Fig. 9.2.2a):

$$\{S_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +40,0 \\ 0 \\ -40,0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{S\}_1 = [D] \{S_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -11,2 \\ -16,0 \\ 12,8 \\ 0 \\ 16,0 \\ 24,0 \end{Bmatrix}; \quad \{S\}_2 = [E] \{S\}_1 = \begin{Bmatrix} -3,6 \\ -2,2 \\ 4,8 \\ -2,6 \\ -8,0 \\ -3,8 \\ 3,8 \end{Bmatrix};$$

$$\{S\}_3 = [E] \{S\}_2 = \begin{Bmatrix} -0,7 \\ 0,3 \\ -2,8 \\ 2,5 \\ 2,4 \\ -0,8 \\ 0,8 \end{Bmatrix}; \quad \{S\}_4 = [E] \{S\}_3 = \begin{Bmatrix} 0,1 \\ -0,5 \\ 0,6 \\ -0,1 \\ -1,4 \\ 0,8 \\ -0,8 \end{Bmatrix};$$

$$\{S\}_5 = [E] \{S\}_4 = \begin{Bmatrix} -0,2 \\ 0,1 \\ -0,2 \\ 0,1 \\ 0,3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{S\}_6 = [E] \{S\}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ 0 \\ -0,1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Momentos finais;

$$\{S\} = \{S_0\} + \dots + \{S\}_6 = \begin{Bmatrix} -4,4 \text{ mt} \\ -13,6 \text{ mt} \\ -13,5 \text{ mt} \\ 27,1 \text{ mt} \\ -6,8 \text{ mt} \\ -27,8 \text{ mt} \\ 27,8 \text{ mt} \end{Bmatrix}$$

Diagrama de M. F. na Fig. 9.2.3:

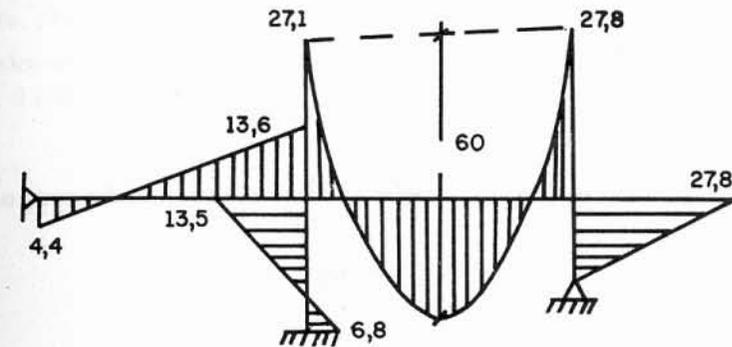


Fig. 9.2.3

9.3. Aplicação às Estruturas com Deslocabilidades Lineares dos Nós

3.1. Neste caso, os momentos nos nós (inicialmente engastados e imobilizados quanto às translações) sofrem depois alterações devido a dois tipos de movimentos que são liberados alternadamente:

1. *rotações equilibrantes dos nós, sem deslocamento de translação*, como foi visto em 9.2, utilizando o operador matricial $[D]$;

2. *deslocamentos dos nós, sem rotação*, onde as vigas funcionam como se fossem rígidas e as forças cortantes, equilibrantes nas colunas — responsáveis por momentos adicionais nos nós — distribuem-se proporcionalmente à rigidez de cada uma, correndo o equilíbrio e distribuição de momentos por conta de um operador $[L]$.

9.3.2. Operador de Translação $[L]$

Deixando de parte a formulação do operador $[D]$, já detalhada, trata-se agora de compor a matriz $[L]$ de equilíbrio e distribuição dos efeitos da translação dos nós, sem rotação.

É fato conhecido na técnica estrutural que, não havendo rotação dos nós (como no caso da estrutura da Fig. 9.2.4, na qual a viga tem $J \rightarrow \infty$), a aplica-

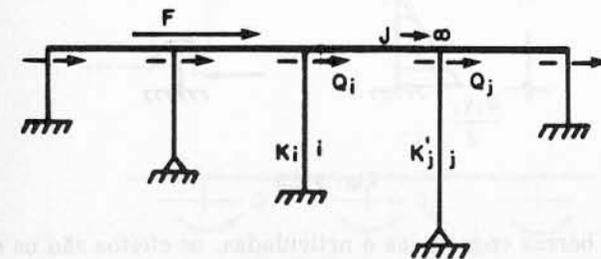


Fig. 9.2.4

ção de uma força horizontal F , na direção da deslocabilidade, acarreta os cortantes serem transmitidos aos topos das colunas com os valores:

$$Q_i, \dots \text{ proporcionais a } \frac{3K_i}{l_i^2}, \text{ nas colunas engastadas e}$$

$$Q_j, \dots \text{ proporcionais a } \frac{K'_j}{l_j^2}, \text{ nas colunas articuladas.}$$

Assim, da força aplicada F , cada coluna absorve um quinhão, com o sentido de F ,

$$Q_i = \delta_i F \quad \text{ou} \quad Q_j = \delta_j F,$$

onde δ é um coeficiente de distribuição de forças:

$$\delta_i = \frac{\frac{3K_i}{l_i^2}}{\sum_i \frac{3K_i}{l_i^2} + \sum_j \frac{K'_j}{l_j^2}}$$

$$\delta_j = \frac{\frac{K'_j}{l_j^2}}{\sum_i \frac{3K_i}{l_i^2} + \sum_j \frac{K'_j}{l_j^2}}$$

(K_i e K'_j são os valores da rigidez das colunas, conforme é usual no processo de Cross.)

Estes cortantes estão associados, no caso das barras biengastadas i , às ações nodais da Fig. 9.2.5.

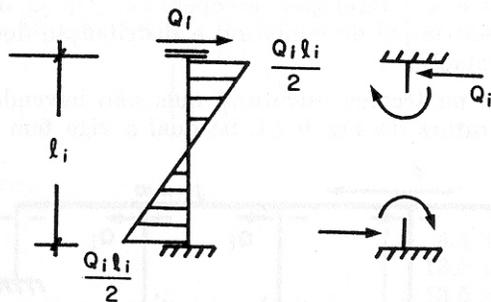


Fig. 9.2.5

No caso das barras engastadas e articuladas, os efeitos são os da Fig. 9.2.6. Se em um dos nós extremos de uma coluna (não importa em qual deles) houver

um momento aplicado M , o cortante $\frac{M}{l_i}$ vem ter ao nó superior e daí se aplica na viga, provocando ações equilibrantes $Q_i = -\delta_i \frac{M_i}{l_i}$, as quais despertam momentos em sentido contrário a M nos nós extremos de todas as colunas. Ver a Fig. 9.2.7a.

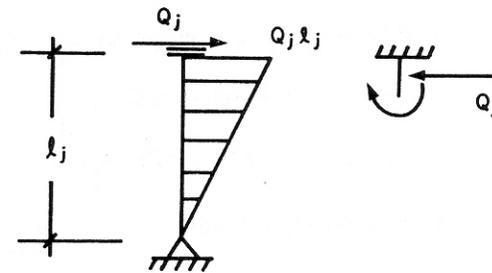


Fig. 9.2.6

O operador matricial $[L]$ é capaz de modificar o vetor dos esforços $\{S\}$ nos nós, equilibrando e distribuindo os efeitos da deslocabilidade por meio de esforços adicionais $\{S\}_i$ na forma

$$\{S\}_i = [L] \{S\}.$$

Para obter cada coluna i de $[L]$, basta fazer $S_i = 1$ na coluna i e obter efeitos equilibrantes, de modo semelhante ao utilizado para o operador $[D]$.

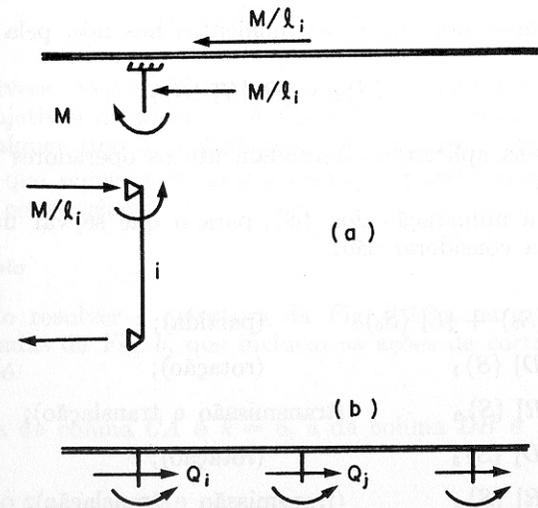


Fig. 9.2.7

9.3.3. Seqüência de Operações

1. Calculam-se as ações de engastamento perfeito $\{S_0\}$.
2. Equilibram-se as ações aplicadas, computando os efeitos da deslocabilidade:

$$\{\bar{S}\}_1 = [L] \{S_0\}.$$

3. Consideram-se as rotações dos nós, empregando o operador $[D]$:

$$\{\bar{S}\}_2 = [D] (\{S_0\} + \{\bar{S}\}_1).$$

4. Transmitem-se os momentos: $\{\bar{S}\}_3 = [T] \{\bar{S}\}_2$.

5. Libera-se nova translação equilibrante:

$$\{\bar{S}\}_4 = [L] (\{\bar{S}\}_2 + \{\bar{S}\}_3) = [L] ([I] + [T]) \{\bar{S}\}_2.$$

Note-se que $\{\bar{S}\}_3 + \{\bar{S}\}_4 = ([T] + [L]([I] + [T])) \{\bar{S}\}_2$ ou fazendo

$$[T] + [L]([I] + [T]) = [R]$$

(operador de transmissão de momentos e equilíbrio a translação), tem-se:

$$\{\bar{S}\}_3 + \{\bar{S}\}_4 = [R] \{\bar{S}\}_2.$$

6. Equilibram-se novamente os momentos nos nós, pela rotação:

$$\{\bar{S}\}_5 = [D] [R] \{\bar{S}\}_2.$$

7. Prossegue-se aplicando alternadamente os operadores $[R]$ e $[D]$ até que haja convergência.

Reajustando a numeração dos $\{\bar{S}\}$, para o que se vai usar simplesmente $\{S\}$, as parcelas a considerar são:

- 1.^a $\{S\}_1 = \{S_0\} + [L] \{S_0\}$ (partida);
- 2.^a $\{S\}_2 = [D] \{S\}_1$ (rotação);
- 3.^a $\{S\}_3 = [R] \{S\}_2$ (transmissão e translação);
- 4.^a $\{S\}_4 = [D] \{S\}_3$ (rotação);
- 5.^a $\{S\}_5 = [R] \{S\}_4$ (transmissão e translação);
- 6.^a $\{S\}_6 = [D] \{S\}_5$

Os operadores $[D]$ e $[R]$ se sucedem alternadamente e as parcelas $\{S\}_k$ diminuem até se tornarem desprezíveis.

9.3.4. Convergência

Em resumo, tem-se, para $\{S\}_1 = \{S_0\} + [L] \{S_0\}$,

$$\{S\} = \{S\}_1 + [D] \{S\}_1 + [R] [D] \{S\}_1 + [D] [R] [D] \{S\}_1 + \\ + [R] [D] [R] [D] \{S\}_1 + \dots$$

ou

$$\{S\} = ([I] + [D] + [R] [D] + [D] [R] [D] + \dots) \{S\}_1.$$

A matriz multiplicadora de $\{S\}_1$ pode ser posta em termos de uma série geométrica, desde que se grupem as parcelas duas a duas:

$$\{S\} = ([I] + [D]) ([I] + [R] [D] + ([R] [D])^2 + ([R] [D])^3 + \dots) \{S\}_1.$$

O primeiro fator é conhecido e o segundo é uma série geométrica matricial, cuja razão $[R] [D]$ tem, em geral, maioria de elementos nulos e os demais muito pequenos. Assim, é de prever-se a convergência.

Note-se que a soma da série é

$$([I] - [R] [D])^{-1} = [s].$$

Caso se obtivesse essa soma por inversão — o que não parece muito de acordo com os objetivos do processo de Cross — os esforços $\{S\}$ estariam explicitados, para qualquer tipo de solicitação, em função de $\{S\}_1$.

No exemplo que segue, será feita a operação parcela por parcela, para que se acompanhe a convergência.

9.3.5. Exemplo

Seja proposto resolver a estrutura da Fig. 9.2.8a, para o que foram adotadas as coordenadas da Fig. b, que incluem as ações de cortante que as barras transmitem ao nó.

A rigidez relativa da coluna CA é $k = 6$, a da coluna DB é $k = 6$ e a da viga CD é $k = 4$.

No nó C : $\mu_2 = 0,6$ e $\mu_4 = 0,4$.

No nó D : $\mu_5 = 0,4$ e $\mu_7 = 0,6$.

O operador $[D]$ é, então:

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,4 & 0 & -0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4 & 0 & -0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O operador de transmissão $[T]$ não tem dificuldade na sua formulação:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

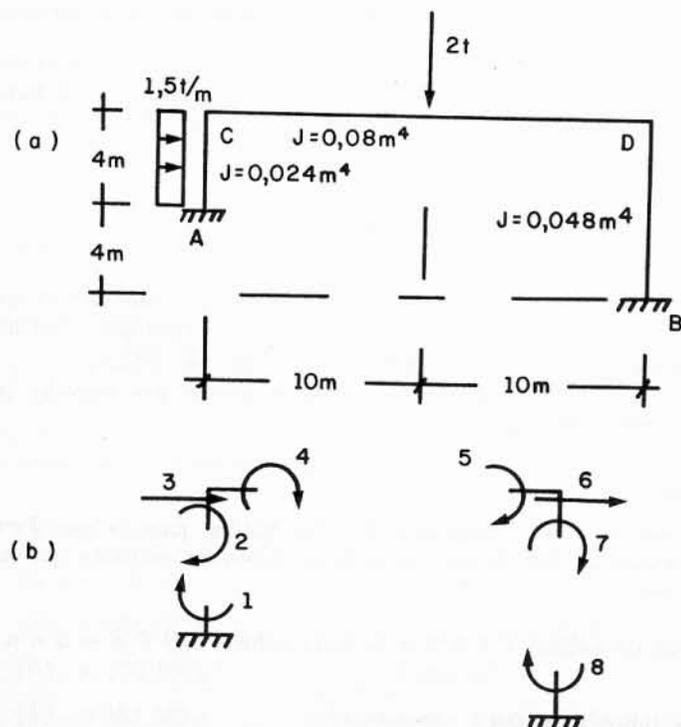


Fig. 9.2.8

Para formular o operador de equilíbrio e distribuição para translação $[L]$, é necessário constatar inicialmente que, existindo uma deslocabilidade linear comum aos nós C e D , as forças se distribuirão pelas colunas CA e DB em partes respectivamente proporcionais a

$$\frac{k_{CA}}{l_{CA}^2} = \frac{6}{16} = 0,3750 \text{ e } \frac{k_{DB}}{l_{DB}^2} = \frac{6}{64} = 0,0937,$$

isto é,

$$\delta_3 = \frac{0,3750}{0,3750 + 0,0937} = 0,80 \text{ e } \delta_6 = \frac{0,0937}{0,3750 + 0,0937} = 0,20.$$

Assim, no modo visto no Item 9.3.2, tem-se:

$$(S_1 = 1) (S_2 = 1) (S_3 = 1) (S_4 = 1) (S_5 = 1) (S_6 = 1) (S_7 = 1) (S_8 = 1)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} -0,400 & -0,400 & 1,600 & 0 & 0 & 1,600 & -0,200 & -0,200 \\ -0,400 & -0,400 & 1,600 & 0 & 0 & 1,600 & -0,200 & -0,200 \\ 0 & 0 & -0,800 & 0 & 0 & 0 & -0,800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,200 & 0 & 0 & 0 & -0,200 & 0 \\ -0,200 & -0,200 & 0,800 & 0 & 0 & 0,800 & -0,100 & -0,100 \\ -0,200 & -0,200 & 0,800 & 0 & 0 & 0,800 & -0,100 & -0,100 \end{bmatrix}$$

O operador $[R]$ será: $[R] = [T] + [L]([I] + [T])$

$$[R] = \begin{bmatrix} -0,600 & -0,100 & 1,600 & 0 & 0 & 1,600 & -0,300 & -0,300 \\ -0,100 & -0,600 & 1,600 & 0 & 0 & 1,600 & -0,300 & -0,300 \\ 0 & 0 & -0,800 & 0 & 0 & -0,800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,300 & -0,300 & 0,800 & 0 & 0 & 0,800 & -0,150 & 0,350 \\ -0,300 & -0,300 & 0,800 & 0 & 0 & 0,800 & 0,350 & -0,150 \end{bmatrix}$$

Note-se que as coordenadas 3 e 6 (cortantes no topo) foram utilizadas com a exclusiva finalidade de permitir a entrada e distribuição das ações provenientes do carregamento exterior. Nas operações posteriores não há preocupação com as parcelas destes cortantes, automaticamente equilibrados na formulação dos efeitos de momentos, em cada operador (1ª, 2ª, 7ª e 8ª colunas). Assim, nos vetores $\{S\}$ os terceiro e sexto termos não foram considerados, para não complicar desnecessariamente a matriz $[L]$ e a própria seqüência de operações.

Cálculo dos vetores $\{S\}$:

$$\{S_0\} = \begin{Bmatrix} 2,00 \\ -2,00 \\ 3,00 \\ 5,00 \\ -5,00 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Efeitos iniciais (ver Fig. 9.2.8a).

Após a 1.^a translação (sem rotação):

$$\{S\}_1 = \{S_0\} + |L| \{S_0\} = \begin{Bmatrix} 6,80 \\ 2,80 \\ 0,60 \\ 5,00 \\ -5,00 \\ -0,60 \\ 2,40 \\ 2,40 \end{Bmatrix}$$

$$\{S\}_2 = [D] \{S\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4,68 \\ 0 \\ -3,12 \\ 1,04 \\ 0 \\ 1,56 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Em seguida, aplicando alternadamente os operadores $[R]$ e $[D]$, tem-se:

$$\{S\}_3 = [R] \{S\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2,34 \\ 0 \\ 0,52 \\ -1,56 \\ 0 \\ 1,17 \\ 1,95 \end{Bmatrix}; \quad \{S\}_4 = [D] \{S\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1,72 \\ 0 \\ -1,14 \\ 0,16 \\ 0 \\ 0,23 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{S\}_5 = [R] \{S\}_4 = \begin{Bmatrix} 0,10 \\ 0,96 \\ 0 \\ 0,08 \\ -0,57 \\ 0 \\ 0,48 \\ 0,60 \end{Bmatrix}; \quad \{S\}_6 = [D] \{S\}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,62 \\ 0 \\ -0,42 \\ 0,04 \\ 0 \\ 0,05 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

E, prosseguindo:

$$\{S\}_7 = \begin{Bmatrix} 0,05 \\ 0,35 \\ 0 \\ 0,02 \\ -0,21 \\ 0 \\ 0,18 \\ 0,36 \end{Bmatrix}; \quad \{S\}_8 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,22 \\ 0 \\ -0,15 \\ 0,01 \\ 0 \\ 0,02 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{S\}_9 = \begin{Bmatrix} 0,02 \\ 0,13 \\ 0 \\ 0 \\ -0,07 \\ 0 \\ 0,06 \\ 0,09 \end{Bmatrix}; \quad \{S\}_{10} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,08 \\ 0 \\ -0,05 \\ 0 \\ 0 \\ 0,01 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{S\}_{11} = \begin{Bmatrix} 0,01 \\ 0,04 \\ 0 \\ 0 \\ -0,02 \\ 0 \\ 0,02 \\ 0,03 \end{Bmatrix}; \quad \{S\}_{12} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,02 \\ 0 \\ -0,02 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{S\}_{13} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,01 \\ 0 \\ 0 \\ -0,01 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{S\}_{14} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,01 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{S\} = \{S\}_1 + \{S\}_2 + \dots + \{S\}_{14} = \begin{Bmatrix} 6,98 \\ -0,72 \\ * \\ 0,72 \\ -6,19 \\ * \\ 6,19 \\ 5,43 \end{Bmatrix} \text{ (em mt).}$$

O diagrama dos momentos fletores está na Fig. 9.2.9.

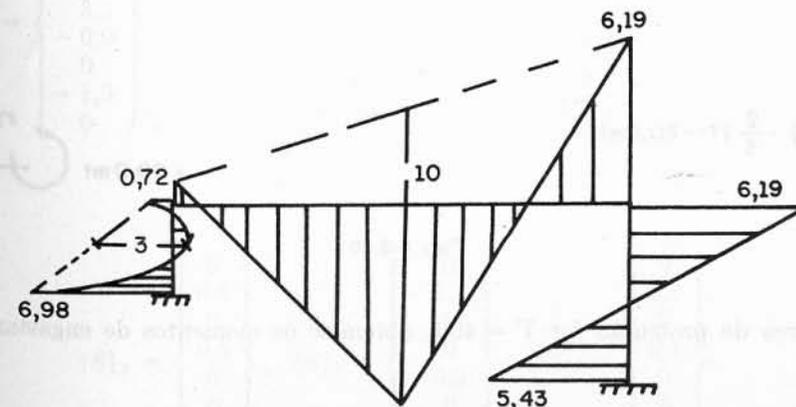


Fig. 9.2.9

Nota. Efetuando o produto $[R][D]$, verifica-se que realmente a razão da série geométrica é uma matriz de elementos muito pequenos, o que explica a convergência.

É interessante aproveitar as matrizes $[D]$, $[L]$ e $[R]$ instituídas para obter, na mesma estrutura, efeitos de protensão. Admita-se que a viga seja protendida, com cabo parabólico de flecha = 0,75 m (Fig. 9.2.10a).

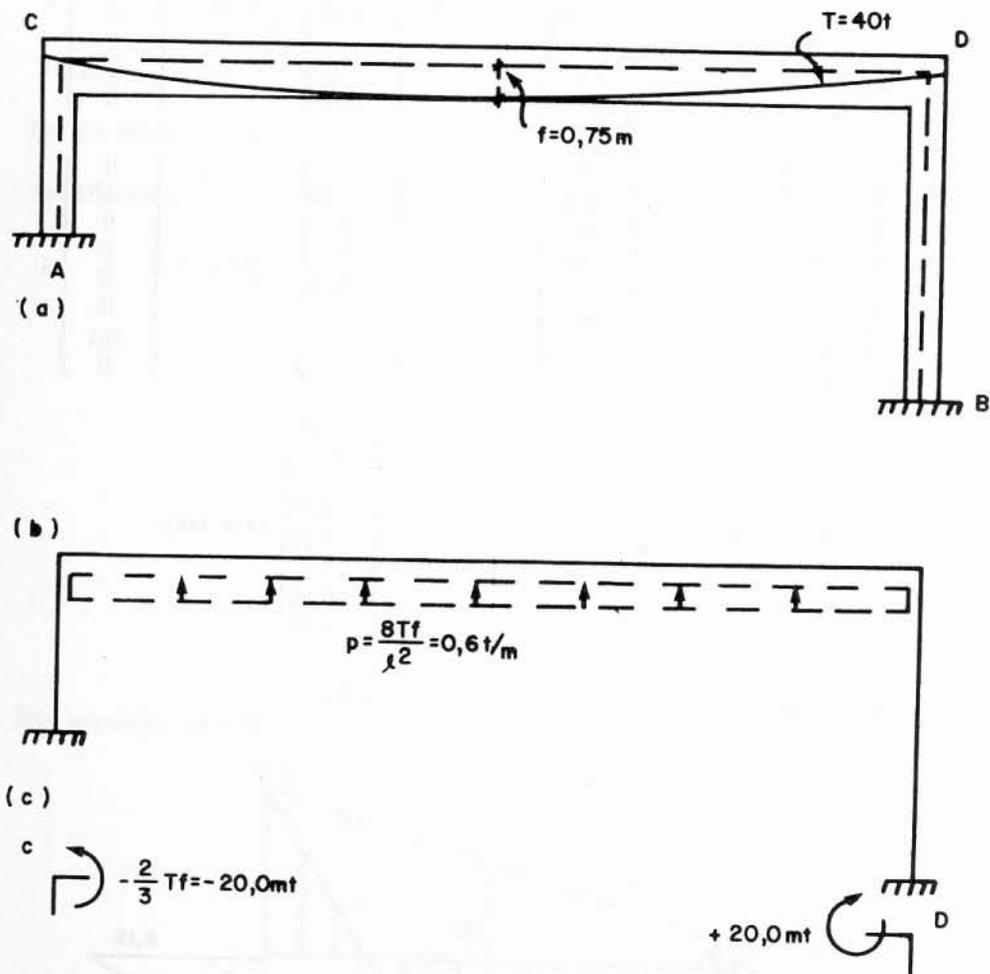


Fig. 9.2.10

Se a força de protensão for $T = 40 t$, obtêm-se os momentos de engastamento perfeito

$$-\frac{2}{3}Tf = -20 mt.$$

$$\{S_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20,0 \\ +20,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; [L] \{S_0\} = \{0\} \therefore \{S\}_{-1} = \{S_0\}.$$

Operando como foi visto, tem-se:

$$\{S\}_2 = [D] \{S\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12,0 \\ 0 \\ 8,0 \\ -8,0 \\ 0 \\ -12,0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{S\}_3 = [R] \{S\}_2 = \begin{Bmatrix} 2,4 \\ -3,6 \\ 0 \\ -4,0 \\ 4,0 \\ 0 \\ -1,8 \\ -7,8 \end{Bmatrix};$$

$$\{S\}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4,5 \\ 0 \\ 3,1 \\ -0,9 \\ 0 \\ -1,3 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{S\}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2,3 \\ 0 \\ -0,5 \\ 1,5 \\ 0 \\ -1,1 \\ -1,8 \end{Bmatrix}; \{S\}_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,7 \\ 0 \\ 1,1 \\ -0,2 \\ 0 \\ -0,2 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{S\}_7 = \begin{Bmatrix} -0,1 \\ -0,9 \\ 0 \\ -0,1 \\ 0,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ -0,6 \end{Bmatrix}$$

$$\{S\}_8 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,6 \\ 0 \\ 0,4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{S\}_9 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,4 \\ 0 \\ 0,2 \\ 0 \\ 0 \\ -0,2 \\ -0,4 \end{Bmatrix}; \{S\}_{10} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0 \\ 0,2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Finalmente:

$$\{S\} = \Sigma \{S\}_i = \begin{Bmatrix} 2,3 \\ 11,8 \\ * \\ -11,8 \\ 17,2 \\ * \\ -17,2 \\ -10,2 \end{Bmatrix}$$

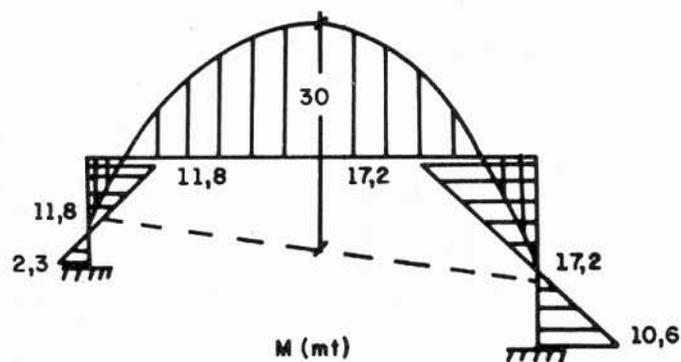


Fig. 9.2.11

3ª Parte

APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE VALORES CARACTERÍSTICOS – DINÂMICA E INSTABILIDADE ELÁSTICA DE ESTRUTURAS DISCRETIZADAS

Considerações Gerais Sobre os Problemas de Valores Característicos – Análise Modal

10.1. Definições

Aparecem freqüentemente, em certos problemas de Engenharia Estrutural, sistemas de equações lineares simultâneas que no formalismo matricial são do tipo:

$$[A] \{X\} = \lambda [B] \{X\} \quad (1)$$

onde:

— A e B são matrizes quadradas de mesma ordem n , ambas simétricas, nas aplicações estruturais, sendo pelo menos uma positiva definida (seja $[B]$ a matriz positiva definida);

— λ é um escalar, que pode assumir n valores (valores característicos), cada valor λ_i tornando possível a verificação das equações com raízes não-nulas; e

— $\{X_i\} \neq \{0\}$ (vetor característico associado a λ_i).

Note-se que, se $[A]$ for positiva definida e $[B]$ não for, dividem-se ambos os membros da equação por λ , obtendo

$$\frac{1}{\lambda} [A] \{X\} = [B] \{X\} \quad (2)$$

agora com a mesma forma e as mesmas restrições da primeira equação, sendo $\frac{1}{\lambda}$ os valores característicos.

Se $[B]$ for uma matriz diagonal com elementos positivos, ocorre um problema especial de valores característicos (de solução menos trabalhosa).

Se $[B]$ for positiva definida (e portanto não-singular), pode-se partir da primeira equação dada e pré-multiplicar os dois membros pela inversa de $[B]$:

$$[B]^{-1}[A] \{X\} = [I] \{X\}$$

ou

$$[H] \{X\} = \lambda [I] \{X\} \quad (3)$$

ou ainda

$$[H] \{X\} = \lambda \{X\}. \quad (3')$$

Obtém-se assim o sistema de equações homogêneas

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$([H] - \lambda [I]) \{X\} = \{0\} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} (h_{11} - \lambda) & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & (h_{22} - \lambda) & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & (h_{nn} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4')$$

Este sistema de equações lineares homogêneas (4') tem sempre a solução trivial $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (solução que nas presentes aplicações não interessa). As soluções não-triviais (com $x_i \neq 0$) só se tornam possíveis se a matriz dos coeficientes for singular, isto é, se seu determinante for nulo:

$$|[H] - \lambda [I]| = 0 \quad (5)$$

$$\begin{vmatrix} (h_{11} - \lambda) & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & (h_{22} - \lambda) & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & (h_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (5')$$

A última, Eq. (5'), é conhecida como equação característica. É do grau n em λ :

$$\lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + C_2 \lambda^{n-2} + \dots + C_{n-1} \lambda + C_n = 0. \quad (5'')$$

Esta equação terá n raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, cada uma delas sendo um valor característico (ou autovalor, ou valor próprio, ou raiz latente) da matriz $[H]$. Se $[B]$ for positiva definida (como se está supondo), todos os λ_i são reais. Se $[A]$ também for positiva definida (como sucede nas aplicações usuais), todos os valores característicos λ_i são positivos.

Levando cada valor λ_i às Eqs. (4'), obtém-se um sistema indeterminado. Arbitrando um dos valores de x (por exemplo, o primeiro, x_{1i}) e considerando $(n-1)$ equações, determinam-se os demais valores das raízes $x_{2i}, x_{3i}, \dots, x_{ni}$.

Assim o vetor

$$\{X_i\} = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix} \text{ está associado ao valor } \lambda_i.$$

Em resumo, as soluções são

$$\lambda_1 \rightarrow \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \lambda_2 \rightarrow \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \lambda_n \rightarrow \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Os vetores $\{X_1\}, \{X_2\}, \dots, \{X_n\}$ são chamados *valores característicos*, *valores próprios*, *vetores modais* ou simplesmente *modos* de $[H]$.

Observação. Como se viu, não foram obtidos valores absolutos para os elementos de cada vetor e sim valores relativos, uma vez que, em cada caso, arbitrou-se um dos valores x .

Os vetores modais $\{X_i\}$ costumam ser *normalizados* segundo uma das duas seguintes formas:

a. tomando cada um deles multiplicado por uma constante, de sorte que um de seus elementos (o 1.º termo, por exemplo) seja unitário;

b. escolhendo em cada vetor $\{X_i\}$ o fator constante, de sorte que

$$\{X_i\}^T [B] \{X_i\} = 1$$

(normalização em relação a $[B]$, que funciona nesse caso como matriz de pesos).

Dispondo todos os vetores modais $\{X_1\}, \{X_2\}, \dots$ em uma matriz, tem-se:

$$[M] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \text{ (matriz modal).}$$

Os valores característicos $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ podem ser dispostos em matriz diagonal:

$$[S] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ (matriz espectral ou espectro de } [H]\text{)}.$$

O problema dos valores característicos surge sempre que se deseja diagonalizar uma matriz. Em particular, na Mecânica Estrutural encontra-se tal problema associado à análise de vibrações, à instabilidade elástica, à análise de tensões e deformações, bem como à diagonalização das matrizes de flexibilidade e de rigidez empregando o centro elástico.

10.1.1. Exemplo

Seja proposto obter os valores característicos e vetores característicos da matriz H dada a seguir:

$$[H] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Trata-se de tornar possível a verificação, com raízes não-nulas, do sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

ou finalmente:

$$\begin{bmatrix} (4 - \lambda) & -2 & 0 \\ -2 & (4 - \lambda) & -2 \\ 0 & -2 & (4 - \lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A equação característica é:

$$\begin{vmatrix} (4 - \lambda) & -2 & 0 \\ -2 & (4 - \lambda) & -2 \\ 0 & -2 & (4 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 40\lambda - 32 = 0.$$

Uma das raízes é $\lambda = 4$, conforme se pode verificar pela substituição. Dividindo por $(\lambda - 4)$ e resolvendo a equação do 2.º grau, são obtidos dois outros valores de λ :

$$\lambda = 4 - 2\sqrt{2} = 1,172 \quad \text{e} \quad \lambda = 4 + 2\sqrt{2} = 6,828.$$

Portanto, os valores característicos são:

$$\lambda_1 = 1,172; \quad \lambda_2 = 4; \quad \lambda_3 = 6,828.$$

Fazendo $\lambda = \lambda_1 = 1,172$ e arbitrando $x_{11} = 1,00$, duas das três equações acima dão $x_{21} = 1,41$ e $x_{31} = 1,00$.

O primeiro vetor característico ou vetor modal, associado a $\lambda_1 = 1,172$, é

$$\{X_1\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,41 \\ 1,00 \end{Bmatrix}.$$

Fazendo $\lambda = \lambda_2 = 4$ e procedendo da mesma forma, obtém-se, para $x_{12} = 1,00$,

$$x_{22} = 0 \quad \text{e} \quad x_{32} = -1,00.$$

Logo, o 2.º modo, associado a $\lambda_2 = 4$, é

$$\{X_2\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0 \\ -1,00 \end{Bmatrix}.$$

Para $\lambda = \lambda_3 = 6,828$, seria obtido o 3.º modo:

$$\{X_3\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,41 \\ 1,00 \end{Bmatrix}.$$

A matriz espectral é:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1,172 & 0 & 0 \\ 0 & 4,000 & 0 \\ 0 & 0 & 6,828 \end{bmatrix}.$$

A matriz modal é

$$[M] = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,41 & 0 & -1,41 \\ 1,00 & -1,00 & 1,00 \end{bmatrix}.$$

Observação. Este problema de valores característicos bem poderia estar ligados ao estudo das vibrações livres ou da flambagem pela compressão axial da coluna da Fig. 10.1.1. Se as coordenadas x_1, x_2, x_3 fossem as indicadas, os modos $\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}$ definiriam a configuração deformada da coluna, quando a frequência (no caso da vibração) ou a carga crítica (no caso da flambagem) tivesse valor associado a cada autovalor $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ obtido.

Diz-se que n vetores de mesma ordem $\{A_1\} \dots \{A_n\}$ são *linearmente independentes* se a condição

$$C_1 \{A_1\} + C_2 \{A_2\} + \dots + C_n \{A_n\} = \{0\} \text{ se}$$

verifica quando todos os escalares $C_1, C_2 \dots C_n$ são nulos:

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0.$$

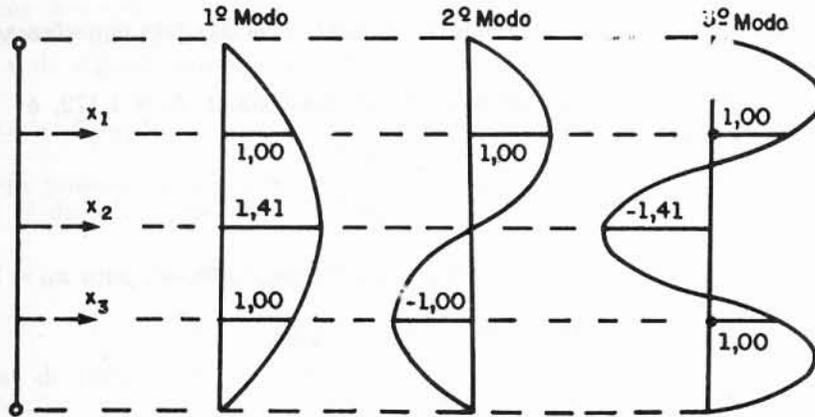


Fig. 10.1.1

Os vetores ou modos característicos são *linearmente independentes*, isto é, a condição

$$\begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,41 & 0 & -1,41 \\ 1,00 & -1,00 & 1,00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ (no caso do problema estudado)}$$

só admite a solução trivial $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0$.

Esta propriedade significaria, no exemplo citado, que a combinação linear de modos de vibração ou de flambagem jamais poderia dar lugar à ausência de vibração ou de flambagem.

Por outro lado, se $\{A_1\}, \dots \{A_n\}$ forem linearmente independentes, qualquer outro vetor de mesma ordem $\{A\}$ pode sempre ser obtido como combinação linear daqueles (desde que não seja nulo).

Assim, no exemplo em estudo, a configuração deformada $\begin{Bmatrix} 1,00 \\ -0,50 \\ -0,40 \end{Bmatrix}$ participa dos três modos:

$$C_1 \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,41 \\ 1,00 \end{Bmatrix} + C_2 \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0 \\ -1,00 \end{Bmatrix} + C_3 \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,41 \\ 1,00 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -0,50 \\ -0,40 \end{Bmatrix}.$$

Para determinar os "fatores de participação" C_1, C_2, C_3 , bastaria resolver as equações:

$$\begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,41 & 0 & -1,41 \\ 1,00 & -1,00 & 1,00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -0,50 \\ -0,40 \end{Bmatrix} \dots \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,41 & 0 & -1,41 \\ 1,00 & -1,00 & 1,00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -0,50 \\ -0,40 \end{Bmatrix}.$$

$C_1 = -0,026; C_2 = 0,700; C_3 = 0,326$ (da elástica exemplificada, o 1.º modo participa com -2,6%, o 2.º com 70% e o 3.º com 32,6%).

Ao serem estudadas certas propriedades dos vetores característicos, vai-se ver como determinar diretamente os fatores de participação $C_1, C_2, \dots C_n$.

Deve ser notado que a determinação direta dos valores e vetores característicos, como se viu é operação trabalhosa, envolvendo a resolução de uma equação do grau n em λ , além da obtenção dos vetores modais (cada um deles dependendo de um sistema de $n - 1$ equações lineares). Por esta razão, os métodos numéricos são, aqui, de grande valia, freqüentemente sendo aplicados com apelo à computação eletrônica.

10.2. Propriedades dos Valores e Vetores Característicos

10.2.1. Ortogonalidade dos Modos

"Os modos característicos $\{X_i\}$ e $\{X_j\}$, associados a autovalores *distintos* $\lambda_i \neq \lambda_j$, são *ortogonais* entre si, tanto com relação à matriz $[B]$, como com relação a $[A]$, se ambas forem simétricas:"

$$\begin{cases} \{X_i\}^T [B] \{X_j\} = 0 \\ \{X_i\}^T [A] \{X_j\} = 0 \end{cases}, \tag{6}$$

para $\lambda_i = \lambda_j$.

As matrizes $[B]$ e $[A]$ são, neste caso, as matrizes "de pesos".

De fato, no modo i : $[A] \{X_i\} = \lambda_i [B] \{X_i\}$;

no modo j : $[A] \{X_j\} = \lambda_j [B] \{X_j\}$.

Pré-multiplicando a 1.ª por $\{X_j\}^T$ e a 2.ª por $\{X_i\}^T$:

$$\{X_j\}^T [A] \{X_i\} = \lambda_i \{X_j\}^T [B] \{X_i\} \tag{*}$$

$$\{X_i\}^T [A] \{X_j\} = \lambda_j \{X_i\}^T [B] \{X_j\}. \tag{**}$$

Transpondo a (*): $\boxed{\{X_j\}^T [A] \{X_i\} = \lambda_i \{X_i\}^T [B] \{X_j\}}. \tag{***}$

(Note-se que as matrizes de peso são simétricas.)

Subtraindo (**) de (***): $(\lambda_i - \lambda_j) \{X_i\}^T [B] \{X_j\} = 0$

ou, por ser $\lambda_i \neq \lambda_j$: $\boxed{\{X_i\}^T [B] \{X_j\} = 0}$

e, tendo em vista (**): $\boxed{\{X_i\}^T [A] \{X_j\} = 0}.$

No exemplo estudado em 10.1 foram obtidos os modos $\{X_1\}$, $\{X_2\}$, $\{X_3\}$ partindo da matriz $[H]$, que se pode supor originária de $[H] = [B]^{-1}[A]$, onde

$$[B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [A] = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

O problema era portanto

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}.$$

É fácil verificar que dois modos (por exemplo, $\{X_1\}$ e $\{X_2\}$) são ortogonais:

$$\{X_1\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,41 \\ 1,00 \end{Bmatrix}, \quad \{X_2\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0 \\ -1,00 \end{Bmatrix}.$$

$$[1,00 \ 1,41 \ 1,00] \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0 \\ 1,00 \end{Bmatrix} = 0.$$

$$[1,00 \ 1,41 \ 1,00] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0 \\ -1,00 \end{Bmatrix} = 0.$$

Nota. Se dois autovalores forem iguais, $\lambda_i = \lambda_j$, a propriedade não se verifica, pois qualquer combinação linear de $\{X_i\}$ e $\{X_j\}$, tal como $C_i \{X_i\} + C_j \{X_j\}$, é também um modo.

10.2.2. Expansão de um Vetor $\{V\}$ como Combinação Linear dos Modos Naturais

A ortogonalidade dos modos permite obter com simplicidade a solução do problema apresentado no final de 10.1. Dado um vetor $\{V\}$, da mesma ordem n que a dos vetores modais $\{X_1\}$, $\{X_2\}$..., isto é,

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{Bmatrix},$$

obter $\{V\}$ como expansão linear

$$\{V\} = C_1 \{X_1\} + C_2 \{X_2\} + \dots + C_n \{X_n\}.$$

Trata-se de calcular diretamente as constantes $C_1, C_2 \dots C_n$, tais que

$$\{V\} = \sum_{i=1}^n C_i \{X_i\}.$$

Pré-multiplicando por $\{X_j\}^T [B]$,

$$\{X_j\}^T [B] \{V\} = \sum_{i=1}^n C_i \{X_j\}^T [B] \{X_i\}.$$

Ora, o somatório do 2.º membro reduz-se a um termo, diferente de zero apenas quando $i = j$. De fato, quando $j \neq i$, tem-se

$$\{X_j\}^T [B] \{X_i\} = 0.$$

Logo

$$\{X_j\}^T [B] \{V\} = C_j \{X_j\}^T [B] \{X_j\}$$

$$\therefore C_j = \frac{\{X_j\}^T [B] \{V\}}{\{X_j\}^T [B] \{X_j\}}. \quad (7)$$

No exemplo visto em 10.1, no qual $[A]$ e $[B]$ têm os valores já citados, chega-se a

$$C_1 = \frac{\{X_1\}^T [B] \{V\}}{\{X_1\}^T [B] \{X_1\}} = \frac{-0,21}{8} = -0,026$$

e do mesmo modo $C_2 = \frac{2,80}{4} = 0,700$ e $C_3 = \frac{2,61}{8} = 0,326$,

$$\begin{Bmatrix} 1,00 \\ -0,50 \\ -0,40 \end{Bmatrix} = -0,026 \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,41 \\ 1,00 \end{Bmatrix} + 0,700 \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0 \\ -1,00 \end{Bmatrix} + 0,326 \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,41 \\ 1,00 \end{Bmatrix}.$$

10.2.3. Quociente de Rayleigh

Em 10.2, foi obtida a expressão (***):

$$\{X_i\}^T [A] \{X_j\} = \lambda_i \{X_i\}^T [B] \{X_j\}.$$

Se for $i = j$, tem-se:

$$\lambda_i = \frac{\{X_i\}^T [A] \{X_i\}}{\{X_i\}^T [B] \{X_i\}}. \quad (8)$$

“Se se aplicar a Eq. (8), utilizando, em lugar de $\{X_i\}$ (modo exato), uma aproximação $\{X\}$, o quociente

$$\lambda_R = \frac{\{X\}^T [A] \{X\}}{\{X\}^T [B] \{X\}} \quad (\text{quociente de Rayleigh}) \quad (9)$$

constitui uma boa aproximação para o autovalor λ_i .”

De fato, a expansão de $\{X\}$ daria:

$$\{X\} = C_1 \{X_1\} + C_2 \{X_2\} + \dots + C_i \{X_i\} + \dots + C_n \{X_n\}$$

onde C_i seria predominante (muito maior do que $C_1, C_2 \dots C_n$), porque $\{X\}$ é aproximação de $\{X_i\}$.

Ora, aplicando o quociente (9), obter-se-ia:

$$\lambda_R = \frac{C_1^2 \lambda_1 + C_2^2 \lambda_2 + \dots + C_i^2 \lambda_i + \dots + C_n^2 \lambda_n}{C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_i^2 + \dots + C_n^2}$$

Dividindo o numerador e o denominador por C_i^2 e considerando que

$$\frac{C_j}{C_i} < \epsilon \ll 1$$

(ϵ muito pequeno para qualquer j), conclui-se que

$$\lambda_R \rightarrow \frac{C_i^2 \lambda_i}{C_i^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\lambda_R \rightarrow \lambda_i}$$

Esta propriedade fornece uma solução numérica para obter λ_i . Estimando $\{X\}$, próximo de $\{X_i\}$, o quociente de Rayleigh dará boa aproximação para λ_i .

Assim, no exemplo estudado, se se fizer para o 1.º modo a estimativa

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,20 \\ 1,00 \end{Bmatrix},$$

tem-se

$$\{X\}^T [A] \{X\} = [1,00 \ 1,20 \ 1,00] \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,20 \\ 1,00 \end{Bmatrix} = 8,32.$$

$$\{X\}^T [B] \{X\} = [1,00 \ 1,20 \ 1,00] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,20 \\ 1,00 \end{Bmatrix} = 6,88.$$

O quociente de Rayleigh é $\lambda_R = \frac{8,32}{6,88} = 1,20$

(aproximação de λ_1 , cujo valor exato é 1,17).

Nota. O quociente de Rayleigh permite chegar, por iteração, aos valores de λ_1 e $\{X_1\}$.

De fato, substituindo λ por $\lambda_R = 1,20$ nas equações do exemplo citado (Item 10.1), vem:

$$\begin{bmatrix} (4 - 1,20) & -2 & 0 \\ -2 & (4 - 1,20) & -2 \\ 0 & -2 & (4 - 1,20) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Considerando duas equações e fazendo $x_1 = 1,00$, chega-se a $x_2 = 1,40$ e $x_3 = 1,00$.

Obteve-se, assim, quase exatamente o modo $\{X_1\}$:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,40 \\ 1,00 \end{Bmatrix}.$$

Voltando com este vetor ao quociente de Rayleigh, seria

$$\lambda_R = 1,172 = \lambda_1.$$

10.2.4. Diagonalização da Matriz [A]

Se as colunas $\{X_i\}$ da matriz modal $[M]$ forem normalizadas como foi visto de sorte que $\{X_i\}^T [B] \{X_i\} = 1$, esta matriz $[M]$ pode operar uma transformação por congruência na matriz $[A]$, transformando-a na matriz diagonal $[S]$ (matriz espectral):

$$\boxed{[M]^T [A] [M] = [S]} \quad (10)$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

De fato, sendo $[A] \{X_1\} = \lambda_1 [B] \{X_1\}, \dots [A] \{X_i\} = \lambda_i [B] \{X_i\}$ e considerando que $[\{X_1\} \{X_2\} \dots \{X_n\}] = [M]$, tem-se

$$[A][M] = [B][M][S],$$

onde

$$[S] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Pré-multiplicando por $[M]^T$:

$$[M]^T [A][M] = [M]^T [B][M][S]$$

(tendo em vista que

$$\{X_i\}^T [B] \{X_j\} = 0$$

e

$$\{X_i\}^T [B] \{X_i\} = 1).$$

Mas

$$[M]^T [B][M] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

donde se conclui a Eq. (10).

10.2.5. Outras Propriedades

1. As matrizes $[H]$ e $[H]^T$ têm os *mesmos autovalores*. As matrizes modais de $[H]^T$ e $[H]$ são ortogonais entre si.

2. Se $[H]$ tem autovalores λ_i , $[H]^{-1}$ terá autovalores $\frac{1}{\lambda_i}$.

3. Os autovalores de $[H]' = C[H]$ são

$$\lambda'_i = C\lambda_i.$$

4. *Teorema de Cayley — Hamilton. Toda matriz quadrada $[H]$ satisfaz à sua própria equação característica.*

Foi visto que $[H] \{X\} = \lambda \{X\}$ dá lugar à equação característica

$$\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + \dots + C_{n-1}\lambda + C_n = 0.$$

Ora

$$[I] \{X\} = \{X\}; \tag{x}$$

$$[H] \{X\} = \lambda \{X\}; \tag{xx}$$

$$\text{multiplicando por } [H]: [H]^2 \{X\} = \lambda^2 \{X\}; \tag{xxx}$$

.....

$$\text{e finalmente } [H]^n \{X\} = \lambda^n \{X\}. \tag{xxxx}$$

$$\text{Os autovalores de } [H]^n \text{ são } \lambda_i^n \tag{11}$$

multiplicando (*) por C_n , (**) por C_{n-1} , (***) por C_{n-2} ... e somando, tem-se

$$[H]^n + C_1[H]^{n-1} + \dots + C_{n-2}[H]^2 + C_{n-1}[H] + C_n[I] \{X\} = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \dots + C_{n-2}\lambda^2 + C_{n-1}\lambda + C_n \{X\}.$$

Ou, tendo em vista ser nulo o 2.º membro:

$$[H]^n + C_1[H]^{n-1} + \dots + C_{n-2}[H]^2 + C_{n-1}[H] + C_n[I] = [0]$$

(Teorema de Cayley-Hamilton).

10.2.6. Exemplo

A matriz $[H] = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ dá lugar ao problema de autovalores

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}.$$

A equação característica é:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^2 - 7 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vibrações Livres de Sistemas Discretizados

11.1. Graus de Liberdade

O número de graus de liberdade de uma estrutura com massas concentradas (ou supostas concentradas) é número de coordenadas independentes, necessárias para definir a posição de todas essas massas.

Assim, a coluna da Fig. 11.1.1 suporta em A uma massa.

No caso geral, tem 6 graus de liberdade (3 translações e 3 rotações de A).

Se se admitirem como significativas apenas as deformações axiais da coluna, as deformações por flexão no plano e as deformações por torção há 3 graus de liberdade (coordenadas 1, 2 e 3, na Fig. 11.1.1).

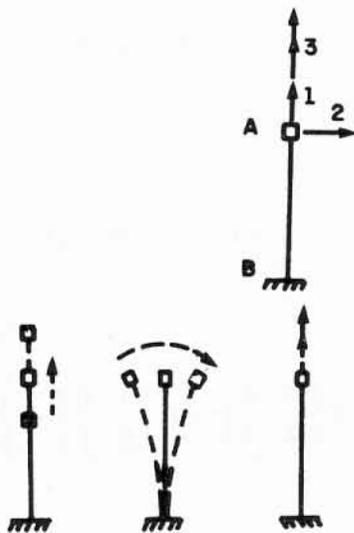


Fig. 11.1.1

O quadro com viga rígida tem 3 graus de liberdade (coordenadas 1, 2 e 3), se forem consideradas todas as deformações planas das colunas. Desprezando-se

as deformações axiais das colunas, tem apenas 1 grau de liberdade (coordenada 2), ilustrado na Fig. 11.1.1b.

Uma viga com massa distribuída continuamente tem um número infinito de graus de liberdade.

Se as massas são concentradas, as equações do movimento são equações diferenciais ordinárias, cuja solução recai em sistemas de equações algébricas, lineares e simultâneas. As estruturas com distribuição *contínua* de massa dão lugar a sistemas de equações diferenciais de derivadas parciais, cuja solução analítica é difícil. Em tais casos, é usual discretizar o problema, concentrando

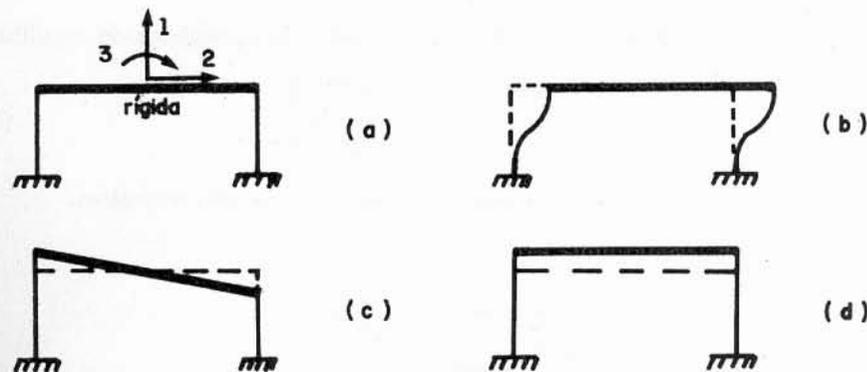


Fig. 11.1.2

as massas em determinados pontos, de sorte a permitir o tratamento ora em estudo.

11.2. Vibrações Livres de Sistemas com Um Grau de Liberdade

Estruturas tais como as das Figs. 11.2.1a e b recaem no modelo da Fig. c: uma massa M com 1 movimento possível, submetida a uma *ligação elástica linear* de constante k (rigidez).

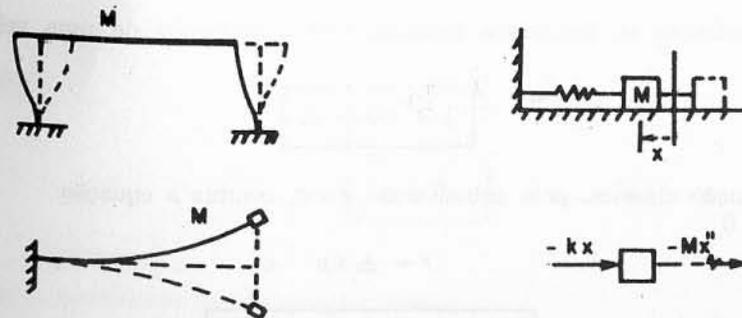


Fig. 11.2.1

Se não houver outras forças e a massa estiver afastada da sua posição de equilíbrio, obtêm-se, omitindo (pelo fato de se anularem) o peso e a reação estática:

1. força elástica $-kx$;
2. força de inércia (d'Alembert)

$$-M\ddot{x} = -M \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Aplicando o Teorema de d'Alembert, chega-se a um problema de equilíbrio:

$$\Sigma X = 0 \quad \therefore \quad -M\ddot{x} - kx = 0. \quad (13)$$

Observação. Se houvesse força externa $F(t)$, a equação não seria homogênea:

$$-M\ddot{x} - kx + F(t) = 0$$

ou

$$M\ddot{x} + kx = F(t).$$

Estão sendo estudadas vibrações livres sem amortecimento e, portanto,

$$M\ddot{x} + kx = 0. \quad (14)$$

Para simplificar esta equação diferencial homogênea, faz-se

$$\frac{k}{M} = p^2, \quad (15)$$

onde p (pulsão ou freqüência circular) tem a dimensão de uma velocidade angular

$$\ddot{x} + p^2x = 0.$$

A solução clássica, pela substituição $x = e^r$, conduz à equação $r^2 + p^2 = 0$

$$\therefore r = \pm ip \quad e$$

$$x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt.$$

As constantes C_1 e C_2 dependem das condições iniciais. Se no instante inicial $t = 0$ houver uma deflexão x_0 e velocidade x'_0 , chega-se a

$$C_1 = x_0 \quad e \quad C_2 = \frac{x'_0}{p}$$

$$x = x_0 \cos pt + \frac{x'_0}{p} \sin pt$$

e, por uma transformação simples e clássica,

$$x = x_m \cos (pt + \varphi_0) \quad (16)$$

$\left\{ \begin{array}{l} x_m \text{ — amplitude;} \\ \varphi_0 \text{ (constante) — ângulo de fase.} \end{array} \right.$

Derivando (16) chega-se à velocidade e à aceleração:

$$v = \dot{x} = -p x_m \sin (pt + \varphi_0) \quad (17)$$

e

$$\ddot{x} = -p^2 x_m \cos (pt + \varphi_0) = -p^2 x. \quad (18)$$

O movimento é harmônico simples, com freqüência

$$f = \frac{p}{2\pi} \quad (19)$$

e período

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi}{p}. \quad (20)$$

amplitude é x_m .

Se o movimento for de rotação, tem-se

$$-I\ddot{\theta} - k\theta = 0$$

e, para $p^2 = \frac{k}{I}$,

$$\theta = \theta_m \cos(pt + \varphi_0).$$

A rigidez k da suspensão, no caso do pórtico da Fig. 11.2.2a, é a força estática capaz de manter a deflexão unitária:

$$k = 2k' = 2 \times \frac{12EJ}{l^3} = \frac{24EJ}{l^3}.$$

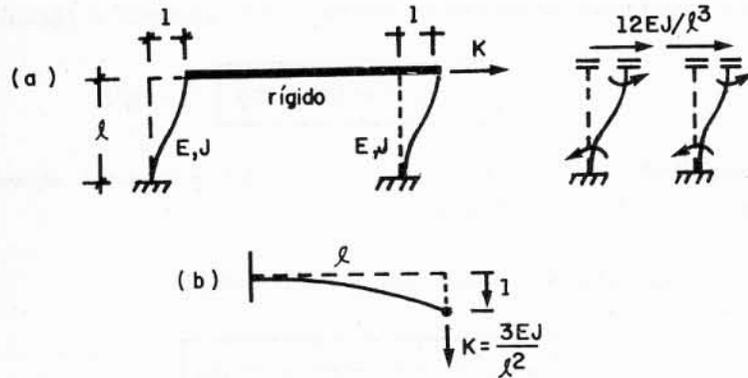


Fig. 11.2.2

No caso da viga em balanço,

Fig. b, é

$$k = \frac{3EJ}{l^3}.$$

Mesmo no caso simples de sistemas com 1 grau de liberdade, pode-se caracterizar o problema de autovalor. De fato, na equação diferencial

$$x'' + \frac{k}{M}x = 0,$$

se for ensaiada a solução

$$x = x_m \cos(pt + \varphi_0),$$

obtém-se $x'' = -p^2 x_m \cos(pt + \varphi_0)$.

$$-p^2 x_m \cos(pt + \varphi_0) + \frac{k}{M} x_m \cos(pt + \varphi_0) = 0.$$

Só haverá solução não trivial se o valor característico $p^2 = \lambda$ for $p^2 = \frac{k}{M}$.

11.3. Caso das Estruturas com um Número Finito de Graus de Liberdade

Sejam 1, 2, 3 ... n as coordenadas que assinalam as deflexões das massas $M_1, M_2 \dots M_n$ (Fig. 11.3.1);

k_{ij} = coeficiente de rigidez que dá a ação mecânica (força) segundo a coordenada j , associada à configuração deformada com $x_i = 1$ e demais $x = 0$.

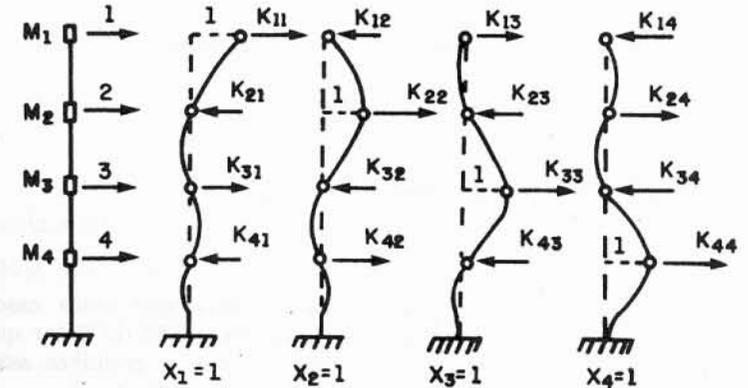


Fig. 11.3.1

Considere-se a estrutura vibrando, num instante t , na posição assinalada por abscissas $x_1, x_2 \dots$, com acelerações $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2 \dots$.

Cada massa M_i estará sujeita a duas forças:

$$F_i = -k_{i1}x_1 - k_{i2}x_2 \dots - k_{in}x_n$$

(força elástica, tendendo a anular a elongação x_i);

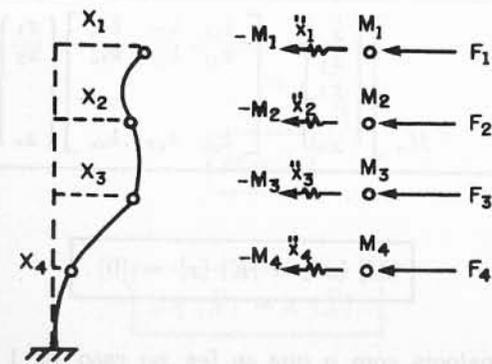


Fig. 11.3.2

$$F_i = -M_i \ddot{x}_i \text{ (força de inércia).}$$

Logo, as equações de equilíbrio (d'Alembert) são:

$$\begin{aligned} -M_1 \ddot{x}_1 - k_{11}x_1 - k_{12}x_2 - \dots - k_{1n}x_n &= 0 \\ -M_2 \ddot{x}_2 - k_{21}x_1 - k_{22}x_2 - \dots - k_{2n}x_n &= 0 \\ \dots & \\ -M_n \ddot{x}_n - k_{n1}x_1 - k_{n2}x_2 - \dots - k_{nn}x_n &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Sejam:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \text{ (vetor dos deslocamentos);}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{bmatrix} \text{ (matriz das massa que neste caso é uma matriz diagonal, sendo de notar que, quando } x_i \text{ for rotação, a grandeza associada é } I_i, \text{ momento de inércia);}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \text{ (matriz de rigidez da estrutura, que funciona como um sistema de molas elásticas).}$$

As Eqs. (21) podem ser escritas;

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

ou

$$[M] \{x''\} + [K] \{x\} = \{0\}.$$

Solução. Por analogia com o que se fez no caso de 1 grau de liberdade pré-multiplique-se por $[M]^{-1}$ (a matriz de massas não é singular), obtendo

$$\{\ddot{X}\} + [M]^{-1}[K] \{X\} = \{0\} \quad (23)$$

ou

$$\{\ddot{X}\} + [D] \{X\} = \{0\}, \quad (24)$$

onde

$$[D] = [M]^{-1}[K] \quad (25)$$

é a "matriz dinâmica" (alguns autores assim designam a sua inversa).

As Eqs. (24), lineares e homogêneas, admitem soluções da forma:

$$\{X\} = \{\bar{X}\} \cos(pt + \phi_0) = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{Bmatrix} \cos(pt + \phi_0),$$

onde \bar{x}_i é uma amplitude.

De fato, derivando vem $\{\ddot{X}\} = -p^2 \{\bar{X}\} \cos(pt + \phi_0) = -p^2 \{X\}$.

A substituição nas Eqs. (24) dá:

$$-p^2 \{\bar{X}\} + [D] \{\bar{X}\} = \{0\},$$

(simplificando $\cos(pt + \phi_0)$ que é fator comum).

Para

$$p^2 = \lambda \quad (26)$$

tem-se

$$[D] \{\bar{X}\} = \lambda \{\bar{X}\}. \quad (27)$$

As Eqs. (27) mostram que se trata de um problema de valores característicos:

$$\begin{bmatrix} (D_{11} - \lambda) & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & (D_{22} - \lambda) & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & (D_{nn} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \dots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

A cada valor característico λ_i corresponde uma frequência circular $p_i = \sqrt{\lambda_i}$ e um vetor modal

$$\{\bar{X}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_{1i} \\ \bar{x}_{2i} \\ \dots \\ \bar{x}_{ni} \end{Bmatrix} \quad (\text{modo natural de vibração}):$$

$$\lambda_i \rightarrow p_i \rightarrow \text{frequência natural} \quad f_i = \frac{p_i}{2\pi} \rightarrow \text{modo natural} \quad \{\bar{X}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_{1i} \\ \bar{x}_{2i} \\ \dots \\ \bar{x}_{ni} \end{Bmatrix}$$

As equações gerais do movimento (solução geral do sistema de equações diferenciais) são:

$$\{X\} = C_1 \{\bar{X}_1\} \cos(p_1 t + \phi_1) + C_2 \{\bar{X}_2\} \cos(p_2 t + \phi_2) + \dots + C_n \{\bar{X}_n\} \cos(p_n t + \phi_n).$$

Como se vê, o movimento vai participar de todos os modos naturais. Os coeficientes constantes $C_1, C_2 \dots C_n$ dessa combinação linear dependem das condições que provocaram a vibração.

Na prática, interessam os modos correspondentes a frequências naturais mais baixas (menores λ), porque essas frequências são mais facilmente atingidas pelas forças excitadoras (vento, forças excêntricas de máquinas, terremotos etc.), havendo perigo de ressonância.

11.3.1. Exemplos

Determinar as frequências e os modos naturais de vibração da estrutura da Fig. 11.3.3 (shear building) com vigas rígidas e colunas iguais com $E = 2,1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ e $J = 0,00248 \text{ m}^4$.

As massas concentradas nos níveis dos tetos são iguais $M = \frac{P}{g} = \frac{19,6 \text{ t}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 2$ unidades técnicas de massa (sistema m-tf-s).

Solução. A estrutura tem 2 graus de liberdade (translação dos 2 tetos, coordenadas 1 e 2 da Fig. 11.3.4).

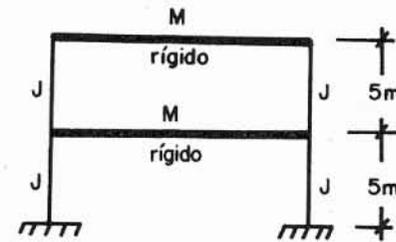
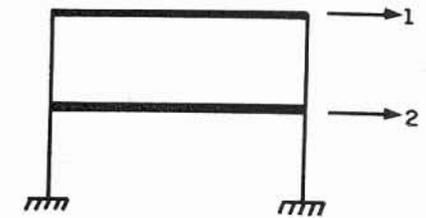


Fig. 11.3.3



(coordenadas)

Fig. 11.3.4

A rigidez de cada coluna é

$$k = \frac{12EJ}{l^3} \approx 500 \text{ t/m.}$$

A matriz de rigidez da estrutura pode ser obtida como se vê na Fig. 11.3.5 (rigidez direta).

$$K = 1000 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

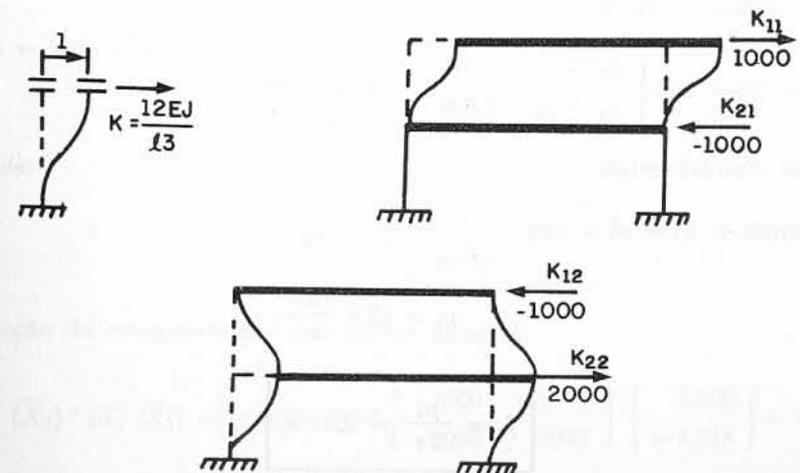


Fig. 11.3.5

Matriz das massas: $[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Matriz dinâmica: $[D] = [M]^{-1} [K] =$

$$= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times 1000 = 500 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Equações do movimento vibratório livre:

$$\{\ddot{X}\} + 500 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \{X\} = \{0\}.$$

Para $\lambda = p^2$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} (500 - \lambda) & -500 \\ -500 & (1000 - \lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

Equação característica;

$$\begin{vmatrix} (500 - \lambda) & -500 \\ -500 & (1000 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

ou $\lambda^2 - 1500\lambda + 250\,000 = 0$.

$$\lambda = 750 \mp 559 \begin{cases} \lambda_1 = p_1^2 = 191 \\ \lambda_2 = p_2^2 = 1309 \end{cases} \text{ (autovalores).}$$

1.º modo (Fundamental):

Corresponde a $\lambda_1 = p_1^2 = 191$

$$\therefore p_1 = 13,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = 2,2 \text{ c/s.}$$

Vetor modal correspondente: arbitrando $\bar{x}_1 = 1,000$ e para $\lambda_1 = 191$, uma das equações (*) dá: $\bar{x}_2 = 0,618$.

1.º modo:

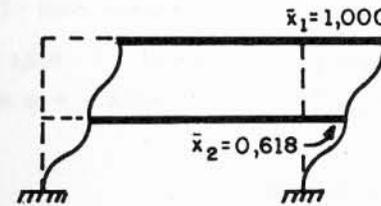
$$\{\bar{X}_1\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0,618 \end{Bmatrix} \text{ (ver a Fig. 11.3.6).}$$

2.º modo:

$$\lambda_2 = p_2^2 = 1309$$

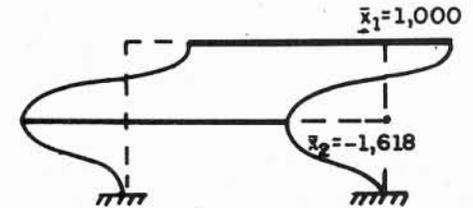
$$p_2 = 36,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f_2 = \frac{p_2}{2\pi} = 5,8 \text{ c/s}$$



1º Modo

Fig. 11.3.6



2º Modo

Fig. 11.3.7

para $\lambda = 1039$ e $\bar{x}_1 = 1,000$, tem-se

$$\bar{x}_2 = -1,618.$$

3.º modo:

$$\{\bar{X}_2\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -1,618 \end{Bmatrix}$$

Verificação da ortogonalidade dos modos naturais;

$$\{\bar{X}_1\}^T [K] \{\bar{X}_2\} = [1,000 \ 0,618] \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 2000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -1,618 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\{X_1\}^T [M] \{X_2\} = [1,000 \ 0,618] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -1,618 \end{Bmatrix} = 0$$

Normalização de $\{\bar{X}_1\}$:

$$\{\bar{X}_1\}^T [M] \{\bar{X}_1\} = 2,764 \quad (\text{valor que se pretende tornar unitário})$$

$$\{\bar{\bar{X}}_1\} = \frac{1}{\sqrt{2,764}} \{\bar{X}_1\} = \begin{Bmatrix} 0,600 \\ 0,372 \end{Bmatrix} \quad (\text{normalizado}).$$

Normalização de $\{\bar{X}_2\}$:

$$\{\bar{X}_2\}^T [M] \{\bar{X}_2\} = 7,336$$

$$\{\bar{\bar{X}}_2\} = \frac{1}{\sqrt{7,336}} \{\bar{X}_2\} = \begin{Bmatrix} 0,372 \\ -0,600 \end{Bmatrix}.$$

Matriz modal:

$$[\bar{\bar{X}}] = \begin{Bmatrix} 0,600 & 0,372 \\ 0,372 & -0,600 \end{Bmatrix}.$$

Observação. (Emprego do Quociente de Rayleigh na Solução).

Os autovalores e modos poderiam ser determinados por aproximação, empregando o quociente de Rayleigh.

As equações obtidas são:

$$1000 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}.$$

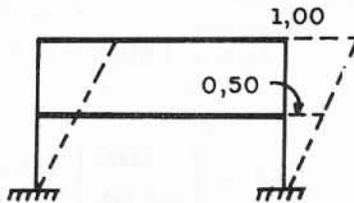


Fig. 11.3.8

1.º modo:

Arbitrando $\{X\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,50 \end{Bmatrix}$, tem-se:

$$\lambda_R = \frac{\{X\}^T [K] \{X\}}{\{X\}^T [M] \{X\}} = \frac{[1,00 \ 0,50] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,50 \end{Bmatrix} \times 1000}{[1,00 \ 0,50] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,50 \end{Bmatrix}} = \frac{500}{2,50} = 200 \approx \lambda_1.$$

A equação $\begin{bmatrix} (500-\lambda) & -500 \\ -500 & (1000-\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ dá $300x_1 - 500x_2 = 0$;

fazendo $x_1 = 1,00$ vem $x_2 = 0,60$.

Para $\{X\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,60 \end{Bmatrix}$, 0

quociente de Rayleigh dá $\lambda_R = \frac{520}{2,72} = \boxed{191}$

e a equação (*) dá

$$\{X_1\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0,618 \end{Bmatrix}.$$

2.º modo:

O 2.º modo costuma ter um "nó". Arbitrando $\{X\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,00 \end{Bmatrix}$ chega-se a $\lambda_R = \frac{5\,000}{4} = 1,250$. Este valor de λ dá, na 1.ª equação, $-500x_1 - 250x_2 = 0$; para $x_1 = 1,00$ vem $x_2 = -2,00$.

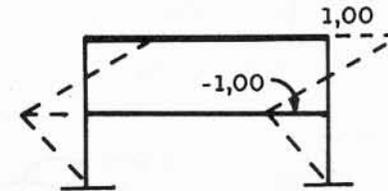


Fig. 11.3.9

O novo vetor $\begin{Bmatrix} 1,00 \\ -2,00 \end{Bmatrix}$ dá

$$\lambda_R = \frac{13\,000}{10} = 1\,300.$$

A equação (*) dá $\{X\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,66 \end{Bmatrix}$.

Este vetor conduz a $\lambda_R = \frac{9890}{5,55} = \boxed{1310}$

$$\{X_2\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -1,618 \end{Bmatrix}.$$

Nota. As próprias figuras sugerem que o 2.º modo (de maior frequência natural) envolve energia de deformação bem maior do que a desenvolvida no 1.º.

O 1.º modo imita, em geral, a elástica produzida por forças estáticas.

2. Reservatório elevado na extremidade de uma coluna, deslocando-se por translação (coordenada 1) ou rotação (coordenada 2) no plano da Fig. 11.3.10 (2 graus de liberdade). São dados:

— coluna: $E = 2,1 \times 10^6 \frac{t}{m^2}$; $J = 0,0305 m^4$, massa desprezível;

— reservatório: peso = 19,6 t; massa = $\frac{19,6}{9,8} = 2$ (t.t.m.);

raio de giração $\rho = 0,5 m$. $I = 2 \times 0,5^2 = 0,5$ (em unidades de momento de inércia no sistema m-tf-s).

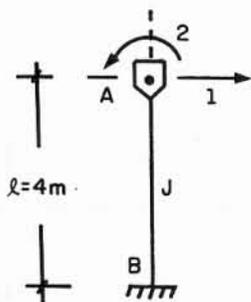


Fig. 11.3.10

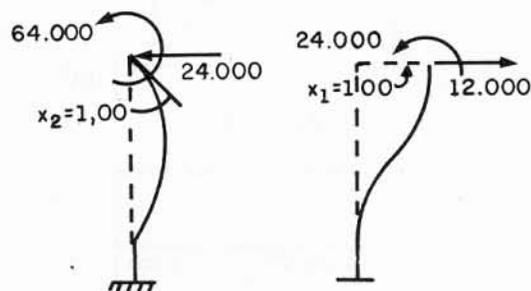


Fig. 11.3.11

Solução.

Matriz das massas:

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez:

$$[K] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 4l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\ 000 & 24\ 000 \\ 24\ 000 & 64\ 000 \end{bmatrix}$$

Matriz $[D]$:

$$[D] = [M]^{-1} [K] = \begin{bmatrix} 6\ 000 & 12\ 000 \\ 48\ 000 & 128\ 000 \end{bmatrix}$$

Cálculo dos valores característicos:

$$\begin{vmatrix} (6\ 000 - \lambda) & 12\ 000 \\ 48\ 000 & (128\ 000 - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 - 134\ 000\lambda + 192\ 000 = 0$$

$$\lambda_1 = p_1^2 = 1\ 450; \quad \lambda_2 = p_2^2 = 132\ 550.$$

1.º modo de vibração

$$\lambda_1 = 1\ 450; \quad f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{38,1}{2\pi} = 6,06 \text{ c/s.}$$

Para $x_1 = 1,00 \rightarrow x_2 = -0,379$;

— normalização: $\{\bar{X}_1\}^T [M] \{\bar{X}_1\} = 1,928$;

$$\text{— modo normalizado } \{\bar{X}_1\} = \frac{1}{\sqrt{1,928}} \begin{Bmatrix} 1\ 000 \\ -0,379 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,719 \\ -0,272 \end{Bmatrix}.$$

2.º modo de vibração

$$\lambda_2 = p_2^2 = 132\ 550; \quad f_2 = \frac{p_2}{2\pi} = 57,90 \text{ c/s.}$$

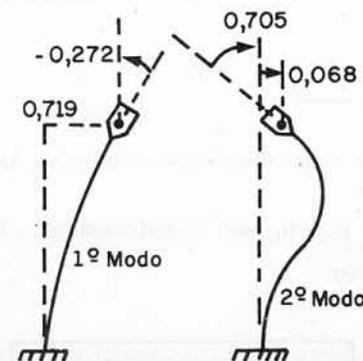


Fig. 11.3.12

para $x_2 = 1000 \rightarrow x_1 = 0,095$;

$$\{X_2\}^T [M] \{\bar{X}_2\} = 2,005;$$

$$\{\bar{X}_2\} = \frac{1}{\sqrt{2,005}} \begin{Bmatrix} 0,095 \\ 1,000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,068 \\ 0,705 \end{Bmatrix}.$$

A Fig. 11.3.12 mostra os dois modos.

11.3.2. Iteração Segundo a Técnica de Stodola-Vianello

Já foi observado que o cálculo de vibrações livres em sistemas discretos, com n graus de liberdade é laborioso, porque envolve:

1. a resolução de uma equação característica do grau n : $\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + \dots + C_n = 0$, para que se determinem as freqüências naturais;
2. para cada freqüência, a resolução de um sistema de $(n - 1)$ equações lineares simultâneas, a fim de que se obtenha o vetor modal $\{\bar{X}_i\}$.

Na prática, interessa conhecer os primeiros modos (de menor freqüência), mais fáceis de serem atingidos pelas condições de excitação externa.

A grande massa de trabalho deste problema, quando n cresce, impõe a conveniência de substituir a solução direta, pelos processos de iteração, que darão não só os autovalores $p_i^2 = \lambda_i$, como também os modos $\{\bar{X}_i\}$.

Acontece que nos processos iterativos (e especificamente no de Stodola-Vianello, que será estudado) a solução converge para o modo de autovalor mais elevado.

Ora, a solução vista acarreta as equações

$$[K] \{X\} = p^2 [M] \{X\} \quad \text{ou} \quad [D] \{X\} = \lambda \{X\} \quad (27)$$

$$\text{onde} \quad [D] = [M]^{-1} [K] \quad (25) \quad \text{e} \quad p^2 = \lambda. \quad (26)$$

A iteração feita com esta formulação conduzirá às freqüências mais elevadas, o que não se deseja.

As equações acima podem ser transformadas. Pré-multiplicando a primeira por $\frac{1}{p^2} [K]^{-1}$ tem-se:

$$[K]^{-1} [M] \{X\} = \frac{1}{p^2} \{X\} \quad (29)$$

ou

$$[E] \{X\} = \mu \{X\} \quad (30)$$

que é também um problema de autovalores,

$$\mu = \frac{1}{p^2} \quad (31)$$

e

$$[E] = [K]^{-1} [M] = [F] [M] \quad (32)$$

(sendo $[F]$ a matriz de flexibilidade).

A iteração com base nas Eqs. (30) atende aos objetivos visados, porque converge para o maior μ , ou menor freqüência.

Técnica de Stodola-Vianello — Iteração para obter a freqüência fundamental e o 1.º modo

1. Arbitre-se, por intuição, um vetor $\{X\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix}$, considerando-o

1.ª aproximação do 1.º modo $\{\bar{X}_1\}$.

2. Pré-multiplique-se por $[E]$:

$[E] \{X\}^{(1)} = \{X''\}$; normalize-se o resultado (dividindo todos os termos pelo primeiro, x_1), para que o 1.º termo seja unitário:

$$\{X^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}.$$

3. Pré-multiplique-se novamente por $[E]$ e normalize-se, obtendo novo vetor:

$$[E] \{X^{(2)}\} = \{X'''\} \rightarrow \text{dividindo por } x_1''': \{X^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}.$$

4. Repita-se o tratamento anterior um número conveniente de vezes, até que o vetor resultante repita (termo por termo) a aproximação anterior:

$$[E] \{X^{(n-1)}\} = \{X^{(n)}\} \rightarrow \text{dividindo por } x_1^n: \{X^{(n)}\} \approx \{X^{(n-1)}\}.$$

Demonstra-se a seguir que, quando isto se verifica, serão

$$\boxed{\begin{aligned} \{X^{(n)}\} &= \{\bar{X}_1\} && (1.^\circ \text{ modo}) \\ x_1^n &= \mu_1 = \frac{1}{p_1^2} && (\text{autovalor correspondente}). \end{aligned}}$$

Demonstração da convergência. O vetor arbitrado na 1.ª aproximação, $\{X^{(1)}\}$, é combinação linear dos modos: $\{X^{(1)}\} = C_1 \{\bar{X}_1\} + C_2 \{\bar{X}_2\} + \dots + C_m \{\bar{X}_m\}$. Na 2.ª aproximação tem-se:

$[E] \{X^{(1)}\} = C_1 [E] \{\bar{X}_1\} + C_2 [E] \{\bar{X}_2\} + \dots + C_m [E] \{\bar{X}_m\}$, ou ainda, sendo pela Eq. (30) $[E] \{\bar{X}_i\} = \mu_i \{\bar{X}_i\}$, vem:

$$[E] \{X^{(1)}\} = C_1 \mu_1 \{\bar{X}_1\} + C_2 \mu_2 \{\bar{X}_2\} + \dots + C_m \mu_m \{\bar{X}_m\}.$$

Na 3.ª aproximação, multiplicando por E :

$$[E] \{X^{(2)}\} = C_1 \mu_1^2 \{\bar{X}_1\} + C_2 \mu_2^2 \{\bar{X}_2\} + \dots + C_m \mu_m^2 \{\bar{X}_m\}$$

e assim até:

$$(*) [E] \{X^{(n-2)}\} = C_1 \mu_1^{n-2} \{\bar{X}_1\} + C_2 \mu_2^{n-2} \{\bar{X}_2\} + C_m \mu_m^{n-2} \{\bar{X}_m\}$$

$$(**) [E] \{X^{(n-1)}\} = C_1 \mu_1^{n-1} \{\bar{X}_1\} + C_2 \mu_2^{n-1} \{\bar{X}_2\} + \dots + C_m \mu_m^{n-1} \{\bar{X}_m\}.$$

Ora, sendo $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots > \mu_m$ (μ_1 é o maior μ) ocorre na expressão (**) forte predominância da primeira parcela, pois

$$\mu_1^{n-1} \gg \mu_2^{n-1} \gg \dots \gg \mu_m^{n-1}.$$

Conclusões

a. Após um número razoável de aproximações, os produtos (*) e (**) darão lugar a vetores múltiplos de $\{\bar{X}_1\}$ (e portanto darão o próprio modo $\{\bar{X}_1\}$).

b. Se os vetores

$$[E] \{X^{(n-2)}\} \approx C_1 \mu_1^{n-2} \{\bar{X}_1\} = \{X^{(n-1)}\}$$

$$[E] \{X^{(n-1)}\} \approx C_1 \mu_1^{n-1} \{\bar{X}_1\} = \{X^{(n)}\},$$

ao serem normalizados, tornam-se iguais, é porque o fator contido no segundo e não no primeiro é

$$\frac{C_1 \mu_1^{n-1}}{C_1 \mu_1^{n-2}} = \mu_1.$$

11.3.3. Exemplo

Considere-se a grelha da Fig. 11.3.13, onde todas as barras são iguais, com $EJ = 16\,000 \text{ tm}^2$, e as massas são $M_1 = M_2 = 2 \text{ u.t.m.}$ (no sistema de unidades m-tf-s) e $M_3 = 1 \text{ u.t.m.}$ Pretende-se determinar a frequência fundamental e o 1.º modo.

Solução. Coordenadas 1, 2 e 3:

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \times 3000.$$

$$[K]^{-1} = \frac{1}{120\,000} \begin{bmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 9 \end{bmatrix}; [E] = [K]^{-1} [M] = \frac{1}{120\,000} \begin{bmatrix} 18 & 4 & -1 \\ 4 & 12 & 2 \\ -1 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

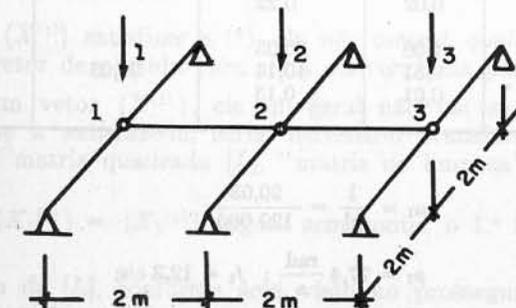


Fig. 11.3.13

N.º da aproximação	{X}	$E\{X\}$ $\left(\frac{1}{120\,000} \times\right)$	μ $\left(\frac{1}{120\,000} \times\right)$	{X}
1	1,00	21,50	21,50	1,00
	1,00	17,00		0,79
	0,50	6,50		0,30
2	1,00	20,86	20,86	1,00
	0,79	14,08		0,68
	0,30	3,86		0,18
3	1,00	20,54	20,54	1,00
	0,68	12,52		0,61
	0,18	2,34		0,11
4	1,00	20,33	20,33	1,00
	0,61	11,54		0,57
	0,11	1,43		0,07
5	1,00	20,21	20,21	1,00
	0,57	10,94		0,54
	0,07	0,91		0,05

N.º da aproximação	{X}	$E\{X\}$ $\left(\frac{1}{120\,000} \times\right)$	μ $\left(\frac{1}{120\,000} \times\right)$	{X}
6	1,00	20,11	20,11	1,00
	0,54	10,58		0,53
	0,05	0,61		0,03
7	1,00	20,09	20,09	1,00
	0,53	10,42		0,52
	0,03	0,39		0,02
8	1,00	20,06	20,06	1,00
	0,52	10,28		0,51
	0,02	0,22		0,01
9	1,00	20,03	20,03	1,00
	0,51	10,14		0,51
	0,01	0,13		0,01

Conclusão:

$$\mu_1 = \frac{1}{p_1^2} = \frac{20,03}{120\,000};$$

$$p_1 = 77,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad f_1 = 12,3 \text{ c/s};$$

$$\{\bar{X}_1\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,51 \\ 0,01 \end{Bmatrix}.$$

11.3.4. Expulsão do 1.º Modo — Convergência para o 2.º

A condição de ortogonalidade permite modificar as equações do movimento, afetando a matriz $[E]$, de sorte que, na iteração, haja convergência para o 2.º modo. Isto só se consegue pela expulsão do 1.º modo.

Considere-se a coluna $\{X^{(1)}\}$, arbitrada como vetor de partida para iniciar a iteração.

Em geral, ela será uma combinação linear dos m modos:

$$\{X^{(1)}\} = C_1 \{\bar{X}_1\} + C_2 \{\bar{X}_2\} + \dots + C_m \{\bar{X}_m\}.$$

Trata-se de forçar esta coluna a ser ortogonal ao 1.º modo.

Transpondo e pós-multiplicando por $[M]\{X_1\}$:

$$\{X^{(1)}\}^T M \{\bar{X}_1\} = C_1 \{\bar{X}_1\}^T [M] \{\bar{X}_1\} + C_2 \{\bar{X}_2\}^T [M] \{\bar{X}_1\} + \dots + C_m \{\bar{X}_m\}^T [M] \{\bar{X}_1\} = 0.$$

As 2.ª, 3.ª, 4.ª ... parcelas deste desenvolvimento são nulas, devido à ortogonalidade dos modos. Logo, resta

$$\boxed{\{X^{(1)}\}^T [M] \{\bar{X}_1\} = C_1 \{\bar{X}_1\}^T [M] \{\bar{X}_1\} = 0.} \quad (*)$$

Ora, $\{\bar{X}_1\}^T [M] \{\bar{X}_1\} > 0$ (é diferente de zero e positiva).

Logo, a verificação da condição (*) implica em que seja

$$\boxed{C_1 = 0.}$$

Se a coluna $\{X^{(1)}\}$ satisfizer a (*), ela não conterà qualquer participação do 1.º modo e será vetor de partida para uma convergência para o 2.º modo.

Arbitrando um vetor $\{X^{(1)}\}$, ele em geral não vai satisfazer à condição. Para que passasse a satisfazê-la, seria necessário transformá-lo, pré-multiplicando-o por uma matriz quadrada $[L]$, "matriz de limpeza", tal que

$$[L]\{X_1^{(1)}\} = \{X_1^{(1)}\} \text{ (agora sem conter o 1.º modo).}$$

A formulação de $[L]$, conforme será visto no prosseguimento do exemplo estudado, terá em vista modificar apenas um dos elementos do vetor arbitrado $\{X^{(1)}\}$ (exprimindo por exemplo o 1.º elemento em função dos demais), de sorte que seja satisfeita a condição de ortogonalidade (*).

Suposta formulada a matriz de limpeza [L], a iteração para o 2.º modo será feita com (ver Eq. 30):

$$[E][L]\{X\} = \mu\{X\} \quad (33)$$

ou ainda

$$[T]\{X\} = \mu\{X\} \quad (34)$$

onde

$$[T] = [E][L]. \quad (35)$$

11.3.5. Continuação do Exemplo

Iteração para o 2.º modo

Formulação da matriz de limpeza [L]:

Condição de ortogonalidade com o 1.º modo:

$$[1,00 \ 0,51 \ 0,01] \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 0$$

$$2x_1 + 1,02x_2 + 0,01x_3 = 0$$

ou ainda $x_1 = -0,510x_2 - 0,005x_3$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,510 & -0,005 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

↑ "matriz de limpeza" [L].

Preparo das equações para iteração:

$$[T] = \frac{1}{120\,000} \begin{bmatrix} 18 & 4 & -1 \\ 4 & 12 & 2 \\ -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0,510 & -0,005 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -5,18 & -1,09 \\ 0 & 9,96 & 1,98 \\ 0 & 5,02 & 9,01 \end{bmatrix} \times \frac{1}{120\,000}$$

N.º da aproximação	{X}	E {X} $\left(\frac{1}{120\,000} \times\right)$	μ $\left(\frac{1}{120\,000} \times\right)$	{X}
1	1,00 -2,00 -2,00	12,54 -23,88 -28,06	12,54	1,00 -1,90 -2,24
2	1,00 -1,90 -2,24	12,28 -23,37 -29,71	12,28	1,00 -1,90 -2,42
3	1,00 -1,90 -2,42	12,48 -23,70 -31,34	12,48	1,00 -1,90 -2,51
4	1,00 -1,90 -2,51	12,56 -23,88 -32,17	12,56	1,00 -1,90 2,56
5	1,00 -1,90 -2,56	12,63 -23,98 -32,60	12,63	1,00 -1,90 -2,58
6	1,00 -1,90 -2,58	12,65 -24,02 -32,78	12,65	1,00 -1,90 -2,59
7	1,00 -1,90 -2,59	12,66 -24,02 -32,87	12,66	1,00 -1,90 -2,59

$$\mu_1 = \frac{12,66}{120\,000} = \frac{1}{p_2^2};$$

$$\{\bar{X}_2\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,90 \\ -2,59 \end{Bmatrix};$$

$$f_2 = 15,60 \text{ c/s.}$$

Cálculo do 3.º modo

As condições de ortogonalidade do 3.º modo em relação ao 1.º e ao 2.º permitem estabelecer duas equações (envolvendo x_1 , x_2 e x_3), as quais darão o 3.º modo.

Condições de ortogonalidade entre o 1.º e o 3.º modos:

$$[1,00 \ 0,51 \ 0,01] \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad \therefore \quad 2x_1 + 1,02x_2 + 0,01x_3 = 0.$$

Condição de ortogonalidade entre o 2.º e 3.º:

$$[1,00 \quad -1,90 \quad -2,59] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots \quad \boxed{2x_1 - 3,80x_2 - 2,59x_3 = 0.}$$

Fazendo $x_1 = 1,00$, as duas equações acima dão

$$x_2 = -2,00 \text{ e } x_3 = 3,70.$$

Portanto, o 3.º modo é $\{\bar{X}_3\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -2,00 \\ 3,70 \end{Bmatrix}$.

A frequência correspondente pode ser obtida através do quociente de Rayleigh. Sendo $[K]\{X\} = p^2[M]\{X\}$

$$\lambda_R = \frac{\{X\}^T [K] \{X\}}{\{X\}^T [M] \{X\}} = \frac{[1,00 \quad -2,00 \quad 3,70] \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -2,00 \\ 3,70 \end{Bmatrix} \times 3000}{[1,00 \quad -2,00 \quad 3,70] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -2,00 \\ 3,70 \end{Bmatrix} \times 3000} =$$

$$= p^2 = 19\,000;$$

$$p = 137,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad f_3 = 22,0 \text{ c/s.}$$

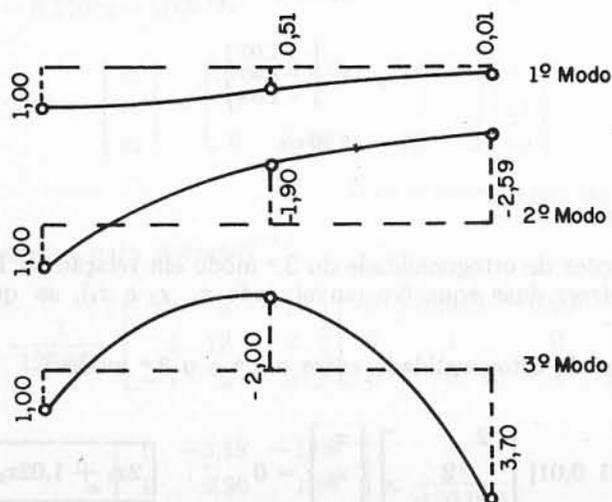


Fig. 11.3.14

A figura mostra os três modos.

11.3.6. Caso em que há Raízes Múltiplas

Foi visto que, quando $\lambda_i \neq \lambda_j$, os vetores modais são ortogonais. Considere-se agora o caso em que a equação característica tem raiz múltipla (2 autovalores iguais).

Seja o caso da estrutura da Fig. 11.3.15, com três massas iguais M , dispostas no meio de barras iguais, de comprimento l e mesmo EJ . Há 3 graus de liberdade (coordenadas 1, 2 e 3).

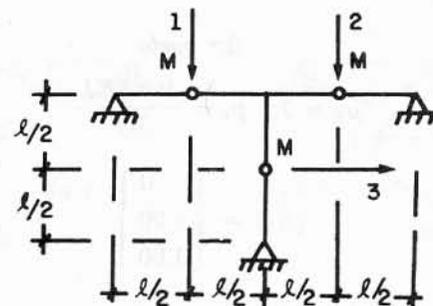


Fig. 11.3.15

Matriz de flexibilidade:

$$[F] = [K]^{-1} = \frac{l^3}{768EJ} \begin{bmatrix} 10 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & -3 \\ 3 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Matriz de massas:

$$[M] = M \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

A solução recai no sistema de equações

$$\frac{Ml^3}{768EJ} \begin{bmatrix} (10 - \mu) & -3 & 3 \\ -3 & (10 - \mu) & -3 \\ 3 & -3 & (10 - \mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ onde } \mu = \frac{1}{p^2} \frac{768EJ}{Ml^3}.$$

Equação característica:

$$\mu^3 - 30\mu^2 + 273\mu - 784 = 0.$$

Autovalores: $\mu_1 = 16, \mu_2 = \mu_3 = 7.$

1.º modo

$$\mu_1 = 16; \quad p_1 = \frac{48EJ}{Ml^3}$$

$$\{\bar{X}_1\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$$

2.º modo

$$\mu_2 = 7; \quad p_2 = \frac{109,7EJ}{Ml^3}$$

$$\{\bar{X}_2\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0 \\ -1,00 \end{Bmatrix}$$

3.º modo

$$\mu_3 = 7; \quad p_3 = \frac{109,7EJ}{Ml^3}$$

$$\{\bar{X}_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$$

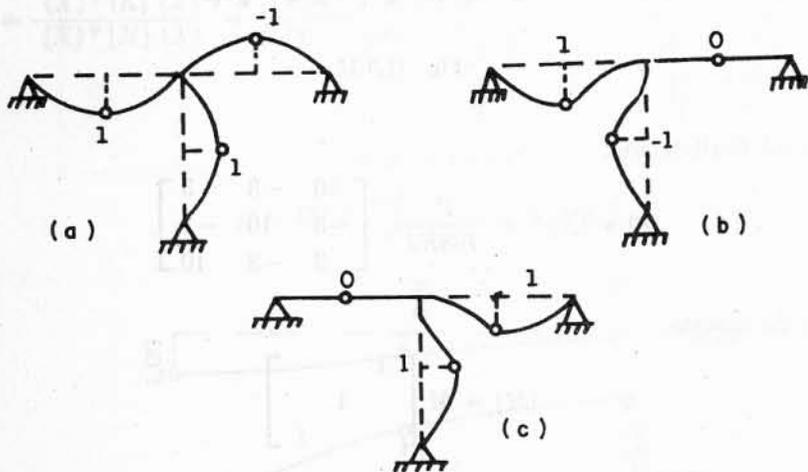


Fig. 11.3.16

Como se pode verificar, o 2.º e o 3.º modos não são ortogonais, pois $\mu_2 = \mu_3.$ A energia de deformação desenvolvida é a mesma (ver as Figs. b e c), daí as frequências serem iguais.

Pode-se dizer que, neste caso, há um número infinito de modos correspondentes a $\mu = 7,$ pois qualquer combinação linear de $\{X_2\}$ e $\{X_3\}$ é também solução das equações.

As Figs. 11.3.17a, b e c mostram algumas dessas combinações, todas correspondendo à mesma frequência relacionada com $\mu = 7.$

Diz-se, em casos como este, que o sistema “degenerou”.

$$\{\bar{X}_2\} + \{\bar{X}_3\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,00 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\bar{X}_2\} - \{\bar{X}_3\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,00 \\ -2,00 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{X}_2\} + 0,5 \{\bar{X}_3\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,50 \\ -0,50 \end{Bmatrix}$$

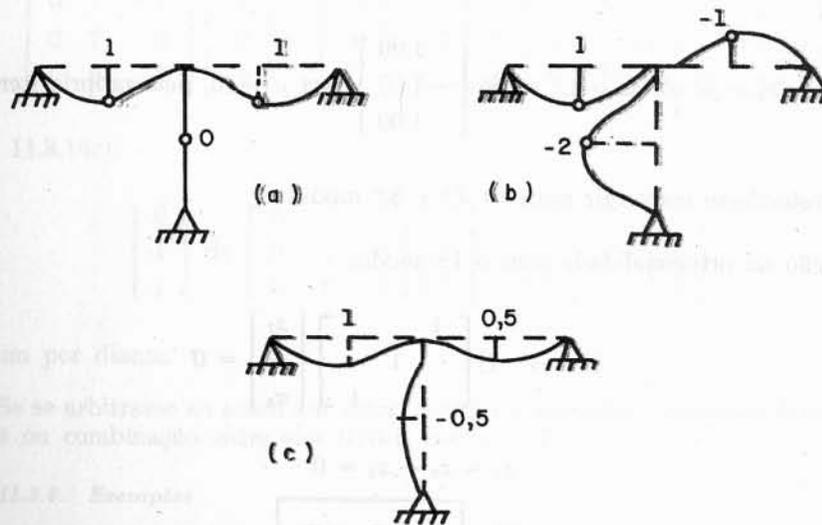


Fig. 11.3.17

Nota. Observe-se que qualquer um destes modos é ortogonal ao primeiro. Embora ainda não tenham sido consideradas as aplicações em problemas de instabilidade elástica, é fácil perceber que a estrutura com o carregamento indicado (Fig. 11.3.18) admitiria “modos” de flambagem da mesma natureza dos que estão ilustrados nas figuras citadas além de outras combinações possíveis.

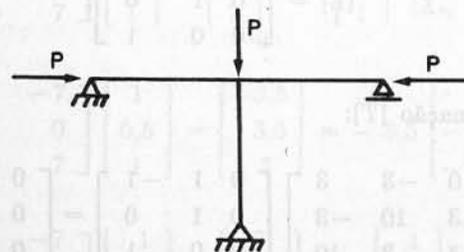


Fig. 11.3.18

11.3.7. Iteração pelo Processo de Stodola-Vianello Nestes Casos

Observe-se como se comportaria a solução por iteração neste caso em que há dois autovalores iguais.

Tem-se

$$[E] = [F][M] = \frac{Ml^3}{768EJ} \begin{bmatrix} 10 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & -3 \\ 3 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

Admita-se já obtido o 1.º modo $\begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$ com $\mu_1 = 16$, pela própria iteração.

Pretende-se convergir para os 2.º e 3.º modos.

Condição de ortogonalidade com o 1.º modo:

$$[1 \ -1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{ou } x_1 = x_2 - x_3.$$

Observe-se que esta condição prevalece nos casos das Figs. 11.3.16 e 11.3.17.

A "matriz de limpeza" é portanto

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Matriz de transformação $[T]$:

$$[T] = \begin{bmatrix} 10 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & -3 \\ 3 & -3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Assim, a iteração será feita com

$$[T] \{\bar{X}\} = \mu \{\bar{X}\}, \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Se fosse arbitrado na iteração um dos vetores das figuras citadas, resultaria ele mesmo:

(Fig. 11.3.16b);

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{Bmatrix} = 7 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ autovalor } \mu = 7 \text{ e vetor}$$

(Fig. 11.3.16c):

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ dá } \begin{bmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{Bmatrix} = 7 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

e assim por diante.

Se se arbitrasse ao acaso um vetor, haveria convergência para um dos modos vistos ou combinação entre eles (todos com $\mu = 7$).

11.3.8. Exemplos

$$1. \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ dá } \begin{bmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{Bmatrix} = 7 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ (vetor da Fig. 13.1.16c).}$$

$$2. \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ dá } \begin{bmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{Bmatrix} = 7 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ (este vetor também é modo, combinação linear } \{\bar{X}_2\} + 2\{\bar{X}_3\} \text{).}$$

$$3. \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ dá } \begin{bmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,5 \\ 3,5 \\ 7 \end{Bmatrix} = -3,5 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix} \text{ e uma 2.ª aproximação.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ -7 \\ -14 \end{Bmatrix} = 7 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix} \text{ (modo da Fig. 11.3.17b).}$$

11.4. Acoplamento Estático e Dinâmico

Diz-se que o movimento vibratório é *desacoplado* quando para o sistema de coordenadas escolhido as equações do movimento são independentes.

Tal é o caso da viga da Fig. 11.4.1, na qual os movimentos segundo as coordenadas 1 e 2 não se interferem. As equações diferenciais são independentes:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + p_2^2 x_2 = 0 \end{cases} \text{ (sistema dinamicamente desacoplado).}$$

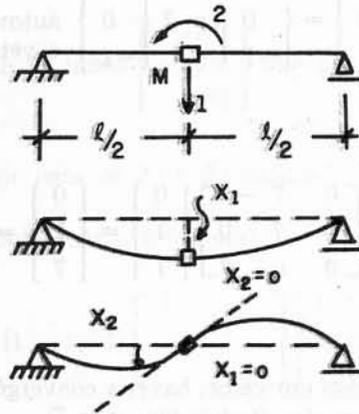


Fig. 11.4.1

Diz-se que há desacoplamento estático quando a *matriz de rigidez* (ou a de flexibilidade, em conseqüência) é uma *matriz diagonal*. No caso da viga em estudo isto ocorre:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}.$$

Se a matriz de massas for diagonalizada e o sistema for *estaticamente desacoplado*, será também *dinamicamente desacoplado*, como sucede no caso em apreço.

Se a matriz de rigidez $[K]$ não for diagonal (acoplamento estático), haverá comumente acoplamento dinâmico. Entretanto, por uma elaborada *transformação de coordenadas*, consegue-se o desacoplamento dinâmico.

11.5. Coordenadas Normais — Desacoplamento

A esta altura, impõe-se uma revisão e generalização do conceito de sistema de coordenadas, a qual será útil.

Convencionalmente (ver Fig. 11.5.1), estabelece-se uma coordenada associada a cada movimento (ou ação mecânica) possível. No caso da figura, um vetor com três elementos define uma configuração:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}.$$

Nada impede, entretanto, que cada coordenada seja indicativa de um grupo de deslocamentos, definindo posições de todas as massas, com valores de referência compondo vetores linearmente independentes.

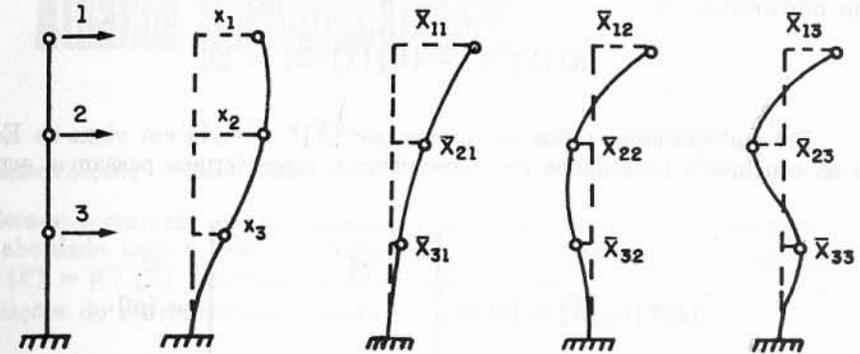


Fig. 11.5.1

Fig. 11.5.2

Qualquer configuração considerada poderá ser posta como combinação linear dessas "coordenadas", cada uma delas multiplicada por um número (Z_1, Z_2, Z_3 , na Fig. 11.5.2) positivo ou negativo. Ora, os modos naturais são linearmente independentes. Logo, podem ser a base de um *sistema de coordenadas normais*. Dada configuração, que no sistema convencional seria definida por x_1, x_2, x_3 , torna-se:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = Z_1 \begin{Bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{31} \end{Bmatrix} + Z_2 \begin{Bmatrix} \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{32} \end{Bmatrix} + Z_3 \begin{Bmatrix} \bar{x}_{13} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{x}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} & \bar{x}_{13} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} & \bar{x}_{23} \\ \bar{x}_{31} & \bar{x}_{32} & \bar{x}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\boxed{\{X\} = [\bar{X}] \{Z\}} \quad (36)$$

onde:

$\{X\}$ = vetor que define a configuração, no sistema de coordenadas inicial (como na Fig. 11.5.1);

$\{Z\}$ = vetor que define a mesma configuração, no novo sistema de coordenadas (coordenadas normais Fig. 11.5.2);

$[\bar{X}]$ = *matriz de transformação*, que no caso é a própria *matriz modal*, com as *colunas normalizadas*, de sorte que $\{\bar{X}_i\}^T [M] \{\bar{X}_i\} = 1$ (de preferência).

Vai-se comprovar, a seguir, que essa mudança de coordenadas e a passagem da variável $\{X\}$ para a variável $\{Z\}$ terá como conseqüência o *desacoplamento dinâmico* do sistema.

Ora, as Eqs. (23) no antigo sistema eram

$$[K] \{X\} + [M] \{\ddot{X}\} = \{0\}.$$

Mas derivando (36), tem-se $\{\ddot{X}\} = [\bar{X}] \{\ddot{Z}\}$, e este resultado, nas equações do movimento, dá

$$[K] [\bar{X}] \{Z\} + [M] [\bar{X}] \{\ddot{Z}\} = \{0\}.$$

Pré-multiplicando todos os termos por $[\bar{X}]^T$ e tendo em vista as Eqs. (10) e as conclusões formuladas em conseqüência, esses termos passam a ser:

$$[\bar{X}]^T [K] [\bar{X}] = [S] = \begin{vmatrix} p_1^2 & & \\ & p_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & p_n^2 \end{vmatrix} = [p^2].$$

Note-se que $[A]$ é aqui a matriz $[K]$, $[B]$ é a matriz $[M]$ e a matriz modal é $[\bar{X}]$. Portanto, nas equações do movimento, tem-se:

$$[p^2] \{Z\} + \{\ddot{Z}\} = \{0\} \quad (37)$$

sistema desacoplado, pois as equações são independentes:

$$\begin{vmatrix} p_1^2 & & & \\ & p_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_m^2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \\ \vdots \\ \ddot{Z}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Grande vantagem tem este tratamento no caso da vibração forçada, como se vai ver.

Note-se que $[\bar{X}]^T [K] [\bar{X}]$ é a *matriz de rigidez* e $[\bar{X}]^T [M] [\bar{X}]$ a *matriz das massas* no novo sistema de coordenadas $\{Z\}$.

Vibrações Forçadas com Excitação Atuando Harmonicamente

12.1. Vibração Forçada — Caso Geral

Considere-se o caso em que há forças externas $\{Q(t)\}$ atuando na estrutura. Não será abordado aqui o caso das forças de amortecimento, proporcionais à velocidade $\{F\} = [C] \{\dot{X}\}$ (amortecimento do tipo viscoso).

As equações do movimento são, então:

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K] \{X\} = \{Q(t)\} \quad (39)$$

onde cada termo do vetor $\{Q(t)\}$ pode ser uma função diferente, o que complica o problema. Em certos casos, as forças $\{Q(t)\}$ são *impulsos* de curta duração, o que vai afetar profundamente a fase inicial do movimento (movimento transitório ou *transiente*).

Aplicando a mudança de coordenadas vista em 11.5, vai-se levar a equação de transformação (36) à Eq. (39), pré-multiplicando tudo por $[\bar{X}]^T$ e obtendo

$$\{\ddot{Z}\} + [p^2] \{Z\} = [\bar{X}]^T \{Q(t)\} \quad (40)$$

onde $[\bar{X}]^T \{Q(t)\}$ são as forças externas expressas no novo sistema de coordenadas normais. Observe-se que as Eqs. (40) são desacopladas, do tipo

$$\ddot{Z}_i + p_i^2 Z_i = \bar{x}_{1i} Q_1(t) + \bar{x}_{2i} Q_2(t) + \dots + \bar{x}_{mi} Q_m(t) \quad (41)$$

e podem ser integradas separadamente, empregando as *integrais de Duhamel*, que consideram não forças $Q_i(t)$, mas uma série de impulsos $Q_i(t)dt$. Obtido cada valor Z_i , e portanto $\{Z\}$, volta-se ao antigo sistema de coordenadas para exprimir como evoluem ao longo do tempo as deflexões $\{X\}$ das massas móveis.

12.2. Caso em que a Ação Exterior Atua Harmonicamente

Sabe-se que os motores, possuindo massas excêntricas, transmitem às estruturas forças perturbadoras do tipo $Q(t) = Q_o \cos \omega t$, onde ω é a velocidade de rotação.

Será considerado aqui o caso em que há uma única força perturbadora ou, havendo mais de uma, as intensidades de todas variam mantendo entre si uma proporcionalidade constante, de sorte que o vetor das ações externas é

$$\{Q(t)\} = \{Q_o\} \cos \omega t. \tag{42}$$

$\{Q_o\} = \begin{Bmatrix} Q_{o1} \\ Q_{o2} \\ \dots \\ Q_{om} \end{Bmatrix}$ são valores extremos fixos. Se ocorrerem forças atuando harmonicamente, com velocidade ou em fases diferentes, será mister proceder por superposição.

As equações do movimento são, portanto:

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K] \{X\} = \{Q_o\} \cos \omega t. \tag{43}$$

Efetuada as transformações já citadas, tem-se:

$$\{\ddot{Z}\} + [p^2] \{Z\} = [\bar{X}]^T \{Q_o\} \cos \omega t. \tag{44}$$

Este sistema de equações diferenciais desacopladas tem (como é normal em tais equações) a solução homogênea e a solução particular como parcelas da solução completa:

$$\{Z\} = \{Z_h\} \cos pt + \{Z_o\} \cos \omega t. \tag{45}$$

solução homogênea \longleftarrow \longleftarrow solução particular
 (movimento vibratório livre) (movimento vibratório persistente)

Antes de entrar com os valores de $\{Z\}$ da Eq. (45) por substituição na Eq. (44), deve-se observar que, nas aplicações práticas, interessa a segunda parcela quase que exclusivamente, pois a *componente do movimento vibratório livre logo desaparece*, dado o inevitável amortecimento que existe em todos os casos.

Substituindo agora a solução proposta na Eq. (44), tem-se:

$$-p^2 \{Z_h\} \cos pt - \omega^2 \{Z_o\} \cos \omega t + [p^2] \{Z_h\} \cos pt + [p^2] \{Z_o\} \cos \omega t = [\bar{X}]^T \{Q_o\} \cos \omega t$$

ou, simplificando,

$$([p^2] - \omega^2 [I]) \{Z_o\} = [\bar{X}]^T \{Q_o\}$$

ou finalmente:

$$\{Z_o\} = ([p^2] - \omega^2 [I])^{-1} [\bar{X}]^T \{Q_o\}. \tag{46}$$

Estas são as máximas elongações no novo sistema de coordenadas. Tendo em vista (36), vem $\{X_o\} = [\bar{X}] \{Z_o\}$.

Logo,

$$\{X_o\} = [\bar{X}] ([p^2] - \omega^2 [I])^{-1} [\bar{X}]^T \{Q_o\} \tag{47}$$

máximas elongações no antigo sistema de coordenadas. Em detalhes, se tem:

$$\{X_o\} = \begin{Bmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \\ \vdots \\ x_{om} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} & \dots & \bar{x}_{1m} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} & & \bar{x}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{m1} & \bar{x}_{m2} & & \bar{x}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1^2 - \omega^2} & & & \\ & \frac{1}{p_2^2 - \omega^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{p_m^2 - \omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \dots & \bar{x}_{m1} \\ \bar{x}_{12} & \bar{x}_{22} & & \bar{x}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{1m} & \bar{x}_{2m} & & \bar{x}_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{o1} \\ Q_{o2} \\ \vdots \\ Q_{om} \end{Bmatrix}$$

As equações do movimento persistente são portanto: (48)

$$\{X\} = \{X_o\} \cos \omega t \tag{49}$$

onde $\{X_o\}$ tem o valor visto em (48).

As forças estáticas equivalentes são

$$\{R\} = [K] \{X\} \quad \text{ou} \quad \boxed{\{R\} = [K] \{X_o\} \cos \omega t.} \quad (50)$$

Valores extremos das forças estáticas R_i , para $\cos \omega t = 1$

$$\boxed{\{R_o\} = [K] \{X_o\}.}$$

Dai se calculam os esforços extremos $\{S_o\}$ (momentos fletores etc.), produzidos pelo efeito dinâmico da vibração forçada senoidal.

12.3. Observações — Ressonância

a) Se a velocidade de rotação ω não se aproximar de nenhum dos valores das frequências circulares naturais p_i , a Eq. (48) mostra que os valores de x_{oi} participarão de todos os modos.

b) Se, entretanto, ω for próximo de um dos valores (p_j , por exemplo), o elemento $\frac{1}{p_j^2 - \omega^2}$ da matriz diagonal da Eq. (48) vai predominar. Haverá forte tendência para que as deflexões $\{X_o\}$ sejam as do modo de ordem j , com grande ampliação.

c) Se $\omega \rightarrow p_j$, $\frac{1}{p_j^2 - \omega^2} \rightarrow \infty$.

Ocorre então a *ressonância*, havendo exageradas deflexões $\{X_o\}$ no modo j as quais, embora limitadas pelo amortecimento, tenderão a romper a estrutura.

12.4. Aplicações

1. A mesma estrutura do Ex. 1, apresentado em 11.3. Nesta aplicação, Fig. 12.4.1,

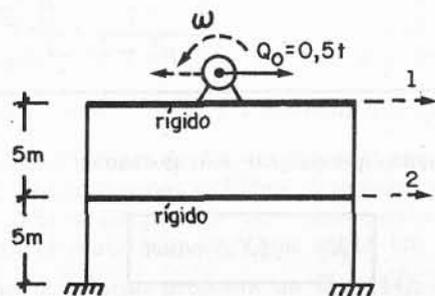


Fig. 12.4.1

$$[K] = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 2000 \end{bmatrix} \left(\frac{t}{m} \right);$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ (unidade de massa);}$$

$$p_1 = 13,8 \text{ rad/s, } \{\bar{X}_1\} = \begin{Bmatrix} 0,600 \\ 0,372 \end{Bmatrix} \text{ (1.º modo)}$$

$$p_2 = 36,2 \quad \{\bar{X}_2\} = \begin{Bmatrix} 0,372 \\ -0,600 \end{Bmatrix} \text{ (2.º modo).}$$

$$\text{Matriz modal } [\bar{X}] = \begin{bmatrix} 0,600 & 0,372 \\ 0,372 & -0,600 \end{bmatrix}.$$

Admita-se que ao nível do 2.º teto (coordenada 1) haja um motor, com velocidade de rotação $n = 123 \text{ rpm}$ ($\omega = 13,0 \text{ rad/s}$), excitando a estrutura com uma força perturbadora $Q_o = 0,5$ toneladas. Desejam-se as máximas elongações $\{X_o\}$ e os esforços dinâmicos máximos.

O carregamento exterior é definido por:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos 13 t, \text{ onde } 0,5 t \text{ é a força perturbadora.}$$

Logo:

$$\{Q_o\} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ toneladas.}$$

Para aplicar a Eq. (47), tem-se

$$[p^2] - \omega^2 [I] = \begin{bmatrix} 191 & 0 \\ 0 & 1309 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 169 & 0 \\ 0 & 169 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 1140 \end{bmatrix}.$$

ou invertendo:

$$([p^2] - \omega^2 [I])^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1140} \end{bmatrix}.$$

(O 1.º modo vai ser excitado predominantemente, pois ω é próximo de p_1 .)

Aplicando (47)

$$\{X_0\} = \begin{bmatrix} 0,600 & 0,372 \\ 0,372 & -0,600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/22 & \\ & 0 \ 1/1140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,600 & 0,372 \\ 0,372 & -0,600 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,00824 \\ 0,00497 \end{Bmatrix} \text{ (metros).}$$

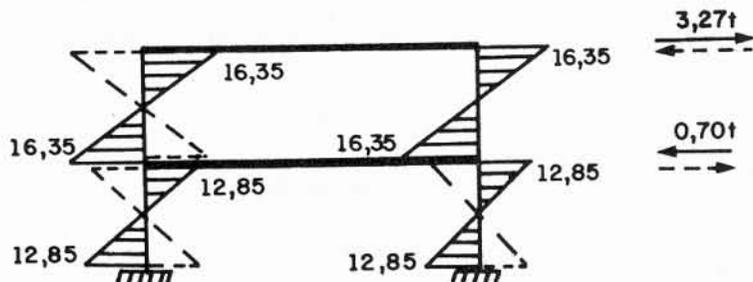
Forças estáticas equivalentes (Valores máximos)

$$\begin{Bmatrix} R_{01} \\ R_{02} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} X_{01} \\ X_{02} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 2000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,00824 \\ 0,00497 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{01} \\ R_{02} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,27 \\ -0,70 \end{Bmatrix} \text{ (toneladas).}$$

Valores em função do tempo:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,27 \\ -0,70 \end{Bmatrix} \cos 13 t.$$



Ações estáticas extremas M e R

Fig. 12.4.2

2. Mesma estrutura do Ex. 2 em 11.3.

Há uma força excêntrica perturbadora de valor máximo 0,4 toneladas. Velocidade de rotação de 36 rad/s.

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos 36 t, \text{ onde } \omega = 36 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

$$\{Q_0\} = \begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad [\bar{X}] = \begin{bmatrix} 0,719 & 0,068 \\ -0,272 & 0,705 \end{bmatrix}.$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 12000 & 24000 \\ 24000 & 64000 \end{bmatrix}; \quad [M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

$$[p^2] - \omega^2 [I] = \begin{bmatrix} 1450 & 0 \\ 0 & 132 \ 550 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1296 & 0 \\ 0 & 1296 \end{bmatrix}.$$

$$\{X_0\} = \begin{bmatrix} 0,719 & 0,068 \\ -0,272 & 0,705 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/154 & 0 \\ 0 & 1/131254 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,719 & -0,272 \\ 0,68 & 0,705 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,00134 \text{ m} \\ -0,000506 \text{ rad} \end{Bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} R_{01} \\ R_{02} \end{Bmatrix} = [K] \{X_0\} = \begin{Bmatrix} 3,94 \text{ t} \\ -0,21 \text{ mt} \end{Bmatrix}.$$

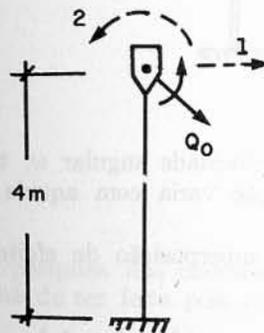


Fig. 12.4.3

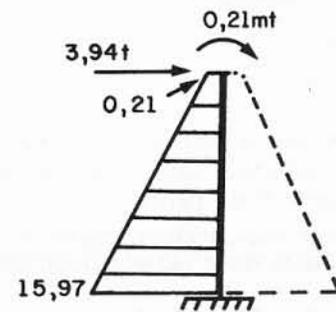


Fig. 12.4.4

A Fig. 12.4.4 mostra os momentos fletores estáticos extremos, suscetíveis como sempre, de inversão de sentido. As forças e momentos no topo também estão indicados.

Se fosse $\omega = 39 \text{ rad/s}$ (quase a frequência circular do 1.º modo, que é $38,1 \text{ rad/s}$), obter-se-ia:

$$[p^2] - \omega^2 [I] = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 131 \ 106 \end{bmatrix} \text{ e } \{X_0\} = \begin{Bmatrix} 101,1 \text{ t} \\ 5,4 \text{ mt} \end{Bmatrix}.$$

A peça romperia por exageradas deformações no 1.º modo, praticamente na ressonância.

Deve ser salientado que nos presentes exemplos estão sendo considerados apenas os efeitos da solução particular da equação diferencial (movimento persistente). Os efeitos iniciais, incluindo a parcela homogênea (vibração livre) podem nos primeiros instantes ultrapassar os valores das elongações obtidas aqui. São, porém, passageiros pois há sempre amortecimento.

12.5. Forças Perturbadoras com Diferenças de Fase — Efeitos Estáticos Máximos

É o caso da estrutura da Fig. 12.5.1a, onde a massa considerada M tem os graus de liberdade assinalados pelas coordenadas 1 e 2.

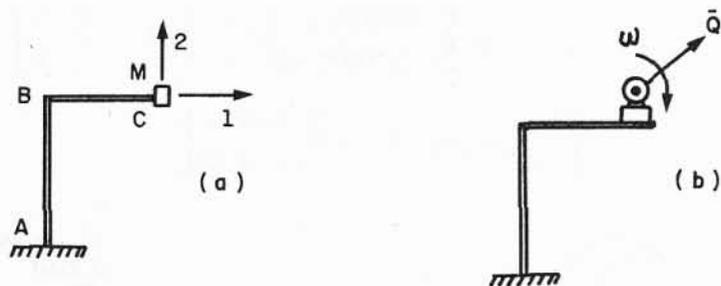


Fig. 12.5.1

Um motor, dotado de excêntrico, gira com velocidade angular ω , transmitindo à estrutura uma força máxima \bar{Q} , cuja direção varia com aquela velocidade, parte *b* da figura.

Neste caso, pode-se examinar o problema por superposição de efeitos, considerando as duas parcelas seguintes:

1. Os efeitos da força perturbadora segundo a coordenada n.º 1.

$$\{Q\} = \left\{ \begin{matrix} \bar{Q} \\ 0 \end{matrix} \right\} \cos \omega t, \text{ todos da forma } E' \cos \omega t.$$

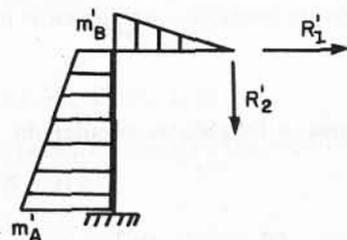


Fig. 12.5.2

(Admita-se que as forças estáticas máximas equivalentes R' e os correspondentes momentos fletores máximos m' sejam os da Fig. 12.5.2.)

2. Os efeitos da força perturbadora segundo a coordenada n.º 2.

$$\{Q\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \bar{Q} \end{matrix} \right\} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

os quais são da forma

$$E'' \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

(As forças máximas R'' e os correspondentes momentos fletores m'' seriam, por exemplo, os da Fig. 12.5.3.)

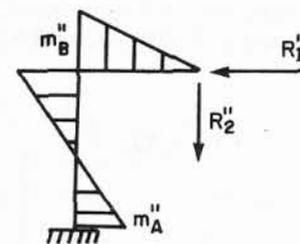


Fig. 12.5.3

A pesquisa das máximas forças estáticas ou dos *máximos esforços em cada seção* há de ser feita pela superposição:

$$E = E' \cos(\omega t) + E'' \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

sendo $\cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -\text{sen} \omega t$

$$E = E' \cos \omega t - E'' \text{sen} \omega t.$$

(51)

Trata-se de maximizar E :

$$\frac{dE}{dt} = -\omega E' \text{sen} \omega t - \omega E'' \cos \omega t = 0 \quad \therefore \quad \text{tg} \omega t = -\frac{E''}{E'}$$

$$E_{m\acute{a}x} = \sqrt{E'^2 + E''^2} \quad (52)$$

Assim, no caso visto, o máximo momento fletor em B, induzido pela vibração forçada seria

$$M_B = \pm \sqrt{(m'_B)^2 + (m''_B)^2} \quad (53)$$

Nota. Não se obteria o mesmo resultado determinando as máximas forças R_1 e R_2 e, a partir delas, calculando os esforços máximos. A construção rigorosa de uma envoltória de momentos fletores exigiria que se aplicasse (53) para grande número de seções, fazendo ainda a composição com os efeitos estáticos da carga permanente.

12.5.1. Exemplo

Pórtico da Fig. 12.5.4, com barras de mesmo EJ , massas concentradas iguais (Fig. b), submetido à força perturbadora $\bar{Q} = 0,5$ tf, atuando com a velocidade angular

$$\omega = 13,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Coordenadas na Fig. b.

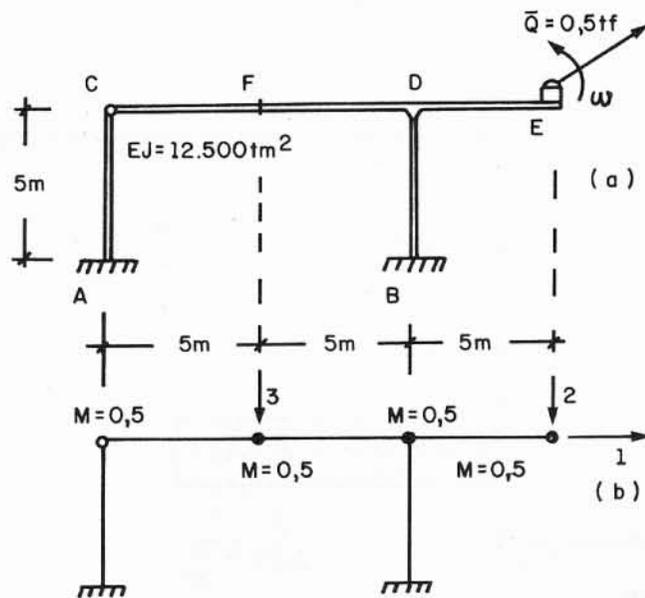


Fig. 12.5.4

Computando apenas as deformações por flexão, a matriz de rigidez é:

$$[K] = 500 \begin{bmatrix} 2,31 & -0,34 & 0,59 \\ -0,34 & 0,43 & 0,30 \\ 0,59 & 0,30 & 2,23 \end{bmatrix} \text{ (toneladas/m).}$$

Matriz das massas:

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Vibração livre — Frequências e modos naturais:

$$\lambda_1 = p_1^2 = 230;$$

$$\lambda_2 = p_2^2 = 690;$$

$$\lambda_3 = p_3^2 = 2315.$$

Matriz modal (já normalizada):

$$[\bar{X}] = \begin{bmatrix} 0,39 & 0,58 & 0,11 \\ 1,14 & -0,81 & 0,20 \\ -0,29 & -0,07 & 1,36 \end{bmatrix}$$

(A Fig. 12.5.5 mostra os modos.)

Vibrações forçadas. Há 2 situações a considerar (defasadas de $\pi/2$):

$$1) \{Q'\} = \begin{Bmatrix} 0,50 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos \omega t; \quad 2) \{Q''\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,50 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

onde $\omega = 13,6$ rad/s.

1.º caso (\bar{Q} na horizontal):

$$\{X_0'\} = \begin{Bmatrix} 0,00297 \text{ m} \\ 0,00165 \text{ m} \\ 0,00075 \text{ m} \end{Bmatrix}$$

$$\{R_0'\} = \begin{Bmatrix} 3,36 \text{ t} \\ -0,03 \text{ t} \\ 2,24 \text{ t} \end{Bmatrix}$$

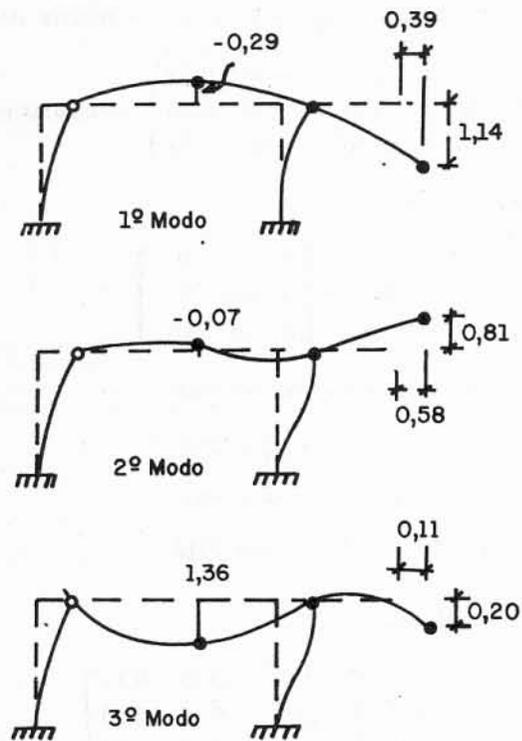


Fig. 12.5.5

Momentos na Fig. 12.5.6a.

2.º caso (\bar{Q} na vertical):

$$\{X_o'\} = \begin{Bmatrix} 0,00160 \text{ m} \\ 0,00438 \text{ m} \\ 0,00062 \text{ m} \end{Bmatrix}$$

$$\{R_o'\} = \begin{Bmatrix} 1,29 \text{ t} \\ 0,77 \text{ t} \\ 1,82 \text{ t} \end{Bmatrix}$$

Momentos produzidos na Fig. 12.5.6b.

$M_{\text{máx}}$ na base A:

$$M_A = \pm \sqrt{4,25^2 + 2,46^2} = \pm 4,91 \text{ mt.}$$

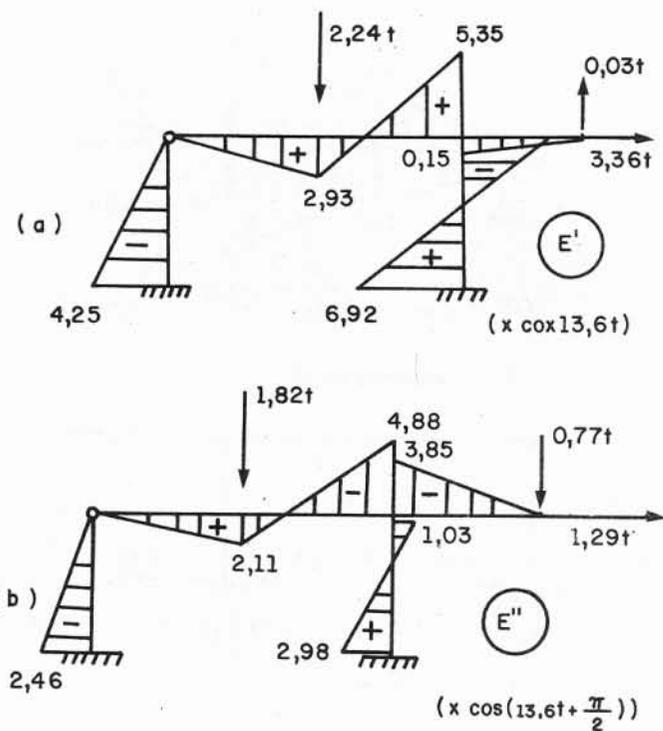


Fig. 12.5.6

12.5.2. Envoltória dos Efeitos Estáticos Decorrentes Exclusivamente da Vibração em Regime Permanente

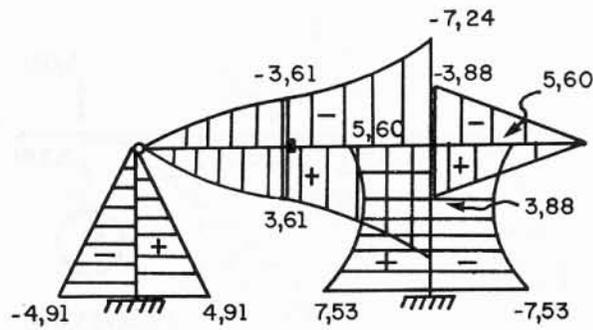
Aplicando, para cada efeito (momento fletor ou reação), a Eq. (52), obtêm-se os resultados da Fig. 12.5.7, devendo ser observado que, em cada seção e para cada esforço ou reação, a situação do máximo ocorre para um valor peculiar de t (tempo), diferente em cada caso.

Os valores da figura compõem uma envoltória de efeitos estáticos da vibração, aos quais devem ser acrescidos os da carga permanente.

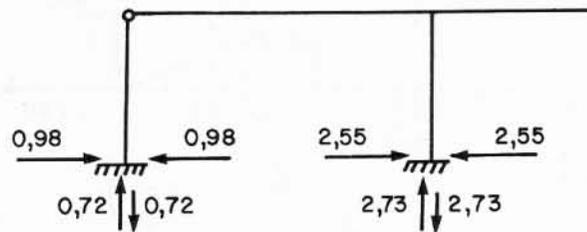
12.6. Deslocamento do Solo ou Referencial, Segundo Lei Harmônica

Será visto agora que, quando o referencial se desloca harmonicamente, o efeito sobre a estrutura equivale ao de forças perturbadoras externas, atuando harmonicamente com a mesma frequência.

Admita-se que o sistema de referência (o solo, no caso) sofre tais movimentos com frequência circular ω .



(a) Momentos em mt



(b) -Reações em t

Fig. 12.5.7

Sejam:

- $\{X\}$ — deslocamentos absolutos das massas, segundo as coordenadas;
- $\{\underline{X}\}$ — deslocamentos das massas *em relação* ao referencial;
- $\{X\}_r = \{X_o\}_r \cos \omega t$ — deslocamentos dos referenciais das diversas coordenadas.

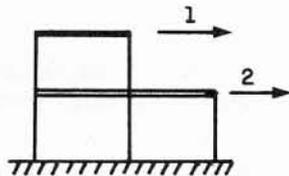


Fig. 12.6.1.

(Note-se que, no caso geral, dependendo do tipo de movimento imposto, os valores de \dot{X}_o , podem ser diferentes para as diversas coordenadas. Por exemplo, se o movimento harmônico for horizontal, o valor de X_o para as coordenadas verticais é nulo.)

Tem-se:

$$\{X\} = \{\underline{X}\} + \{X\}_r \tag{54}$$

Não havendo cargas, as equações do movimento são:

$$[M] \{\ddot{\underline{X}}\} + [K] \{\underline{X}\} = \{0\}. \tag{55}$$

A substituição do valor (54) dá

$$[M] \{\ddot{\underline{X}}\} + [M] \{\ddot{\underline{X}}\}_r + [K] \{\underline{X}\} = \{0\}$$

$$\therefore [M] \{\ddot{\underline{X}}\} + [K] \{\underline{X}\} = -[M] \{\ddot{\underline{X}}\}_r \tag{56}$$

Sendo $\{\ddot{\underline{X}}\}_r = -\omega^2 \{X_o\}_r \cos \omega t$,

vem

$$[M] \{\ddot{\underline{X}}\} + [K] \{\underline{X}\} = (\omega^2 [M] \{X_o\}_r) \cos \omega t. \tag{57}$$

É um caso semelhante ao do Item 12.2, em que

$$\{Q\} = \omega^2 [M] \{X_o\}_r \tag{58}$$

Como se vê, o deslocamento do solo equivale formalmente à ação de força perturbadora. Aplicando o mesmo tratamento visto naquele item, são obtidas as deflexões relativas

$$\{X\} = \{X_o\} \cos \omega t \tag{59}$$

onde $\{X_o\}$ é calculado pela expressão (47) ou (48).

Os esforços serão calculados a partir das forças estáticas equivalentes

$$\{R\} = [K] \{X_o\} \cos \omega t \tag{60}$$

12.6.1. Exemplo

1. (Ver 12.4.) Admita-se que os apoios sofram movimento horizontal harmônico com amplitude de 2 mm, com $\omega = 13$ rad/s.

$$\{X\}_r = \begin{Bmatrix} 0,002 \\ 0,002 \end{Bmatrix} \cos 13t \text{ (Fig. 12.6.2).}$$

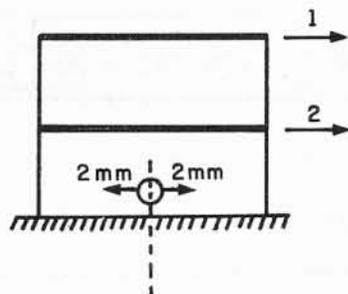


Fig. 12.6.2

Para este caso tem-se:

$$\{X_o\} = [\bar{X}] ([p^2] - \omega^2 [I])^{-1} [\bar{X}]^T [M] \{X_o\}_r \omega^2$$

$$\omega^2 [M] \{X_o\}_r = 13^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,002 \\ 0,002 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,676 \text{ t} \\ 0,676 \text{ t} \end{Bmatrix} = \{Q_o\}.$$

$$\{\bar{X}_o\} = \begin{bmatrix} 0,600 & 0,372 \\ 0,372 & -0,600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/22 & \\ & 1/1140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,600 & 0,372 \\ 0,372 & -0,600 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,676 \\ 0,676 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,01788 \text{ m} \\ 0,01120 \text{ m} \end{Bmatrix}.$$

$$\{R_o\} = [K] \{\bar{X}_o\} = \begin{Bmatrix} 6,68 \text{ toneladas} \\ 4,52 \text{ toneladas} \end{Bmatrix}.$$

Os esforços máximos constam da Fig. 12.6.3.

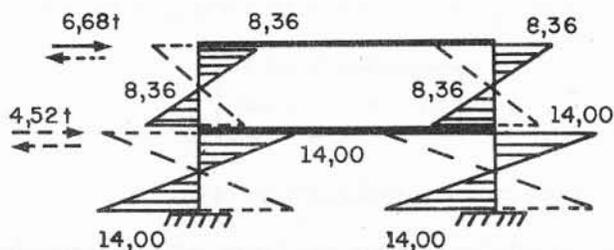


Fig. 12.6.3

Note-se que, se ω se aproximar de p_1 ou p_2 , ocorrerá *ressonância*, com a ruptura da estrutura.

Instabilidade Elástica de Estruturas Discretizadas

13.1. Sistemas de Peças Rígidas com Ligações Elásticas — O Problema de Valores Característicos

13.1.1. Sistemas com um Grau de Liberdade

Considere-se a estrutura da Fig. 13.1.1, com barras rígidas AB e BC e sujeita à ação da mola de rigidez k . Há uma carga axial P . Pretende-se estudar a estabilidade do equilíbrio do sistema quando P cresce.

Considere-se um alongação x (muito pequena) do ponto B , segundo a coordenada indicada. Desprezando a influência dos termos de segunda ordem, pode-se admitir que o vão l não muda. O equilíbrio do sistema, computando a ação da mola, dá, anulando o momento em A :

$$-\frac{Px}{l} \cdot 2l + kx l = 0$$

ou

$$\left(k - \frac{2P}{l}\right) x = 0. \tag{61}$$

Ora, esta condição (61) só permite solução não-trivial $x \neq 0$ (equilíbrio indiferente do sistema para pequenas alongações x), se for $\frac{2P}{l} = k$

ou

$$P = \frac{kl}{2}.$$

Se for

$$P < \frac{kl}{2},$$

afastada a peça da posição inicial, a ação da mola predomina e o sistema volta à posição primitiva (*equilíbrio estável*).

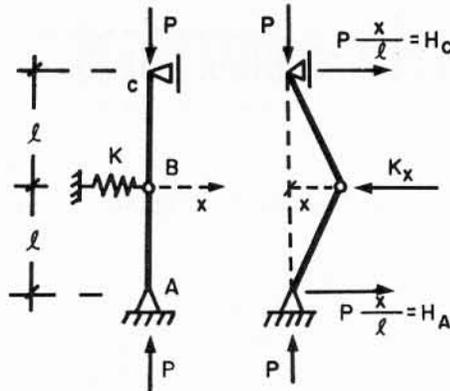


Fig. 13.1.1

Se for

$$P > \frac{kl}{2},$$

o efeito de P sobre o deslocamento transversal de B ultrapassa a ação da mola e, aplicada uma pequena deflexão, ela progredirá, afastando-se da posição inicial de equilíbrio (*equilíbrio instável*).

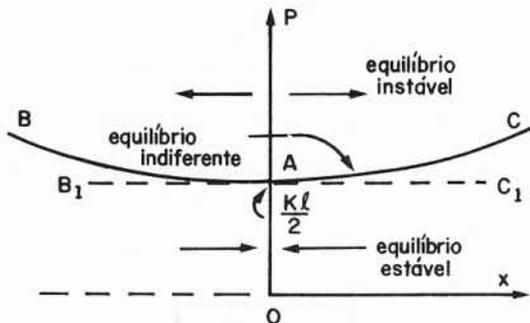


Fig. 13.1.2

A Fig. 13.1.2 procura condensar estas conclusões:

- a zona inferior ($P < \frac{kl}{2}$) é de estabilidade de equilíbrio;
- a zona superior ($P > \frac{kl}{2}$) é de instabilidade;

— a linha BAC (para a qual tende a horizontal B_1AC_1 , de ordenada $P = \frac{kl}{2}$, quando x aumenta e deixa de ser válido o regime das pequenas deformações) assinala a condição de *equilíbrio indiferente*.

Assim, para pequenos afastamentos a partir da posição de equilíbrio, a peça mantém-se na configuração assumida, se for $P = \frac{kl}{2}$

Na Eq. (61), P pode ser encarado como um *valor característico*, que torna possível a existência de solução não-trivial para a equação homogênea.

Seria possível chegar ao mesmo resultado por outro modo, Fig. 13.1.3.

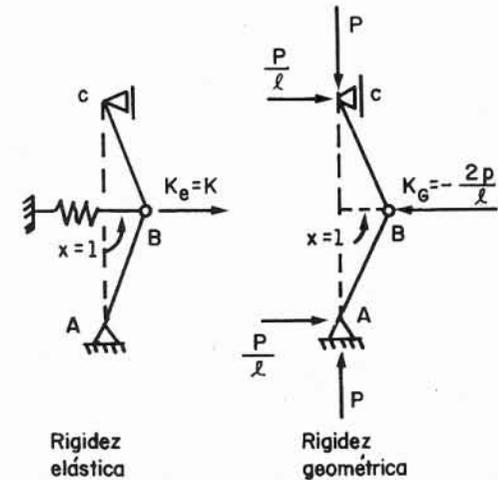


Fig. 13.1.3

Atribuindo à única coordenada x um deslocamento $x = 1$ (e admitindo válidos apenas os efeitos de primeira ordem), tem-se — sem considerar a presença de P — a *rigidez elástica*

$$K_E = k .$$

Excluindo agora as resistências elásticas e apreciando apenas a influência da geometria da estrutura, em presença de P , atribua-se ao ponto um deslocamento $x = 1$ (considerado pequeno, com efeitos de primeira ordem) e determine-se a força em B , necessária para manter o equilíbrio. Surge então a rigidez geométrica

$$K_G = -\frac{2P}{l}$$

A rigidez total é

$$K = K_E + K_G \quad (62)$$

ou

$$K = k - \frac{2P}{l} \text{ no presente caso.}$$

O equilíbrio será indiferente quando a rigidez for nula

$$K_E + K_G = 0$$

ou

$$k - \frac{2P}{l} = 0 \text{ (Eq. 61).}$$

13.1.2. Exemplo de Sistema com 2 Graus de Liberdade

Seja a estrutura da Fig. 13.1.4, com duas barras rígidas articuladas, com molas. Há duas coordenadas (1 e 2, na figura).

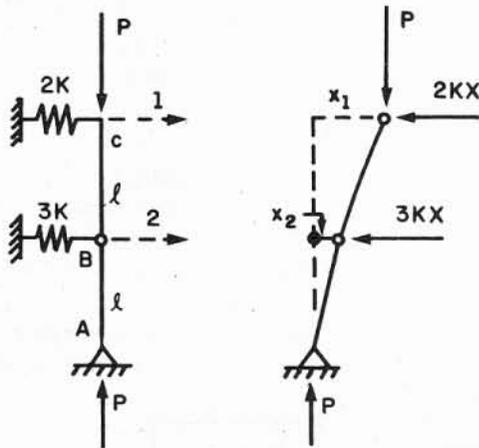


Fig. 13.1.4

Admitindo que ocorra equilíbrio indiferente, tem-se como condição de momento fletor nulo em B :

$$-P(x_1 - x_2) + 2klx_1 = 0.$$

Momento fletor em A nulo:

$$-Px_1 + 4klx_1 + 3klx_2 = 0.$$

Dividindo por l , conservando a primeira equação e formando outra pela combinação linear (segunda — primeira multiplicada por 2), tem-se:

$$\begin{cases} \left(2k - \frac{P}{l}\right)x_1 + \frac{P}{l}x_2 = 0 \\ \frac{P}{l}x_1 + \left(3k - \frac{2P}{l}\right)x_2 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\left(\begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{P}{l} & \frac{P}{l} \\ \frac{P}{l} & -\frac{2P}{l} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (63)$$

Como se vê, é um problema de valores característicos, pois é possível fazer $P = \lambda$, e então

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1/l & -1/l \\ -1/l & 2/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o problema, encontram-se duas soluções:

1.ª solução:

$$\lambda_1 = P_1 = kl \quad \therefore \{X_1\} = \begin{bmatrix} 1,00 \\ -1,00 \end{bmatrix} \text{ (1.º modo de flambagem).}$$

2.ª solução:

$$\lambda_2 = P_2 = 6kl \quad \therefore \{X_2\} = \begin{bmatrix} 1,00 \\ 0,67 \end{bmatrix} \text{ (2.º modo de flambagem).}$$

A Fig. 13.1.5 mostra os dois modos.

Note-se que é válida a condição de ortogonalidade:

$$[1 \ -1] \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,67 \end{Bmatrix} = 0$$

$$[1 \ -1] \begin{bmatrix} 1/l & -1/l \\ -1/l & 2/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,67 \end{Bmatrix} = 0.$$

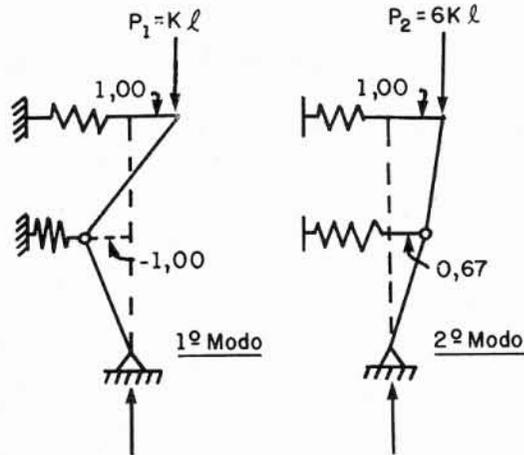


Fig. 13.1.5

Observação. A Eq. (63) mostra que a rigidez tem duas parcelas:

1. matriz de rigidez elástica $[K]_E$ (formulada como já se conhece, sem a presença de P);
2. matriz de rigidez geométrica, que contém as ações a aplicar segundo as coordenadas, face à presença de P , quando se atribui um deslocamento unitário e se quer manter a estrutura nessa posição deslocada (Fig. 13.1.6).

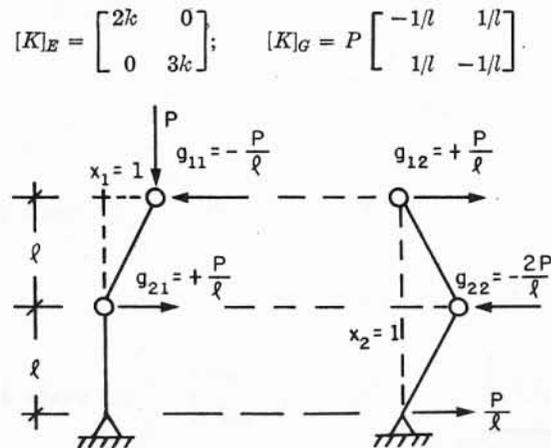


Fig. 13.1.6

Fazendo $P = \lambda$, tem-se:

$$([K]_E + \lambda [K]_G) \{X\} = \{0\} \quad \text{problema de autovalores}$$

As cargas críticas ocorrem quando a matriz de rigidez total se torna singular.

13.1.3. Estabilidade do Equilíbrio

Se, no problema considerado, P crescer a partir de zero, ocorrem as situações mencionadas a seguir.

1. $P < P_1$, isto é, $P < kl$ (menor do que a carga crítica); a estrutura es-

tará em equilíbrio estável, voltando à posição de equilíbrio quando lhe é aplicada qualquer deflexão.

2. $P = P_1 = kl$. O equilíbrio será indiferente se ocorrerem pequenas

deflexões $c_1 \{X_1\}$, segundo o 1.º modo; para quaisquer outras deflexões pequenas, será estável.

3. $P_1 < P < P_2$, isto é, $kl < P < 6kl$. O equilíbrio será instável,

exceto para perturbações $C_2 \{X_2\}$ configurando o 2.º modo, para as quais é estável.

4. $P = P_2 = 6kl$. O equilíbrio será instável, exceto para deflexões peque-

nas, $C_2 \{X_2\}$ segundo o 2.º modo, para as quais é indiferente.

5. $P > P_2$, isto é, $P > 6kl$. Equilíbrio instável para quaisquer perturbações.

13.2. Matriz de Rigidez Geométrica — Sua Determinação Segundo Considerações Energéticas

Os termos g_{ij} da matriz de rigidez geométrica $[K]_G$ são ações segundo as coordenadas, necessárias para assegurar o equilíbrio da estrutura quando esta, carregada com P , é submetida a deflexões unitárias (supostas pequenas face às dimensões da estrutura).

Se a estrutura, partindo da configuração inicial de equilíbrio, adquirir pequenas deflexões $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$, isto é,

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \text{as forças equilibrantes} \quad \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$$

serão

$$[K]_G \{x\} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (64)$$

Admitindo, por serem pequenas as deformações, que o regime é linear, ocorre como expressão do trabalho de tais forças:

$$\tau = \frac{1}{2} (x_1 X_1 + x_2 X_2 + \dots + x_n X_n) = \frac{1}{2} \{x\}^T \{X\}$$

ou tendo em vista (64)

$$\tau = \frac{1}{2} \{x\}^T [K]_G \{x\} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (65)$$

Ora, a força P terá o seu ponto de aplicação deslocando-se em sua direção de Δ , pelo que o trabalho de P é $P\Delta$. Se houver equilíbrio, o potencial das forças aplicadas não há de variar entre a primeira configuração (inicial) e a segunda (com deflexões x_i). Se for escolhida para referência (potencial nulo) a primeira posição, será:

$$V = 0 \quad \dots \quad P \cdot \Delta + \frac{1}{2} \{X\}^T [K]_G \{x\} = 0 \quad (66)$$

ou ainda

$$-P\Delta = \frac{1}{2} \{x\}^T [K]_G \{x\}. \quad (67)$$

A derivada segunda $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ do segundo membro de (67) é o coeficiente g_{ij} da matriz $[K]_G$. De fato:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \{x\}^T [K]_G \{x\} \right) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \{x\}^T \right) \cdot [K]_G \{x\} + \{x\}^T [K]_G \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \{x\} \right) \right] = \\ &= g_{1j} x_1 + g_{2j} x_2 + \dots + g_{ij} x_i + \dots + g_{jj} x_j + \dots + g_{nj} x_n \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{2} \{x\}^T [K]_G \{x\} \right) = g_{ij} \quad (68)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{1}{2} \{x\}^T [K]_G \{x\} \right) = g_{jj}. \quad (69)$$

Esta particularidade pode ser aproveitada, tirando partido de (67) para obter os termos g_{ij} da matriz de rigidez geométrica:

1. exprimir o potencial $V_P = -P\Delta$ em função de deflexões genéricas (pequenas) x_1, x_2, \dots, x_n ;
2. obter os coeficientes de rigidez por dupla derivação parcial:

$$g_{ii} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (-P \Delta) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} V_P \quad (70)$$

$$g_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (-P \cdot \Delta) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V_P \quad (71)$$

13.2.1. Aplicação ao Exemplo Estudado no Item 13.1.2

Observação inicial. No caso da Fig. 13.2.1 para ângulos θ pequenos, tem-se:

$$\Delta = a - a \cos \theta = a(1 - \cos \theta) = 2a \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \text{ ou, por ser } \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2} :$$

$$\Delta = \frac{a\theta^2}{2} \tag{72}$$

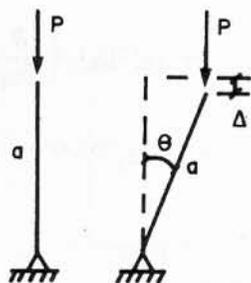


Fig. 13.2.1

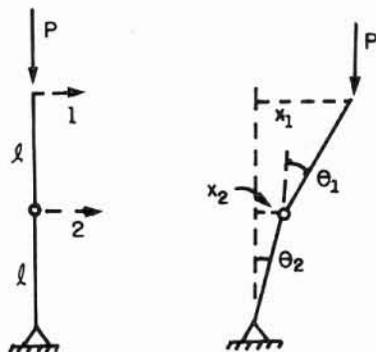


Fig. 13.2.2

No exemplo estudado, é (Fig. 13.2.2):

$$V_P = -P(\Delta_1 + \Delta_2) = -Pl \left(\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} \right)$$

$$\theta_1 \approx \frac{x_1 - x_2}{l}, \theta_2 \approx \frac{x_2}{l} \therefore V_P = -Pl \left(\frac{(x_1 - x_2)^2}{2l^2} + \frac{x_2^2}{2l^2} \right)$$

$$V_P = \frac{P}{2l} (2x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2)$$

Por derivação parcial, vem:

$$\frac{\partial V_P}{\partial x_1} = \frac{P}{l} (x_2 - x_1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_1^2} = g_{11} = -\frac{P}{l} \\ \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_2 \partial x_1} = g_{21} = g_{12} = \frac{P}{l} \end{cases}$$

$$\frac{\partial V_P}{\partial x_2} = \frac{P}{l} (x_1 - 2x_2) \quad \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_2^2} = -\frac{2P}{l} = g_{22}$$

Estes resultados são os mesmos já obtidos.

13.2.1. Outro Exemplo de Sistema com 2 Graus de Liberdade

Pórtico com 2 articulações elásticas de rigidez angular m . Os ângulos superiores do quadro são rígidos. Todas as barras têm comprimento a . Há duas cargas iguais P .

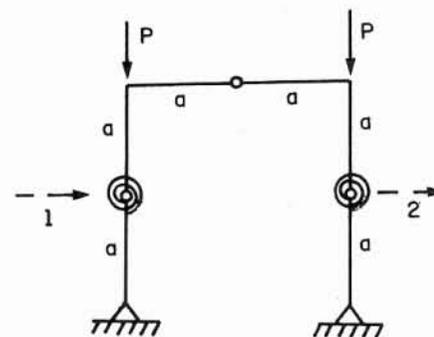


Fig. 13.2.3

Geração da matriz de rigidez elástica (Fig. 13.2.4):

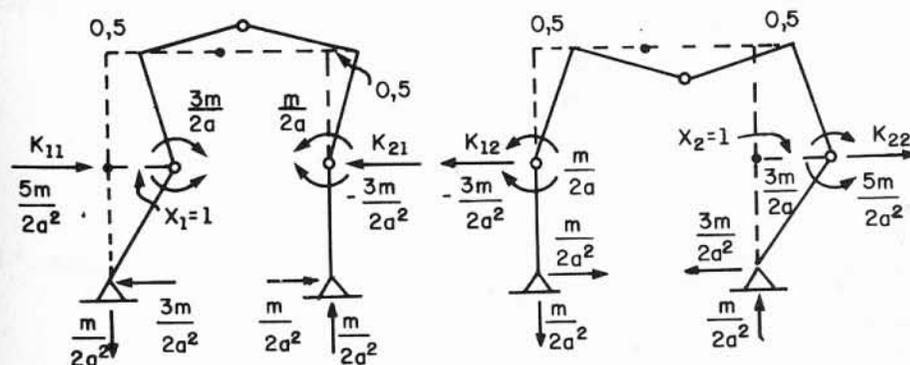


Fig. 13.2.4

$$[K]_E = \frac{m}{2a^2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Obtenção da matriz de rigidez geométrica (considerando o equilíbrio) (Fig. 13.2.5)

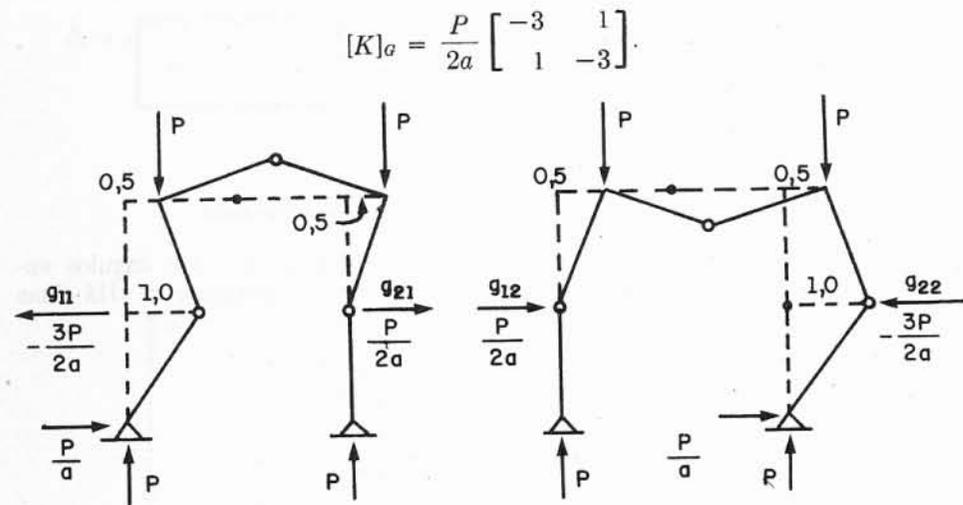


Fig. 13.2.5

Obtenção da matriz de rigidez geométrica pela energia potencial (Fig. 13.2.6):

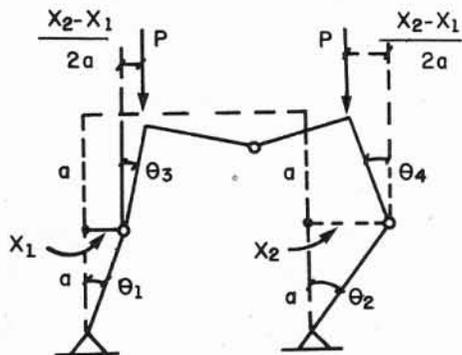


Fig. 13.2.6

$$V_P = - \frac{Pa}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2)$$

$$V_P = - \frac{Pa}{2} \left(\left(\frac{x_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_2 - x_1}{2a} \right)^2 \right) =$$

$$V_P = - \frac{P}{4a} (3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2).$$

$$\frac{\partial V_P}{\partial x_1} = - \frac{P}{4a} (6x_1 - 2x_2) \left\{ \begin{aligned} g_{11} &= \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_1^2} = - \frac{3P}{2a} \\ g_{21} &= \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_2 \partial x_1} = + \frac{P}{2a} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial V_P}{\partial x_2} = - \frac{P}{4a} (6x_2 - 2x_1) \left\{ \begin{aligned} g_{22} &= \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_2^2} = - \frac{3P}{2a} \end{aligned} \right.$$

Todos os elementos obtidos conferem com os da solução acima.

Matriz de rigidez total:

$$[K] = [K]_G + [K]_E.$$

Fazendo $\lambda = P$, tem-se:

$$[K] = \frac{1}{2a^2} \begin{bmatrix} (5m - 3a\lambda) & (-3m + a\lambda) \\ (-3m + a\lambda) & (5m - 3a\lambda) \end{bmatrix}.$$

Equação final:

$$\frac{1}{2a^2} \begin{bmatrix} (5m - 3a\lambda) & (-3m + a\lambda) \\ (-3m + a\lambda) & (5m - 3a\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Equação característica:

$$\begin{vmatrix} (5m - 3a\lambda) & (-3m + a\lambda) \\ (-3m + a\lambda) & (5m - 3a\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

$$(5m - 3a\lambda)^2 - (-3m + a\lambda)^2 = 0.$$

1.ª solução:

$$5m - 3a\lambda = 3m - a\lambda$$

$$\lambda_1 = \frac{m}{a}$$

$$P_1 = \frac{m}{a}$$

2.ª solução:

$$5m - 3a\lambda = -3m + a\lambda$$

$$\lambda_2 = \frac{2m}{a}$$

$$P_2 = \frac{2m}{a}$$

Modos elásticos:

1.º modo: para $\lambda_1 = P_1 = \frac{m}{a}$, tem-se na 1.ª equação:

$$2m x_1 - 2m x_2 = 0.$$

Para

$$x_1 = 1, \text{ vem } x_2 = 1.$$

Logo

$$\{X_1\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix}.$$

Como se vê, o 1.º modo (menor carga P) é anti-simétrico (Fig. 13.2.7).

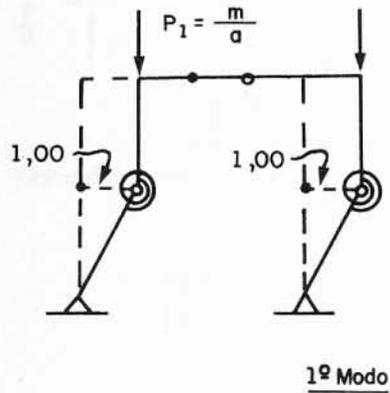


Fig. 13.2.7

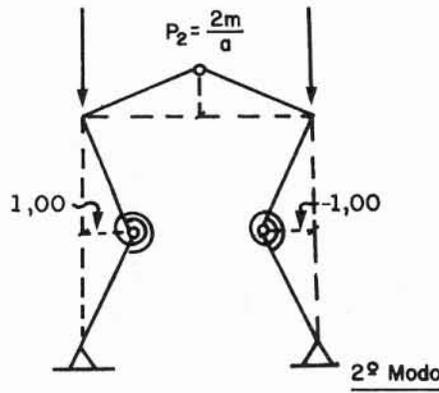


Fig. 13.2.8

2.º modo: para $\lambda_2 = P_2 = \frac{2m}{a}$

$$-m x_1 - m x_2 = 0.$$

Para $x_1 = 1,00$, vem $x_2 = -1,00$.

Logo

$$\{X_2\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,00 \end{Bmatrix}.$$

O 2.º modo (maior carga P) é simétrico (Fig. 13.2.8).

13.2.2. Exemplos de Sistemas com 3 Graus de Liberdade

1. Considere-se a viga da Fig. 13.2.9, onde as articulações B, C, D são elásticas, com rigidez m (momento por unidade angular de rotação relativa).

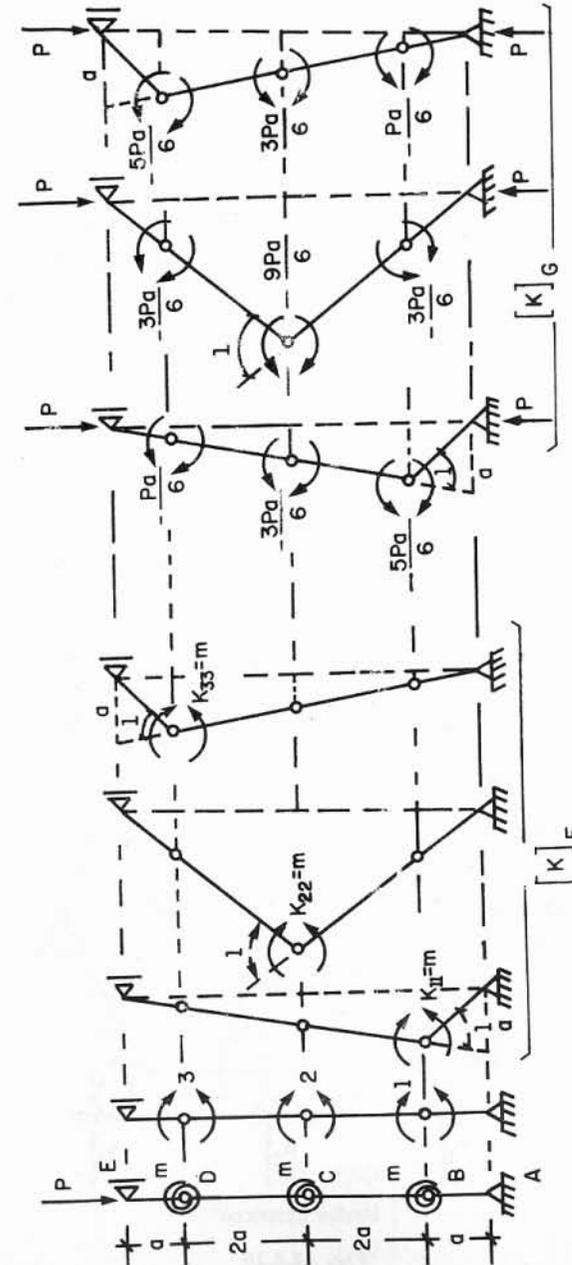


Fig. 13.2.9

A figura mostra a determinação das matrizes de rigidez elástica $[K]_E$ e geométrica $[K]_G$ a partir de sua definição, com base nas condições da Estática.

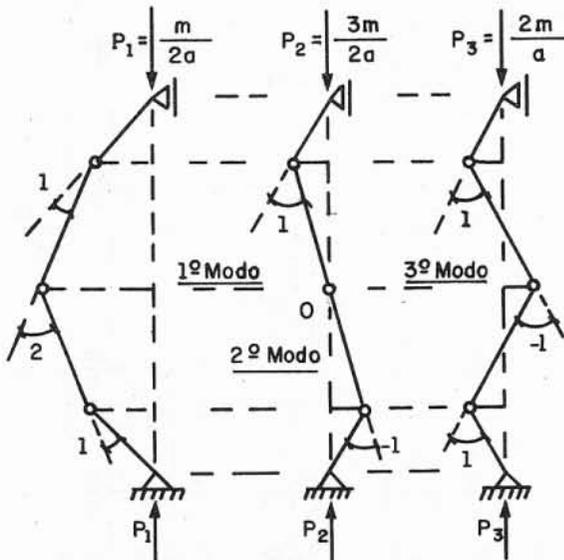
$$[K]_E = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [K]_G = \frac{Pa}{6} \begin{bmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -3 & -9 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

As equações a considerar são:

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{Pa}{6} \begin{bmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -3 & -9 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou, fazendo $\mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{6m}{Pa}$:

$$\begin{bmatrix} (5 - \mu) & 3 & 1 \\ 3 & (9 - \mu) & 3 \\ 1 & 3 & (5 - \mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Modos Elásticos

Fig. 13.2.10

Equação característica:

$$\mu^3 - 19\mu^2 + 96\mu - 144 = 0.$$

Soluções:

$$\mu_1 = 12,$$

$$\mu_2 = 4,$$

$$\mu_3 = 3.$$

Observe-se que o problema poderia ter sido resolvido por iteração.

1.º modo, para $\mu_1 = 12$:

ou

$$P_1 = P_{cr} = \frac{m}{2a}$$

tem-se

$$\{\theta\}_1 = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 2,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$$

2.º modo para $\mu = 4$:

$$P_2 = \frac{3m}{2a}$$

vem

$$\{\theta\}_2 = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0 \\ -1,00 \end{Bmatrix}$$

3.º modo, para $\mu_3 = 3$:

$$P_3 = \frac{2m}{a}$$

vem

$$\{\theta\}_3 = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$$

Observação. Obtenção da matriz geométrica $[K]_G$ por energia (Fig. 13.2.11).

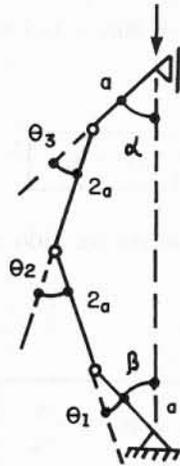


Fig. 13.2.11

Existem as relações:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \alpha + \beta$$

e

$$a\alpha + 2a(\alpha - \theta_3) + 2a(\alpha - \theta_3 - \theta_2) + a(\alpha - \theta_3 - \theta_2 - \theta_1) = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{5\theta_3 + 3\theta_2 + \theta_1}{6} \quad (\text{para pequenas rotações}).$$

Ora, o deslocamento do ponto de aplicação de P , em relação à posição inicial com a peça retilínea, é (Eq. (72)):

$$\Delta = \frac{a}{2} \alpha^2 + \frac{2a}{2} (\alpha - \theta_3)^2 + \frac{2a}{2} (\alpha - \theta_3 - \theta_2)^2 + \frac{a}{2} (\alpha - \theta_3 - \theta_2 - \theta_1)^2.$$

Substituindo α pelo valor obtido acima e considerando que o potencial de P é $V_P = -P\Delta$, tem-se

$$V_P = -\frac{Pa}{72} (30\theta_3^2 + 54\theta_2^2 + 30\theta_1^2 + 36\theta_3\theta_2 + 12\theta_3\theta_1 + 36\theta_2\theta_1).$$

Logo:

$$g_{11} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial \theta_1^2} = -\frac{60}{72} Pa = -\frac{5}{6} Pa; \quad g_{12} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = -\frac{3}{6} Pa = g_{21};$$

$$g_{13} = g_{31} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial \theta_1 \partial \theta_3} = -\frac{1}{6} Pa; \quad g_{22} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial \theta_2^2} = -\frac{9}{6} Pa;$$

$$g_{23} = g_{32} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial \theta_2 \partial \theta_3} = -\frac{3}{6} Pa; \quad g_{33} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial \theta_3^2} = -\frac{5}{6} Pa.$$

Estes valores coincidem com os dos termos da matriz de rigidez geométrica, obtidos pela Estática, na primeira solução.

Solução para a carga crítica pela iteração (Stodola-Vianello). Foram obtidas as equações

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

onde $\mu = \frac{6m}{Pa}$. Trata-se de determinar o maior μ (menor P).

Arbitre-se o modo:

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix}.$$

1.ª aproximação:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9,00 \\ 15,00 \\ 9,00 \end{Bmatrix} = 9,00 \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,67 \\ 1,00 \end{Bmatrix}.$$

2.ª aproximação:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,67 \\ 1,00 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11,00 \\ 21,00 \\ 11,00 \end{Bmatrix} = 11,00 \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,91 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$$

3.ª aproximação:

$$\begin{Bmatrix} 11,73 \\ 23,19 \\ 11,73 \end{Bmatrix} = 11,73 \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,98 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$$

4.ª aproximação:

$$\text{entrando com } \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,98 \\ 1,00 \end{Bmatrix} \text{ obtém-se } \begin{Bmatrix} 11,94 \\ 23,84 \\ 11,94 \end{Bmatrix} = 11,94 \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 2,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$$

5.ª aproximação:

$$\text{entrando com } \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 2,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix} \text{ obtém-se } \begin{Bmatrix} 12,00 \\ 24,00 \\ 12,00 \end{Bmatrix} = 12,00 \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 2,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$$

Logo $\mu_1 = 12,00$ (como havia sido obtido) e $\{\theta\}_1 = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 2,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$

2. (Fig. 13.2.12) As barras são rígidas. A carga P atua em um ponto intermediário.

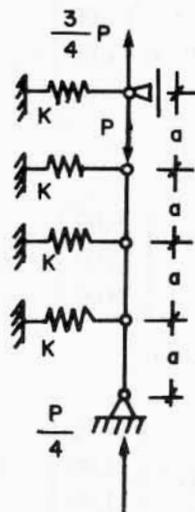


Fig. 13.2.12

Os apoios elásticos laterais têm rigidez k .

Obtenção da matriz de rigidez elástica $[K]_E$:

$$[K]_E = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

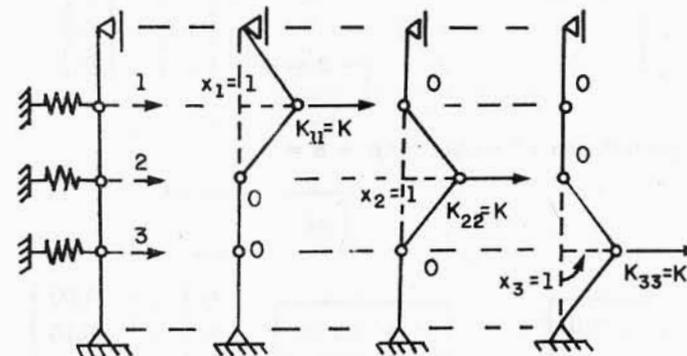


Fig. 13.2.13

Determinação da matriz de rigidez geométrica $[K]_G$

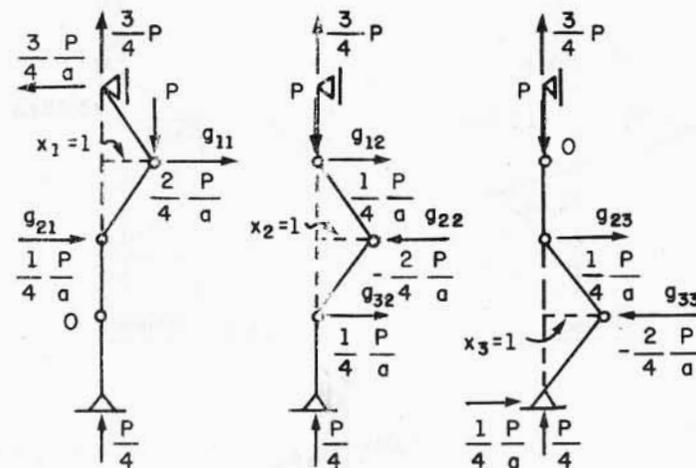


Fig. 13.2.14

$$[K]_G = \frac{P}{4a} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Equações:

$$\left(k \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \frac{P}{4a} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Fazendo $\frac{4ka}{P} = \mu$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} (2 + \mu) & 1 & 0 \\ 1 & (-2 + \mu) & 1 \\ 0 & 1 & (-2 + \mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

a equação característica $\mu^3 - 2\mu^2 - 6\mu + 8 = 0$.

1.º modo

$$\mu_1 = 3,10 \quad \therefore \quad P_1 = 1,29ka \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -5,10 \\ 4,64 \end{Bmatrix}$$

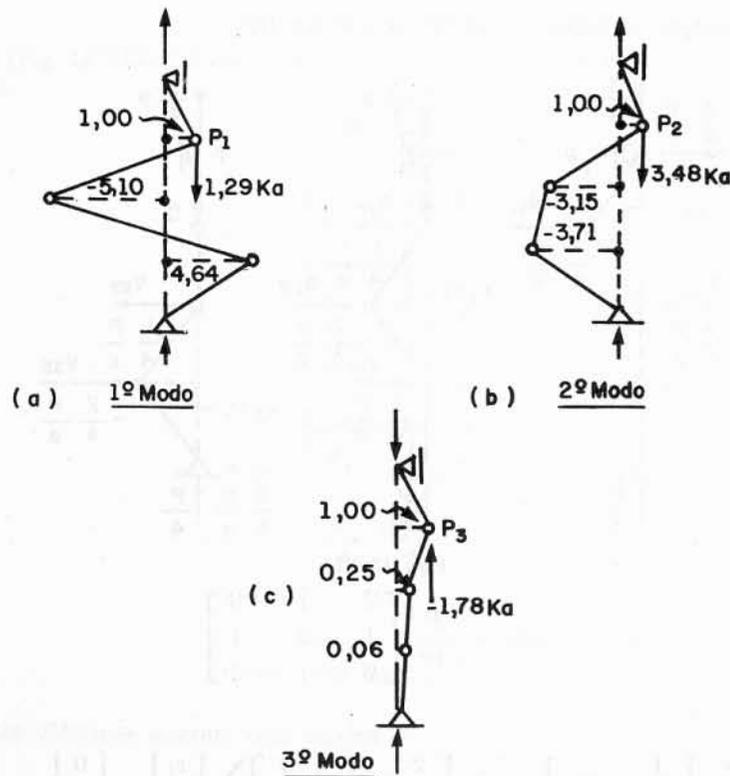


Fig. 13.2.15

2.º modo

$$\mu_2 = 1,15 \quad \therefore \quad P_2 = 3,48ka \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -3,15 \\ -3,71 \end{Bmatrix}$$

3.º modo

$$\mu_3 = -2,25 \quad (\text{autovalor negativo})$$

$$\therefore \quad P_3 = -1,78ka \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 0,25 \\ 0,06 \end{Bmatrix}$$

O auto valor negativo corresponde a equilíbrio indiferente com inversão do sentido de P .

3. Estrutura com 3 graus de liberdade. Barras rígidas e ângulo superior indeformável. Coordenadas 1, 2 e 3 (Fig. 13.2.16).

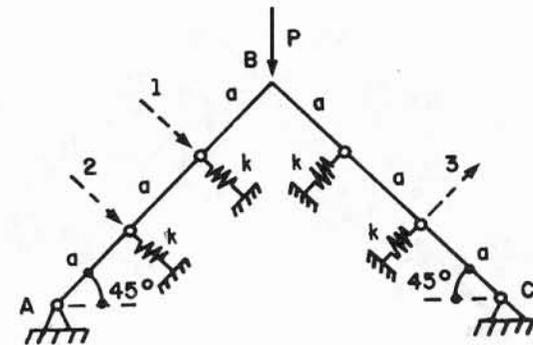


Fig. 13.2.16

a. Carga P vertical

Matriz de rigidez elástica:

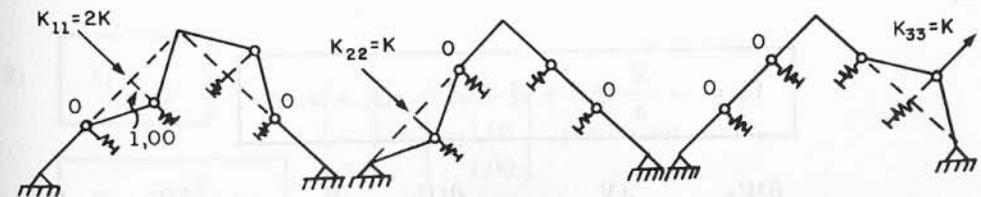


Fig. 13.2.17

$$[K]_E = \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Os esforços normais nas barras são todos iguais a

$$N = -\frac{P}{\sqrt{2}} \quad (\text{compressão}).$$

Dedução da matriz de rigidez geométrica, por via energética:

$$V_P = -\sum N\Delta = -N \sum \frac{a\theta^2}{2} =$$

$$= -\frac{Na}{2} \left(2\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_1-x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_1-x_3}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a}\right)^2 \right)$$

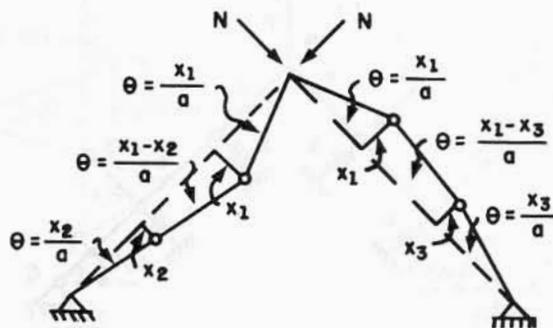


Fig. 13.2.18

$$V_P = -\frac{N}{2a} (4x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2)$$

ou

$$V_P = -\frac{N}{a} (2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3)$$

$$\therefore g_{11} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_1^2} = -\frac{4N}{a}; \quad g_{12} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{N}{a}; \quad g_{13} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{N}{a}$$

$$g_{22} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_2^2} = -\frac{2N}{a}; \quad g_{23} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_2 \partial x_3} = 0; \quad g_{33} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_3^2} = -\frac{2N}{a}$$

A matriz geométrica é

$$[K]_G = \frac{N}{a} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Para $\frac{N}{ka} = \lambda$, tem-se:

$$k \left(\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & \lambda & \lambda \\ \lambda & -2\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & -2\lambda \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$k \begin{bmatrix} (2-4\lambda) & \lambda & \lambda \\ \lambda & (1-2\lambda) & 0 \\ \lambda & 0 & (1-2\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

1) $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,00 \\ -1,00 \end{Bmatrix}$ (anti-simétrico).

$$P_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} ka$$

2) $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$ (simétrico).

$$P_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} ka$$

3) $\lambda_3 = 1$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix} \text{ (anti-simétrico).}$$

$$P_3 = \sqrt{2} ka$$

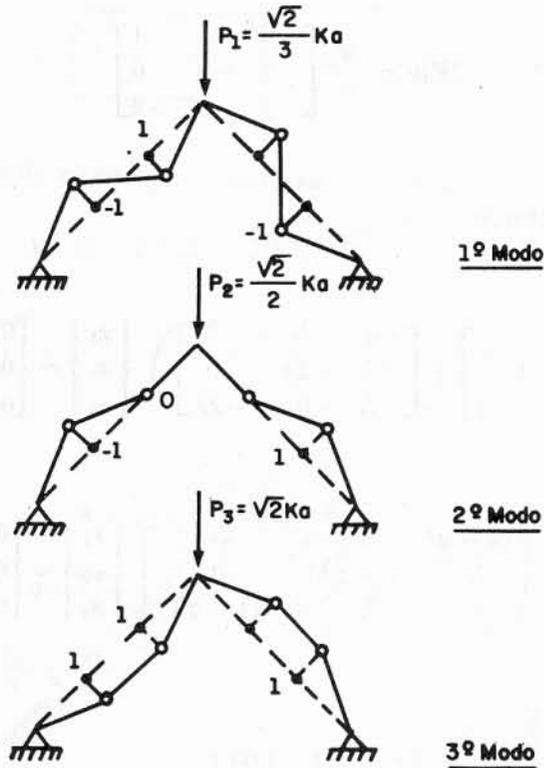


Fig. 13.2.19

b. Carga P horizontal (Fig. 13.2.20)

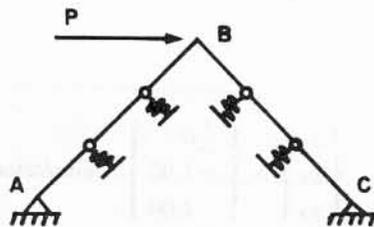


Fig. 13.2.20

A única modificação agora é que

$$N_{AB} = + \frac{P}{\sqrt{2}} \text{ e } N_{BC} = - \frac{P}{\sqrt{2}}$$

A matriz de rigidez elástica não muda.

Nova matriz de rigidez geométrica:

$$V_P = \frac{Na}{2} \left(\left(\frac{x_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{a} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{a} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{a} \right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_3}{a} \right)^2 - \left(\frac{x_3}{a} \right)^2 \right)$$

$$V_P = \frac{N}{a} (x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3)$$

$$\therefore g_{11} = \frac{\partial^2 V_P}{\partial x_1^2} = 0; \quad g_{12} = - \frac{N}{a}; \quad g_{13} = \frac{N}{a};$$

$$g_{22} = \frac{2N}{a}; \quad g_{23} = 0; \quad g_{33} = - \frac{2N}{a}$$

$$\therefore [K]_G = \frac{N}{a} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \therefore \text{para } \frac{N}{ka} = \lambda:$$

$$k \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & \lambda \\ -\lambda & (1+2\lambda) & 0 \\ \lambda & 0 & (1-2\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \therefore \boxed{2 - 10\lambda^2 = 0}$$

A equação característica é do 2º grau (Só há dois modos):

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$P_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} ka = 0,632 ka \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0,236 \\ -4,230 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{1}{5}} \quad (\text{autovalor negativo})$$

$$P_2 = -\sqrt{\frac{2}{5}} ka = -0,632 ka \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -4,230 \\ 0,236 \end{Bmatrix}$$

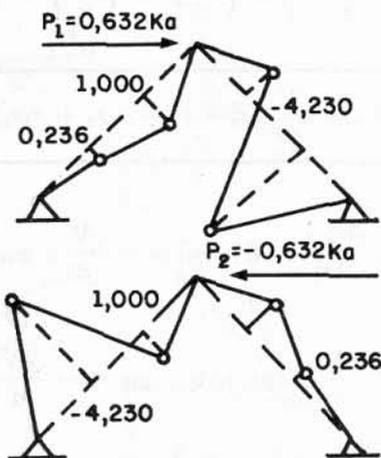


Fig. 13.21

13.3. Instabilidade de Estruturas com Barras Deformáveis — Soluções Empregando a Análise Matricial

A consideração da instabilidade dos quadros, vigas e outras estruturas de barras nas condições reais em que se apresentam — estando os elementos elásticos e deformáveis continuamente dispostos ao longo das peças, e não localizados ou discretizados em alguns pontos, como foi visto até agora — dá lugar a um problema de solução bem mais complexa, porque o comportamento estrutural não é linear, mesmo para pequenas deformações.

A aplicação da análise matricial para determinar pelo menos a carga crítica (menor P) e o 1.º modo pode ser conduzida por dois processos.

1.ª solução. Consideram-se elementos (em grande número) com comportamento suposto linear. Neste caso, há a vantagem de se ter a solução completa e direta do problema dos valores característicos. Em contrapartida, os resultados só convergem para os verdadeiros quando o número de elementos cresce (tornando trabalhosa a solução).

2.ª solução. Consideram-se elementos maiores (as próprias barras da estrutura), equacionando o problema não-linear das deformações em presença do

grande esforço normal e obtendo funções de estabilidade que modificam os termos da matriz de rigidez.

A pesquisa da carga crítica e do primeiro modo só pode, em geral, ser efetivada por etapas, em aproximações sucessivas ligadas à variação do esforço normal.

13.4. 1.ª Solução — Discretização com Elementos Linearizados

13.4.1. Matriz de Rigidez Geométrica de Elementos Sujeitos à Solicitação Normal

Considere-se o elemento da Fig. 13.4.1a, com as coordenadas locais indicadas (correspondendo a deslocamentos extremos s_1, s_2, s_3 e s_4).

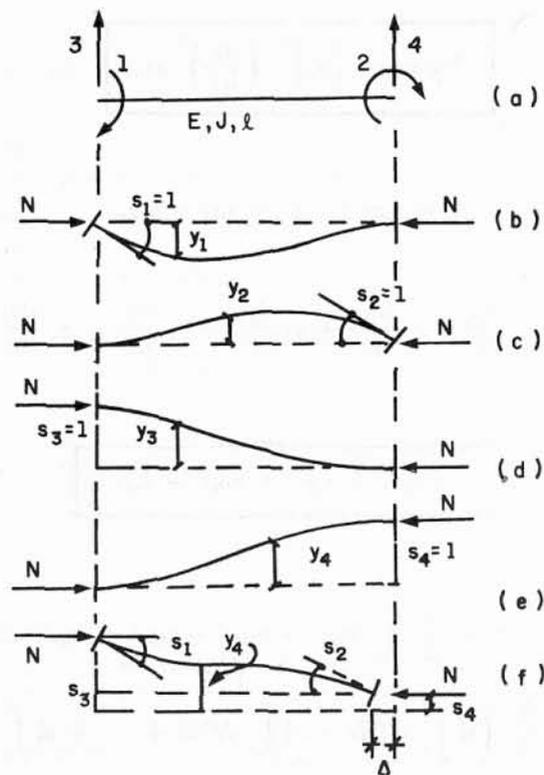


Fig. 13.4.1

As partes b, c, d e e da figura mostram as configurações deformadas y_1, y_2, y_3 e y_4 , obtidas para $s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 1$ e $s_4 = 1$, respectivamente. As ações mecânicas S_1, S_2, S_3 e S_4 associadas a essas configurações (sem a presença da força normal N) seriam os termos da matriz de rigidez elástica.

Deseja-se, agora, considerar, as ações suplementares G_1, G_2, G_3 e G_4 , necessárias para restabelecer o equilíbrio face à influência de N (suposta linear) em presença daquelas deformações.

Foi visto que estes elementos da matriz de rigidez geométrica podem ser obtidos por dupla derivação parcial da energia potencial de N :

$$V_N = -N\Delta = -N \sum a_i \frac{\theta_1^2}{2} \tag{72}$$

No presente caso, sendo x a abscissa de um elemento da barra, y a ordenada e

$\frac{dy}{dx} = \theta$ a inclinação, a expressão se torna

$$V_N = -\frac{N}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \tag{73}$$

Ora,

$$y = y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3 + y_4 s_4,$$

o que dá

$$y' = \frac{dy}{dx} = s_1 \frac{dy_1}{dx} + s_2 \frac{dy_2}{dx} + s_3 \frac{dy_3}{dx} + s_4 \frac{dy_4}{dx}$$

ou

$$y' = s_1 y_1' + s_2 y_2' + s_3 y_3' + s_4 y_4' \tag{74}$$

donde

$$V_N = -\frac{N}{2} \int_0^l (s_1 y_1' + s_2 y_2' + s_3 y_3' + s_4 y_4')^2 dx,$$

$$V_N = -\frac{N}{2} \left(s_1^2 \int_0^l y_1'^2 dx + s_2^2 \int_0^l y_2'^2 dx + \dots + s_4^2 \int_0^l y_4'^2 dx + \right.$$

$$\left. + 2s_1 s_2 \int_0^l y_1' y_2' dx + 2s_1 s_3 \int_0^l y_1' y_3' dx + \dots + 2s_3 s_4 \int_0^l y_3' y_4' dx \right).$$

Se se fizer:

$$\int_0^l y_i'^2 dx = C_{ii} \tag{75} \quad \text{e} \quad \int_0^l y_i' y_j' dx = C_{ij} \tag{76}$$

vem:

$$V_N = -\frac{1}{2} N (s_1^2 C_{11} + s_2^2 C_{22} + s_3^2 C_{33} + s_4^2 C_{44} + 2s_1 s_2 C_{12} + \tag{77}$$

$$+ 2s_1 s_3 C_{13} + 2s_1 s_4 C_{14} + 2s_2 s_3 C_{23} + 2s_2 s_4 C_{24} + 2s_3 s_4 C_{34}).$$

Derivando parcialmente, duas vezes, tem-se:

$$\frac{\partial^2 V_N}{\partial s_1^2} = -NC_{11} = g_{11}; \dots \frac{\partial^2 V_N}{\partial s_1 \partial s_2} = -NC_{12} = g_{12} \dots$$

Logo, os termos da matriz de rigidez geométrica da barra, em coordenadas locais, são:

$$g_{ii} = -NC_{ii}, \quad \text{onde } C_{ii} \text{ é o valor da integral (75);}$$

$$g_{ij} = -NC_{ij}, \quad \text{onde a expressão de } C_{ij} \text{ é (76).}$$

A matriz de rigidez geométrica completa será:

$$[k]_G = N \begin{bmatrix} -C_{11} & -C_{12} & -C_{13} & -C_{14} \\ -C_{21} & -C_{22} & -C_{23} & -C_{24} \\ -C_{31} & -C_{32} & -C_{33} & -C_{34} \\ -C_{41} & -C_{42} & -C_{43} & -C_{44} \end{bmatrix}$$

Para obter os C_{ij} é necessário exprimir $y_i = f_i(x)$ e $y_j = f_j(x)$ (correspondentes respectivamente às deformações de extremidade impostas $s_i = 1$ e $s_j = 1$) e efetuar a integração (ver o livro de Rubinstein, *Structural Systems — Statics, Dynamic and Stability*, e o de Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, citados na Bibliografia).

É ponto de vista pessoal do autor deste trabalho que um tratamento muito mais cómodo para chegar aos C_{ij} consiste em obter os diagramas de y' (utilizando as analogias de Mohr) e depois calcular as integrais $\int y_i' y_j' dx$, utilizando as fórmulas de $\int M_i M_j dx$, de uso corrente na Teoria das Estruturas para calcular deformações, também conhecidas como integrais de Mohr.

Assim vai-se proceder.

1. Diagrama de y_1' . Impondo a rotação $s_1 = 1$, surgem momentos flectores na viga dada. Passando à viga conjugada (cujas reacção esquerda é unitária, porque é $s_1 = 1$), o diagrama do esforço cortante é o diagrama y_1' (Fig. 13.4.2).

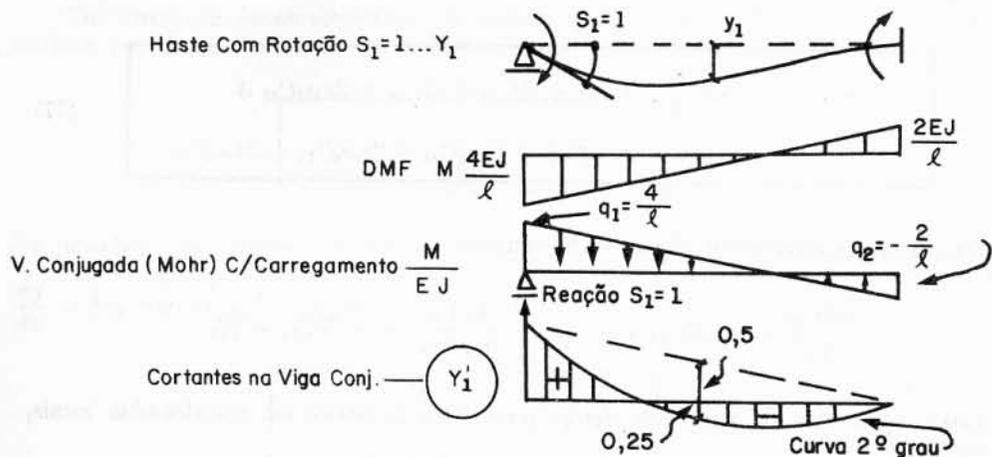


Fig. 13.4.2

2. Diagrama de y_2' . Procedendo de forma semelhante, os resultados da Fig. 13.4.3 são obtidos.

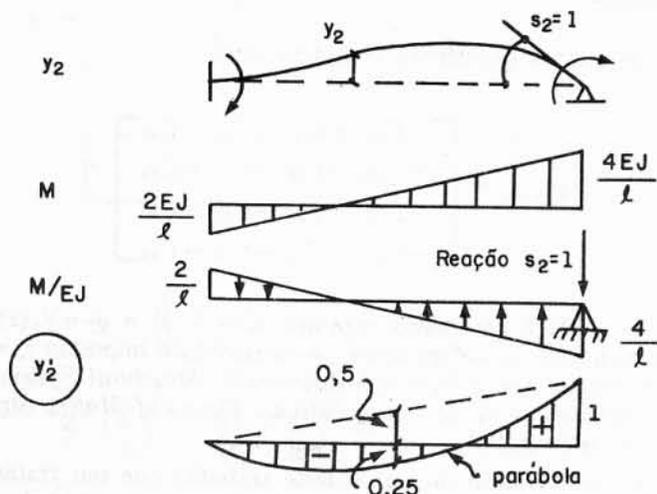


Fig. 13.4.3

3. Diagrama de y_3' . Agora, a configuração deformada se deve a um deslocamento transversal imposto $s_3 = 1$ (Fig. 13.4.4).

4. Diagrama de y_4' . Idem, para um "recalque" imposto $s_4 = 1$ (Fig. 13.4.5).

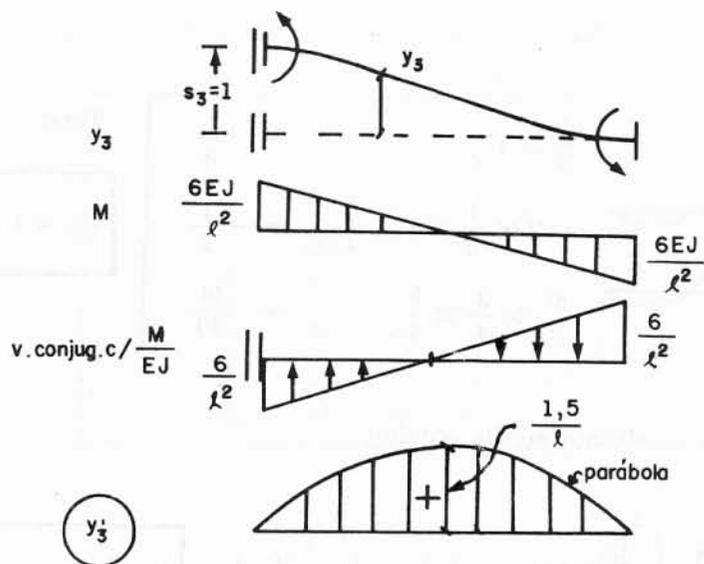


Fig. 13.4.4

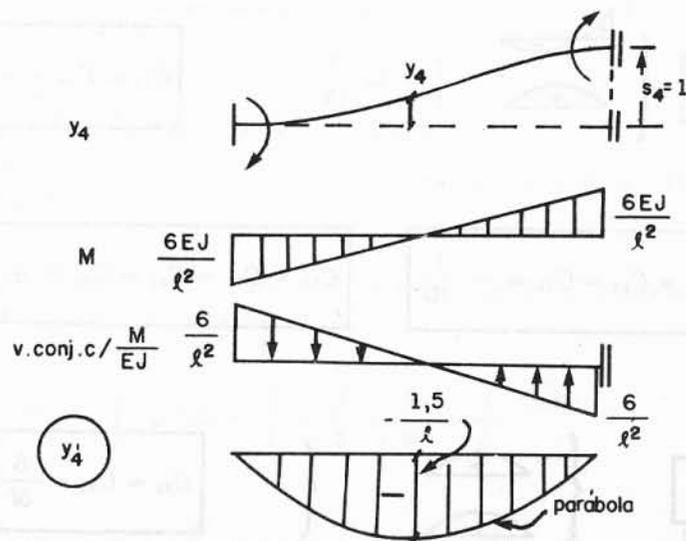


Fig. 13.4.5

Nota. Como se pode verificar, os diagramas de y_i' são simples e permitem o cálculo rápido das integrais, quando combinados dois a dois.

5. Cálculo dos C_{ij}

$$\begin{array}{l}
 C_{11} \\
 = \\
 C_{22}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 1 \\
 1 \\
 1
 \end{array} \right.
 \left\{ \begin{array}{l}
 y_1 \\
 y_1' \\
 y_1''
 \end{array} \right.
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{l}{3} \times 1^2 \\
 -2 \times \frac{l}{3} \times 1 \times \frac{3}{4} \\
 \frac{8l}{15} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}
 \end{array} \right.
 =
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{l}{3} \\
 -\frac{l}{2} \\
 \frac{9l}{30}
 \end{array} \right.
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Total:} \\
 \\
 \\
 \end{array} \right\}
 \boxed{C_{11} = C_{22} = \frac{2l}{15}}$$

e, de modo semelhante, seriam obtidos:

$$\boxed{C_{12} = C_{21}} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y_1 \\ y_1' \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{6} - \frac{l}{2} + \frac{9l}{30} \end{array} \right. \boxed{C_{12} = C_{21} = -\frac{l}{30}}$$

$$\boxed{C_{13} = C_{31}} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y_1 \\ y_1'' \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{9}{15} \end{array} \right. \boxed{C_{13} = C_{31} = -\frac{1}{10}}$$

$$\boxed{C_{23} = C_{32} = C_{13} = C_{31} = -\frac{1}{10}} \quad \boxed{C_{14} = C_{41} = C_{24} = C_{42} = +\frac{1}{10}}$$

$$\boxed{C_{33} = C_{44}} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y_1'' \\ y_1'' \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{5l} \end{array} \right. \boxed{C_{33} = C_{44} = \frac{6}{5l}}$$

$$\boxed{C_{34} = -C_{43}} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y_1'' \\ y_1'' \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -\frac{6}{5l} \end{array} \right. \boxed{C_{34} = C_{43} = -\frac{6}{5l}}$$

6. Matriz de rigidez geométrica do elemento. Se N for de compressão

$$[K]_G = N \begin{bmatrix} -\frac{2l}{15} & \frac{l}{30} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{l}{30} & -\frac{2l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{6}{5l} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{6}{5l} \end{bmatrix} \quad (78)$$

(para N de compressão).

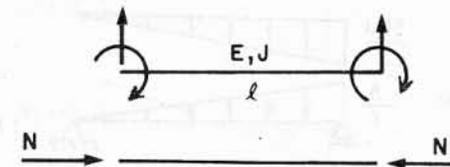


Fig. 13.4.6

Se N for de tração, os sinais devem ser trocados.

Caso de um elemento (haste) com uma extremidade articulada. Há duas coordenadas (Fig. 13.4.7a).

Procedendo do mesmo modo para com os diagramas de y_1' (associado a $s_1 = 1$) e y_2' (associado a $s_2 = 1$), tem-se:

$$C_{11} = \int_0^l y_1'^2 dx = \frac{l}{4} - \frac{l}{8} + \frac{3l}{40} = \frac{l}{5}$$

$$C_{12} = C_{21} = \int_0^l y_1' y_2' dx = 0 + \frac{1}{16} - \frac{3}{16} - \frac{3}{40} = -\frac{1}{5}$$

$$C_{22} = \int_0^l y_2'^2 dx = \frac{3}{4l} + \frac{3}{8l} - \frac{3}{40l} = \frac{6}{5l}$$

Logo

$$[K]_G = N \begin{bmatrix} -\frac{l}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{6}{5l} \end{bmatrix} \quad (79)$$

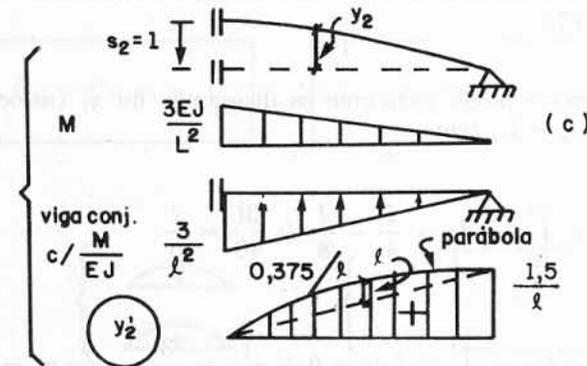
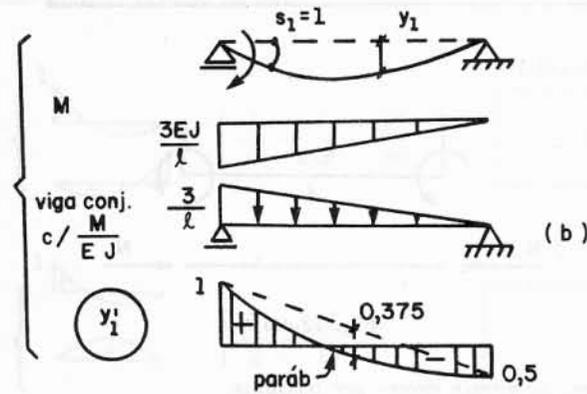
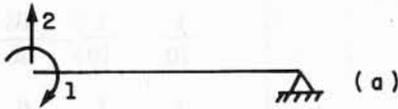


Fig. 13.4.7

Os resultados da barra engastada conferem com os obtidos nos livros citados de Rubinstein e Przemieniecki, que não destacam o caso da barra com extremidade articulada.

Observação. Extensão desta solução ao caso dos sistemas rígidos estudados em 13.2. Nada impede que se aplique esta solução ao deduzir a matriz de rigidez geométrica para os sistemas rígidos com ligações elásticas. Os diagramas de y'_i serão constantes, pois os y_i são lineares.

$$y'_i = \frac{dy_i}{dx} = \theta_i \quad (\text{constante})$$

e portanto:

$$C_{ii} = \int_0^l \theta_i \theta_i dx = \theta_i \theta_i l$$

e da mesma forma

$$C_{ij} = \int_0^l \theta_i \theta_j dx = \theta_i \theta_j l.$$

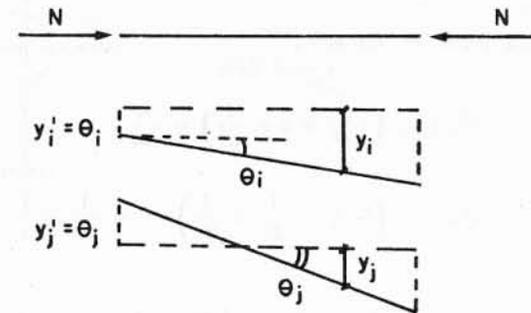


Fig. 13.4.8

Logo:

$$g_{ii} = -N\theta_i\theta_i l \quad (80)$$

$$g_{ij} = -N\theta_i\theta_j l. \quad (81)$$

Assim, no exemplo já estudado em 13.2.1, com 2 graus de liberdade, as configurações deformadas dão:

$$C_{11} = \left(\frac{1}{l}\right)^2 \cdot l = \frac{1}{l}; \quad C_{12} = \left(\frac{1}{l}\right) \left(-\frac{1}{l}\right) l = -\frac{1}{l}.$$

$$C_{22} = \left(\frac{1}{l}\right)^2 \cdot l = \left(-\frac{1}{l}\right)^2 \cdot l = \frac{2}{l}$$

$$\therefore g_{11} = -\frac{P}{l}; \quad g_{12} = g_{21} = \frac{P}{l}; \quad g_{22} = -\frac{2P}{l} \quad (\text{valores já obtidos}).$$

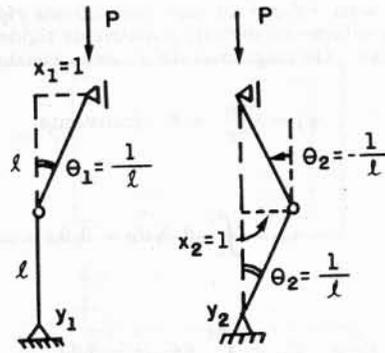


Fig. 13.4.9

No Ex. 2 de 13.2.1 (2 graus de liberdade),

$$C_{11} = a \left(\frac{1}{4a^2} \times 2 + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{3}{2a}$$

$$C_{12} = a \left(-2 \times \frac{1}{2a} \times \frac{1}{2a} \right) = -\frac{1}{2a}$$

$$C_{22} = a \left(2 \times \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{3}{2a}$$

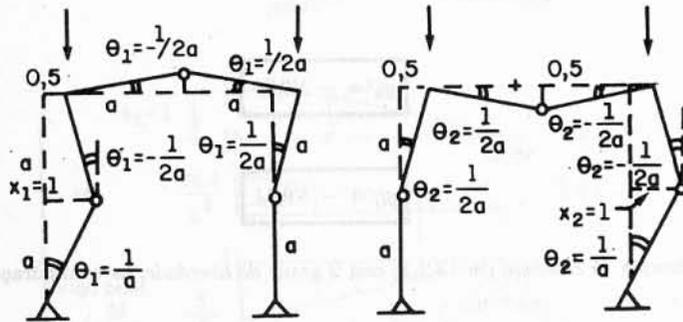


Fig. 13.4.10

Note-se que só foram consideradas as barras que têm esforço normal P .

$$\therefore [K]_G = P \begin{bmatrix} -\frac{3}{2a} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2a} & -\frac{3}{2a} \end{bmatrix}$$

13.4.2. Exemplos de Aplicação da 1.ª Solução à Pesquisa de Condições de Instabilidade

1. Trata-se de obter a carga crítica para a coluna da Fig. 13.4.11 que tem contenção lateral elástica, de constante $k = \frac{24EJ}{l^3}$.

As coordenadas de referência estão indicadas na figura.

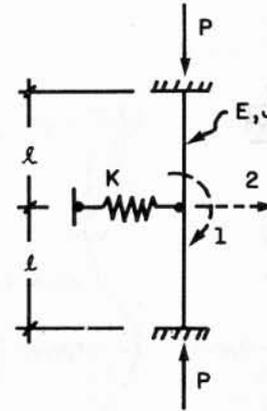


Fig. 13.4.11

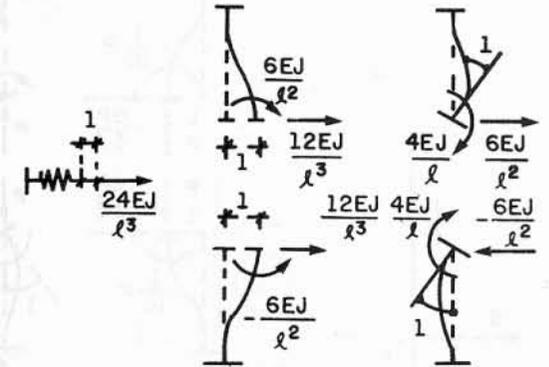


Fig. 13.4.12

Matriz de rigidez elástica (obtida diretamente, Fig. 13.4.12):

$$[K]_E = \begin{bmatrix} \frac{8EJ}{l} & 0 \\ 0 & \frac{48EJ}{l^3} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez geométrica: usando a matriz da expressão (78), onde só interessam duas coordenadas em cada barra, é obtida com os dados da Fig. 13.4.13:

$$[K]_G = \begin{bmatrix} -\frac{4P}{15l} & 0 \\ 0 & -\frac{12P}{5l} \end{bmatrix}$$

Fazendo $\frac{Pl^2}{EJ} = \lambda$, a matriz de rigidez total é

$$[K]_E + [K]_G = \frac{EJ}{15l^3} \begin{bmatrix} (120l^2 - 4l^2\lambda) & 0 \\ 0 & 720 - 36\lambda \end{bmatrix}$$

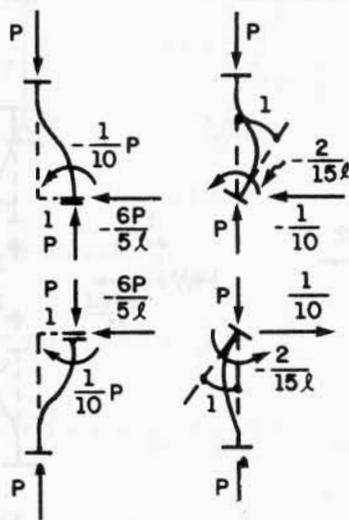


Fig. 13.4.13

Logo, o problema de autovalores é

$$\frac{EJ}{15l^3} \begin{bmatrix} 120l^2 - 4l^2\lambda & 0 \\ 0 & 720 - 36\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \therefore \lambda_1 = 20 \text{ e } \lambda_2 = 30.$$

Para $\lambda_1 = 20$, $\therefore P_1 = \frac{20EJ}{l^2}$ e $\{x_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 30$, $\therefore P_2 = \frac{30EJ}{l^2}$ e $\{x_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$.

Os valores de P_1 e P_2 obtidos são pouco precisos, porque só foram considerados dois elementos de barra.

2. Na coluna da Fig. 13.4.15, existem 2 graus de liberdade, no nó B (sem computar as deformações axiais). As coordenadas de referência são as indicadas.

Cálculo dos elementos de $[K]_E$:

$$K_{11} = \frac{3EJ}{a} + \frac{6EJ}{a} = \frac{9EJ}{a}$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{3EJ}{a^2} - \frac{6EJ}{a^2} = -\frac{3EJ}{a^2}$$

$$K_{22} = \frac{3EJ}{a^3} + \frac{6EJ}{a^3} = \frac{9EJ}{a^3}$$

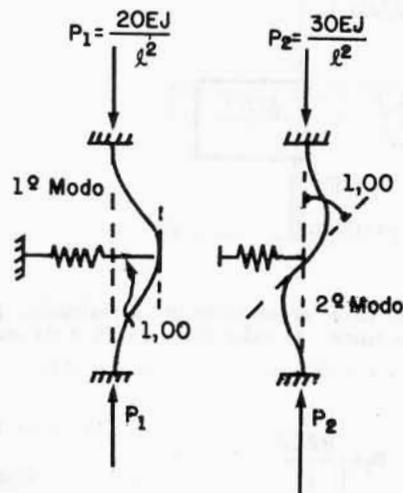


Fig. 13.4.14

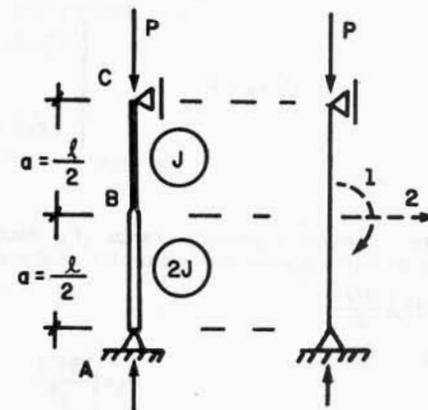


Fig. 13.4.15

Termos da matriz de rigidez geométrica $[k]_G$:

$$G_{11} = -\frac{Pa}{5} - \frac{Pa}{5} = -\frac{2Pa}{5}$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{P}{5} - \frac{P}{5} = 0$$

$$G_{22} = -\frac{6P}{5a} - \frac{6P}{5a} = -\frac{12P}{5a}$$

Logo, fazendo $\lambda = \frac{Pa^2}{5EJ}$, obtém-se:

$$\frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} (9a^2 - 2a^2\lambda) & -3a \\ -3a & (9 - 12\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore 8\lambda^2 - 42\lambda + 24 = 0.$$

$$\lambda_1 = 0,65 \quad \therefore \begin{cases} P_1 = 3,25 \frac{EJ}{a^2} = \boxed{\frac{13EJ}{l^2}} \\ \{x_1\} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 2,50a \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 4,6 \quad \begin{cases} P_2 = 23 \frac{EJ}{a^2} = \boxed{\frac{92EJ}{l^2}} \\ \{x_2\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -0,066a \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Nota. Mesmo a primeira carga (P_1) está com valor grosseiramente aproximado, pelo fato de haver apenas dois elementos (AB e BC) na haste. O valor exato de P_1 é da ordem de $12,8 \frac{EJ}{l^2}$.

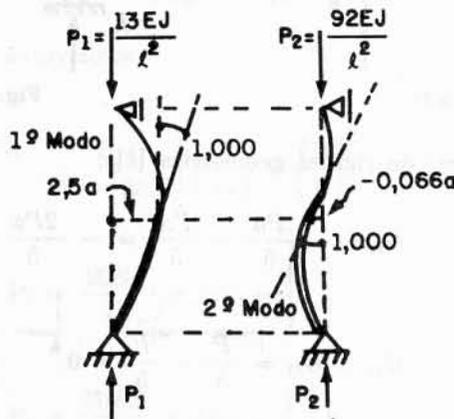


Fig. 13.4.1.6

3. No pórtico assimétrico da Fig. 13.4.17, com apenas um grau de liberdade, tem-se:

$$k_{11} = \frac{12EJ}{a^3} + \frac{24EJ}{a^3} = \frac{36EJ}{a^3}$$

$$g_{11} = 2 \times \left(- \frac{6}{5a} P \right)$$

$$\therefore \left(\frac{36EJ}{a^3} - \frac{12P}{5a} \right) x_1 = 0$$

$$\frac{36EJ}{a^3} = \frac{12P_1}{5a} \quad \therefore \boxed{P_1 = 15 \frac{EJ}{a^2}}$$

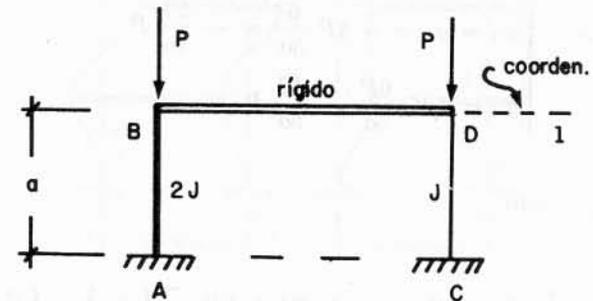


Fig. 13.4.17

Note-se que a coluna CD isolada teria $P' = \frac{\pi^2 EJ}{a^2} \approx \frac{10EJ}{a^2}$ e a coluna AB teria $P'' = \frac{2\pi^2 EJ}{a^2} \approx \frac{20EJ}{a^2}$, sempre considerando a deslocabilidade, sem rotação, do topo.

4. No caso da Fig. 13.4.18:

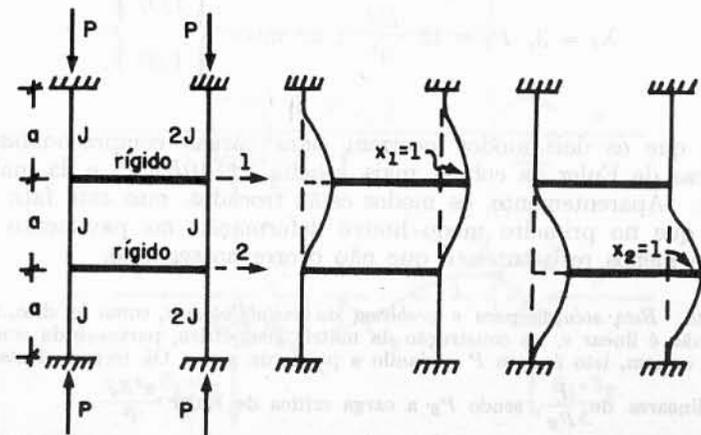


Fig. 13.4.18

$$\begin{cases} k_{11} = \frac{3 \times 12EJ}{a^3} + \frac{24EJ}{a^3} = \frac{60EJ}{a^3} \\ k_{12} = k_{21} = \frac{-2 \times 12EJ}{a^3} = -\frac{24EJ}{a^3} \\ k_{22} = k_{11} = \frac{60EJ}{a^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{11} = g_{22} = -4P \frac{6}{5a} = -\frac{24}{5a} P \\ g_{12} = 2 \times \frac{6P}{5a} = \frac{12}{5a} P \end{cases}$$

Para $\lambda = \frac{Pa^2}{5EJ}$, vem

$$\frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} (60 - 24\lambda) & (-24 + 12\lambda) \\ (-24 + 12\lambda) & (60 - 24\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{7}{3}, P_1 = 11,67 \frac{EJ}{a^2}; \text{ 1.º modo } \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,00 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3, P_2 = 15 \frac{EJ}{a^2}; \text{ 2.º modo } \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$$

Note-se que os dois modos ocorrem para cargas compreendidas entre as cargas críticas de Euler da coluna mais esbelta ($\approx 10EJ/a^2$) e da mais robusta ($\approx 20EJ/a^2$). Aparentemente, os modos estão trocados, mas este fato se explica observando que no primeiro modo houve deformação no pavimento que tem duas colunas menos resistentes, o que não ocorre no segundo.

Observação. Esta solução para o problema da instabilidade é, como foi dito, aproximada. O problema não é linear e, na construção da matriz geométrica, partiu-se da condição de linearidade na origem, isto é, com P variando a partir de zero. Os termos desta matriz são funções não-lineares de $\frac{P}{P_E}$, sendo P_E a carga crítica de Euler $\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

Se o número de elementos for grande, haverá em cada um deles pequeno valor de l e, portanto, grande valor de P_E . Neste caso, a relação P/P_E é pequena e a matriz obtida está próxima da

verdadeira. Assim, a solução converge para resultado exato quando se considera maior número de elementos (e , em consequência, maior número de graus de liberdade).

É uma solução para computador, pois o problema de autovalores fica trabalhoso.

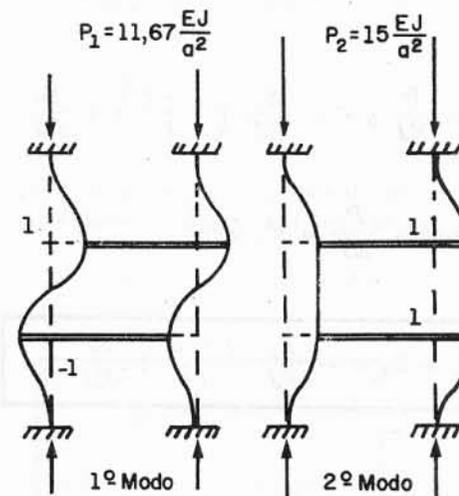


Fig. 13.4.19

13.5. 2ª Solução — Consideração da Não-Linearidade. Funções de Estabilidade

13.5.1. Funções de Rotação

Considere-se a barra reta da Fig. 13.5.1, com as coordenadas 1 e 2. Há uma compressão axial P . É conhecida a equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$$

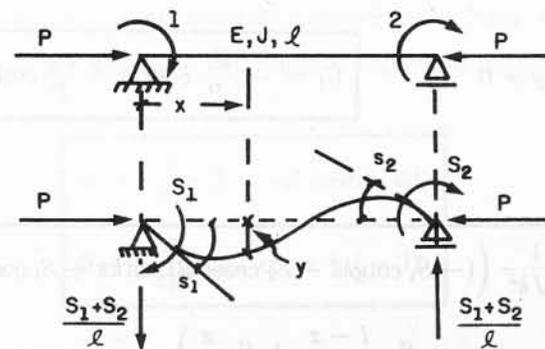


Fig. 13.5.1

Ora

$$M = S_1 - \frac{S_1 + S_2}{l} x + Py \quad (\text{ver fig.}).$$

Logo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EJ} y = -\frac{S_1}{EJ} \left(\frac{l-x}{l} \right) + \frac{S_2}{EJ} \frac{x}{l}.$$

Se for feita a transformação $\frac{P}{EJ} = k^2$, vem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = -\frac{S_1}{EJ} \frac{l-x}{l} + \frac{S_2}{EJ} \frac{x}{l}. \quad (82)$$

A solução geral é:

$$y = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \operatorname{cos} kx - \frac{S_1}{P} \frac{l-x}{l} + \frac{S_2}{P} \frac{x}{l} \quad (83)$$

(se P for de compressão).

As condições de contorno são:

$$1) \text{ para } x = 0, y = 0 \quad \therefore \quad C_2 = \frac{S_1}{P};$$

$$2) \text{ para } x = l, y = 0 \quad \therefore \quad C_1 = -\frac{S_1}{P} \operatorname{cotg} kl - \frac{S_2}{P} \operatorname{cosec} kl.$$

Logo

$$y = \frac{1}{EJk^2} \left((-S_1 \operatorname{cotg} kl - S_2 \operatorname{cosec} kl) \operatorname{sen} kx + S_1 \operatorname{cos} kx - S_1 \frac{l-x}{l} + S_2 \frac{x}{l} \right). \quad (84)$$

Para obter os coeficientes de flexibilidade, há que derivar em relação a x :

$$y' = \frac{1}{EJk^2} \left[(-S_1 k \operatorname{cotg} kl - S_2 k \operatorname{cosec} kl) \operatorname{cos} kx - S_1 k \operatorname{sen} kx + \frac{S_1}{l} + \frac{S_2}{l} \right].$$

As rotações de extremidade (s_1 e s_2) são os valores de y' para $x = 0$ e $x = l$ convindo notar que neste último caso o sinal tem de ser invertido (dada a convenção de s_2).

Se, para simplificar,

$$\alpha = \frac{6}{k^2 l^2} (kl \operatorname{cosec} kl - 1) \\ \beta = \frac{3}{k^2 l^2} (1 - kl \operatorname{cotg} kl) \quad (85)$$

chega-se a

$$s_1 = \frac{S_1 l}{3EJ} \beta - \frac{S_2 l}{6EJ} \alpha \\ s_2 = -\frac{S_1 l}{6EJ} \alpha + \frac{S_2 l}{3EJ} \beta. \quad (86)$$

No caso da *força axial de tração* T , a solução homogênea da equação diferencial (84) vem em termos de funções hiperbólicas. Para $k_1^2 = \frac{T}{EJ}$, observando as condições de contorno e derivando a expressão obtida para y , para

$$\alpha_1 = \frac{6}{k_1^2 l^2} (1 - k_1 l \operatorname{cosech} k_1 l) \\ \beta_1 = \frac{3}{k_1^2 l^2} (k_1 l \operatorname{cot} h k_1 l - 1) \quad (87)$$

são obtidas as rotações:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{S_1 l}{3EJ} \beta_1 - \frac{S_2 l}{6EJ} \alpha_1 \\ s_2 = \frac{-S_1 l}{6EJ} \alpha_1 + \frac{S_2 l}{3EJ} \beta_1. \end{cases} \quad (88)$$

As funções α e β (para força normal de compressão) e α_1 e β_1 (para força normal de tração) são conhecidas como funções de Berry. A solução acima acha-se no livro de Gregory, *Elastic Instability* (Ed. Cassie). As funções citadas constam de ábacos ou tabelas, onde se entra com o argumento $kl = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$.

13.5.2. Matrizes de Flexibilidade e de Rigidez de um Elemento

Para o elemento estudado, a matriz de flexibilidade é (ver Eqs. 86 e 88):

$$[f] = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 2\beta & -\alpha \\ -\alpha & 2\beta \end{bmatrix} \quad (89)$$

(substituir por α_1 e β_1 no caso de tração).

Invertendo esta matriz, tem-se a matriz de rigidez:

$$[k] = \frac{6EJ}{l} \begin{bmatrix} \frac{2\beta}{4\beta^2 - \alpha^2} & \frac{\alpha}{4\beta^2 - \alpha^2} \\ \frac{\alpha}{4\beta^2 - \alpha^2} & \frac{2\beta}{4\beta^2 - \alpha^2} \end{bmatrix}$$

(ou a correspondente em α_1 e β_1).

Definindo as funções de estabilidade:

$$S = \frac{12\beta}{4\beta^2 - \alpha^2} \quad (90)$$

o citado livro de Gregory transcreve os ábacos de Livesley e Chandler, que dão os valores de S e SC em função de $\frac{P}{Q}$, onde Q é a carga crítica de Euler $\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

Os livros de Gere e Weaver e de Ping Chun Wang fornecem expressões para a matriz de rigidez $[k]$. A solução completa do problema está contida também no livro *Computer Methods of Structural Analysis*, de Beaufait, Rowan, Hoadley e Hackett (Prentice-Hall).

É interessante observar o significado mecânico das funções S e SC das expressões (90), (91) e (92).

Sabe-se que, para $P = 0$ ($\therefore k = 0$), a matriz de rigidez é

$$[k] = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

De fato, para $k \rightarrow 0$, a determinação de S e SC , acusando inicialmente forma indeterminada, exige a aplicação da regra de l'Hopital para que se obtenham

$$S = 4 \quad \text{e} \quad SC = 2.$$

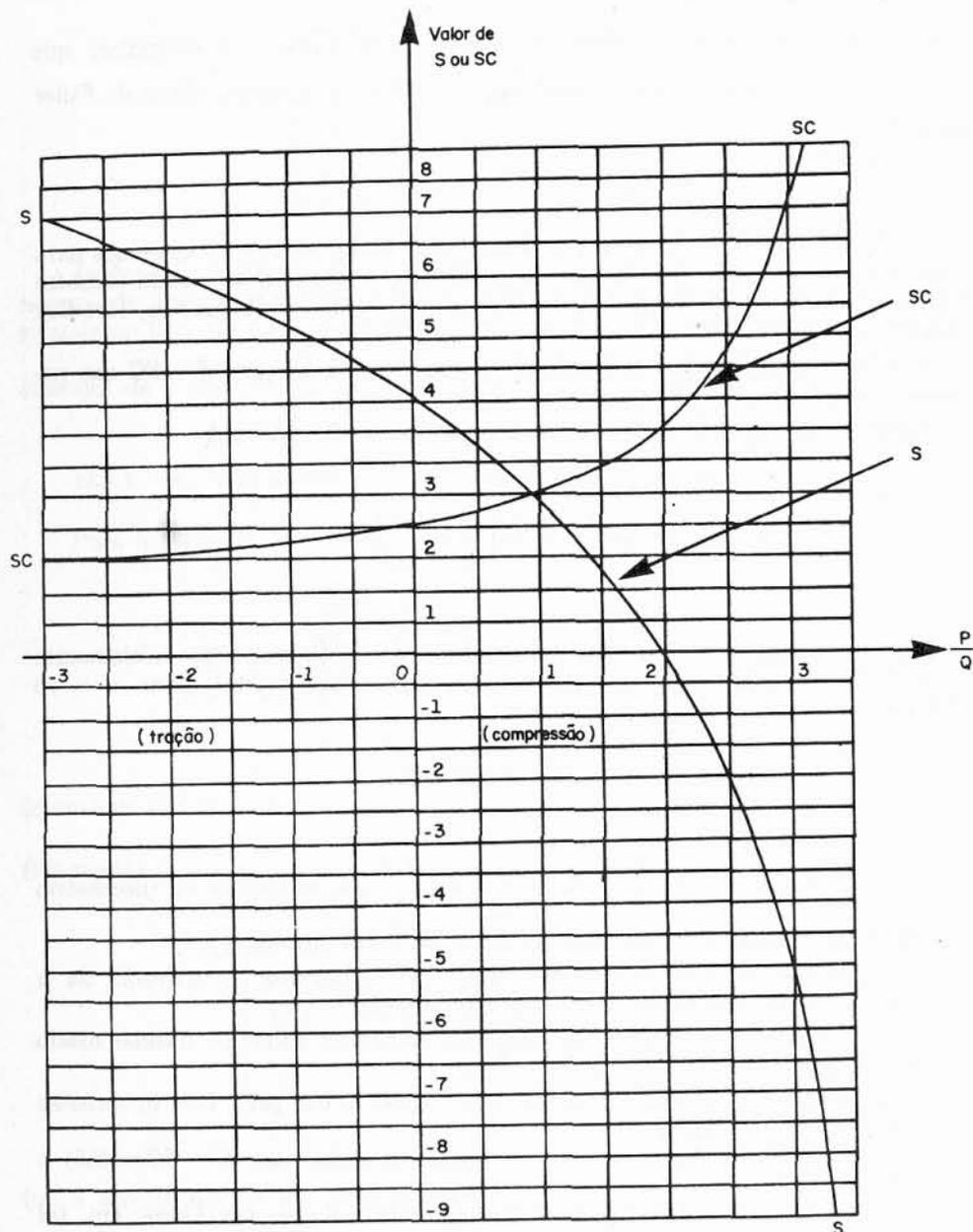
Assim, a função S fornece, em termos de $\frac{EJ}{l}$, o momento k_{11} (necessário para produzir rotação unitária, em presença da força normal P).

A função C é o fator que, multiplicado pelo momento k_{11} aplicado, dá o momento $k_{21} = SC$ despertado na outra extremidade.

Logo, C é o coeficiente de transmissão ou carry over factor (o mesmo usado no processo de Cross).

É interessante notar que este fator, sendo igual a 0,5 para $P = 0$, torna-se unitário quando $P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$, ou $k = \pi^2$ (tendo-se neste caso $S = SC \approx 2,5$) e atinge valores maiores do que 1 para $P > \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ (a solução por Cross em tal caso não seria convergente, o que representa um indício de instabilidade).

$$C = \frac{\alpha}{2\beta} \quad (91); \quad [k] = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} S & SC \\ SC & S \end{bmatrix} \quad (92)$$



Valores de S e SC , em função de $\frac{P}{Q}$, onde $Q = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$.

Do livro *Elastic Instability*, de Gregory.

Fig. 13.5.2

Observações:

1. Conforme o próprio ábaco mostra, as funções S e SC , que dão os termos da matriz de rigidez, não têm relação linear com P . Isto justifica resultados grosseiros, obtidos empregando a matriz de rigidez geométrica, com a divisão da estrutura em poucos elementos.

2. Quando a força compressiva P é igual à carga crítica de Euler $\left(Q = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\right)$, ocorre, no ábaco, o ponto para o qual $\frac{P}{Q} = 1$. Neste ponto: $S \approx SC \approx 2,5$.

É interessante determinar, para essa carga, os valores de g_{11} e g_{12} , elementos da matriz de rigidez geométrica.

$$a) \text{ Deve ser } \frac{4EJ}{l} + g_{11} = 2,5 \frac{EJ}{l}$$

$$g_{11} = -\frac{1,5EJ}{l}, \text{ ou, por ser } \frac{EJ}{l} = \frac{P}{\pi^2},$$

$$g_{11} = -\frac{1,5Pl}{\pi^2}, \text{ ou } \boxed{g_{11} \approx -\frac{3}{20}Pl}$$

(o valor obtido em 13.4 era $-\frac{2}{15}Pl$, havendo portanto um erro de $\frac{1}{60}Pl$, ou 11% do valor exato).

b) Para o outro termo, tem-se:

$$\frac{2EJ}{l} + g_{12} = \frac{2,5EJ}{l}$$

$$g_{12} = \frac{0,5EJ}{l}, \quad g_{12} \approx \frac{Pl}{20}$$

(o valor obtido era $\frac{Pl}{30}$, com erro muito grande).

Evidentemente, se a primeira solução estudada for aplicada com o cuidado de dividir em menores elementos, as cargas P que provocam instabilidade para o conjunto da estrutura

(nos primeiros modos), são pequenas em presença da carga $Q = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ (carga crítica de Euler, para o elemento).

Haverá boa aproximação, principalmente no primeiro modo.

13.5.3. Exemplos Imediatos do Emprego das Funções S e SC em Problemas de Instabilidade Envolvendo Apenas Rotações dos Nós

1. Trata-se de obter os valores críticos de P para a estrutura da Fig. 13.5.3. Só as colunas AC e BD sofrem compressão significativa (igual a P); as vigas CD e DF trabalham à flexão, principalmente. Obtêm-se, em coordenadas locais, as seguintes matrizes de rigidez dos elementos:

$$[k]_c = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; [k]_d = \frac{3EJ}{l};$$

$$[k]_a = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} S & SC \\ SC & S \end{bmatrix} = [k]_b.$$

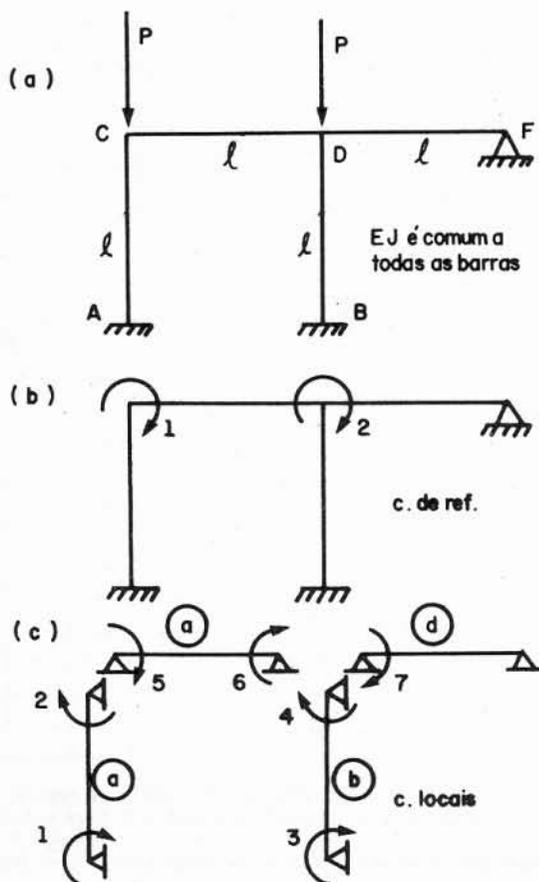


Fig. 13.5.3

Associando os elementos, (para o que se pode proceder pelo método da rigidez direta), tem-se para o conjunto:

$$[K] = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 + S & 2 \\ 2 & 7 + S \end{bmatrix}.$$

O problema de autovalores é, então,

$$\frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 + S & 2 \\ 2 & 7 + S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 4 + S & 2 \\ 2 & 7 + S \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } \boxed{S^2 + 11S + 24 = 0} \begin{cases} S_1 = -3 \\ S_2 = -8. \end{cases}$$

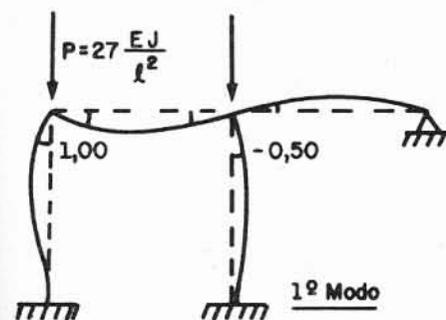


Fig. 13.5.4

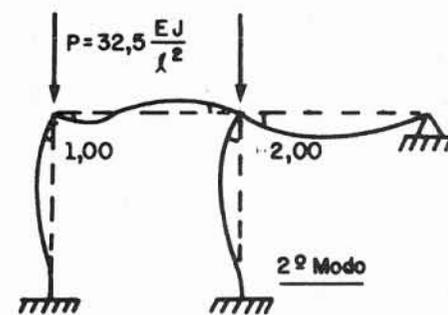


Fig. 13.5.5

1.ª carga é 1.º modo. Ao autovalor $S_1 = -3$ corresponde, no ábaco,

$$\frac{P}{Q} = 2,7 \text{ (onde } Q = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \text{)}$$

$$\therefore \boxed{P_1 = 2,7 \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \approx 27 \frac{EJ}{l^2}}$$

Para $S = S_1 = -3$,

$$\text{a equação acima dá: } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -0,50 \end{Bmatrix}.$$

2.ª carga e 2.º modo. Para $S_2 = -8$, tem-se:

$$\frac{P}{Q} = 3,25 \quad \dots \quad \boxed{P = 3,25 \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \approx 32,5 \frac{EJ}{l^2}}$$

O 2.º modo é $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 2,00 \end{Bmatrix}$.

Nota. As dificuldades deste processo não se patentearam ainda neste Ex. 1. Tivessem as duas colunas comprimentos diferentes e já os valores S seriam diferentes, exigindo uma solução por aproximação.

2. Pórtico simétrico indeslocável, com cargas simétricas (Fig. 13.5.6). Chega-se a

$$|K| = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 7 + S & 2 \\ 2 & 7 + S \end{bmatrix}$$

$$|K| = 0 \quad \boxed{S^2 + 14S + 45 = 0;}$$

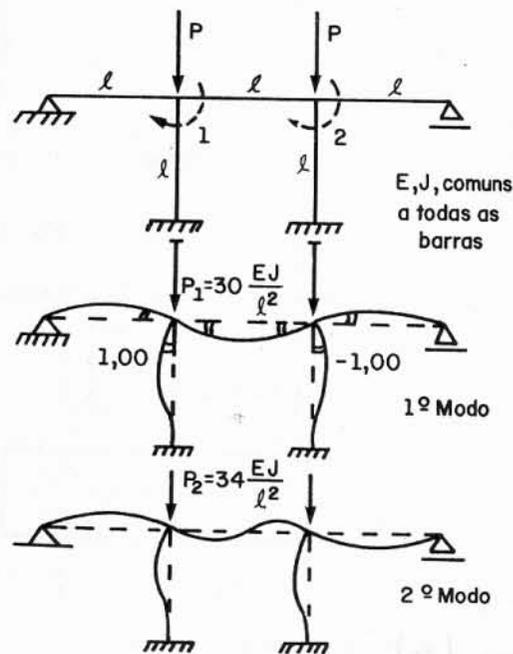


Fig. 13.5.6

$$S_1 = -5; P_1 \approx \frac{30EJ}{l^2}; \{X\}_1 = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ -1,00 \end{Bmatrix} \quad (\text{o 1.º modo é simétrico});$$

$$S_2 = -9; P_2 \approx \frac{34EJ}{l^2}; \{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix} \quad (\text{anti-simétrico})$$

3. Considerando três elementos, dos quais só os dois verticais têm força compressiva P , Fig. 13.5.7:

$$K = \frac{EJ}{l} (2S + 4).$$

Havendo uma única coordenada de referência, a condição de instabilidade é

$$2S + 4 = 0 \quad \dots \quad \boxed{S = -2.}$$

Do ábaco, tira-se: $\frac{P}{Q} = 2,5$.

$$\boxed{P_{cr} \approx 25 \frac{EJ}{l^2}}$$

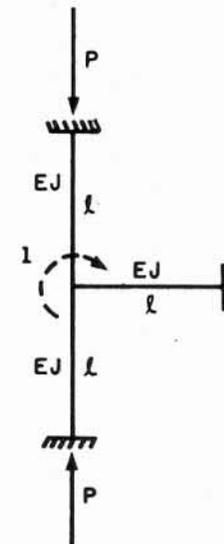


Fig. 13.5.7

13.5.4. Funções de Translação — Matriz de Rigidez Completa de um Elemento

Considere-se um elemento semelhante ao da Fig. 13.5.1, porém com quatro coordenadas (Fig. 13.5.8). Pretende-se obter a matriz de rigidez completa do elemento, influenciado pela carga axial de compressão P .

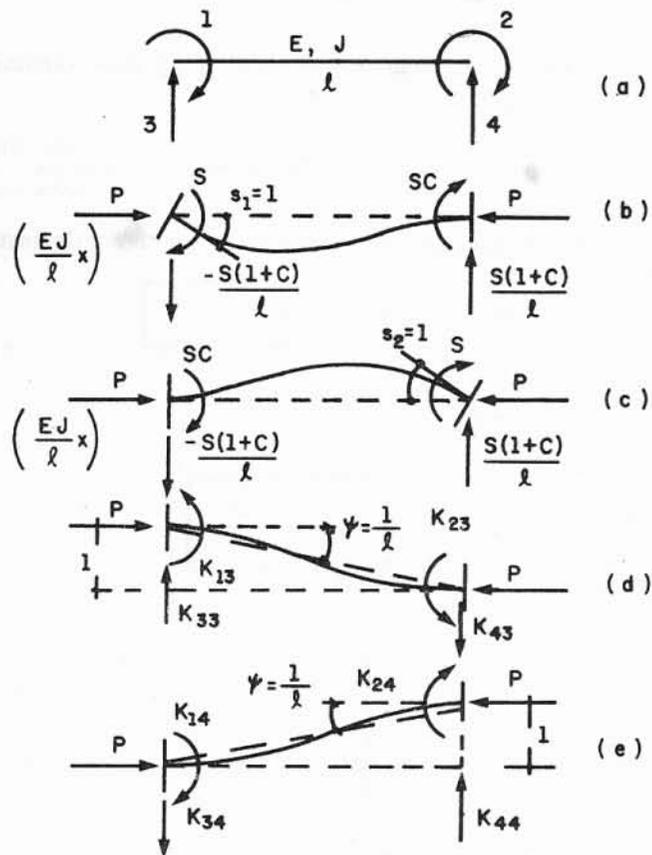


Fig. 13.5.8

1. Aplicando rotações unitárias segundo as coordenadas 1 e 2, são mobilizados os momentos $\frac{EJ}{l} S$ e $\frac{EJ}{l} SC$ e as reações força de extremidade, que são os coeficientes de rigidez, conforme as Figs. b e c.

$$K_{31} = -\frac{EJ}{l^2} S(1+C); \quad K_{41} = +\frac{EJ}{l^2} S(1+C);$$

$$K_{32} = -\frac{EJ}{l^2} S(1+C) \quad \text{e} \quad K_{42} = +\frac{EJ}{l^2} S(1+C).$$

Aplicando translação unitária segundo a coordenada 3, Fig. d, a configuração da estrutura pode ser considerada como resultando de uma rotação rígida $\psi = \frac{1}{l}$ (que só desperta as reações $\frac{P}{l}$ e $-\frac{P}{l}$, decorrentes da presença da carga P), seguida de rotações das extremidades $-\psi = -\frac{1}{l}$, dando lugar a momentos:

$$K_{13} = -\frac{EJ}{l} S \cdot \frac{1}{l} - \frac{EJ}{l} SC \cdot \frac{1}{l} = -\frac{EJ}{l^2} S(1+C)$$

(mesmo valor obtido para K_{31})

$$K_{23} = -\frac{EJ}{l} S \cdot \frac{1}{l} - \frac{EJ}{l} SC \cdot \frac{1}{l} = -\frac{EJ}{l^2} S(1+C) = K_{32}.$$

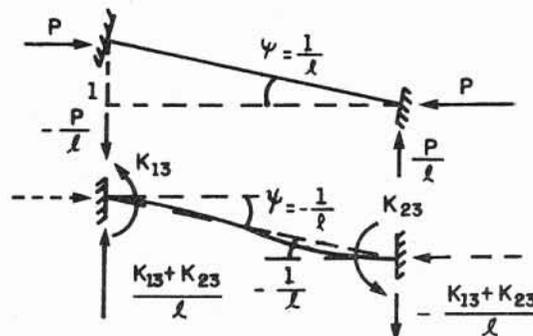


Fig. 13.5.9

As forças verticais totais nas extremidades são, assim:

$$K_{33} = \frac{2EJ}{l^3} S(1+C) - \frac{P}{l} \quad \text{e} \quad K_{43} = -\frac{2EJ}{l^3} S(1+C) + \frac{P}{l}.$$

Aplicando uma translação unitária segundo a coordenada 4, Fig. e, obtém-se de modo semelhante (Fig. 13.5.10):

$$K_{14} = \frac{EJ}{l^2} S(1+C) \quad (= K_{41})$$

$$K_{24} = \frac{EJ}{l^2} S(1+C) \quad (= K_{42})$$

$$K_{34} = -\frac{2EJ}{l^3} S(1+C) + \frac{P}{l} \quad (= K_{43})$$

$$K_{44} = +\frac{2EJ}{l^3} S(1+C) - \frac{P}{l}$$

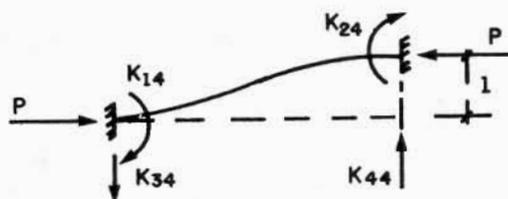


Fig. 13.5.10

A matriz de rigidez completa do elemento é:

$$[K] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} SI^2 & SCI^2 & -S(1+C)l & S(1+C)l \\ SCI^2 & SI^2 & -S(1+C)l & S(1+C)l \\ -S(1+C)l & -S(1+C)l & \left(2S(1+C) - \frac{Pl^2}{EJ}\right) & -\left(2S(1+C) - \frac{Pl^2}{EJ}\right) \\ S(1+C)l & S(1+C)l & -\left(2S(1+C) - \frac{Pl^2}{EJ}\right) & \left(2S(1+C) - \frac{Pl^2}{EJ}\right) \end{bmatrix}$$

A Fig. 13.5.11 é um ábaco (do livro citado), dando os valores de $S(1+C)$ e S'' (função a ser considerada mais adiante), para os diversos valores de P/Q .

Caso de um elemento com extremidade articulada. As Figs. 13.5.12a, b, c, d mostram, com detalhes, o cálculo dos elementos da matriz de rigidez. Nesses valores, aparece a função

$$S - SC^2 = S(1 - C^2) = S''.$$

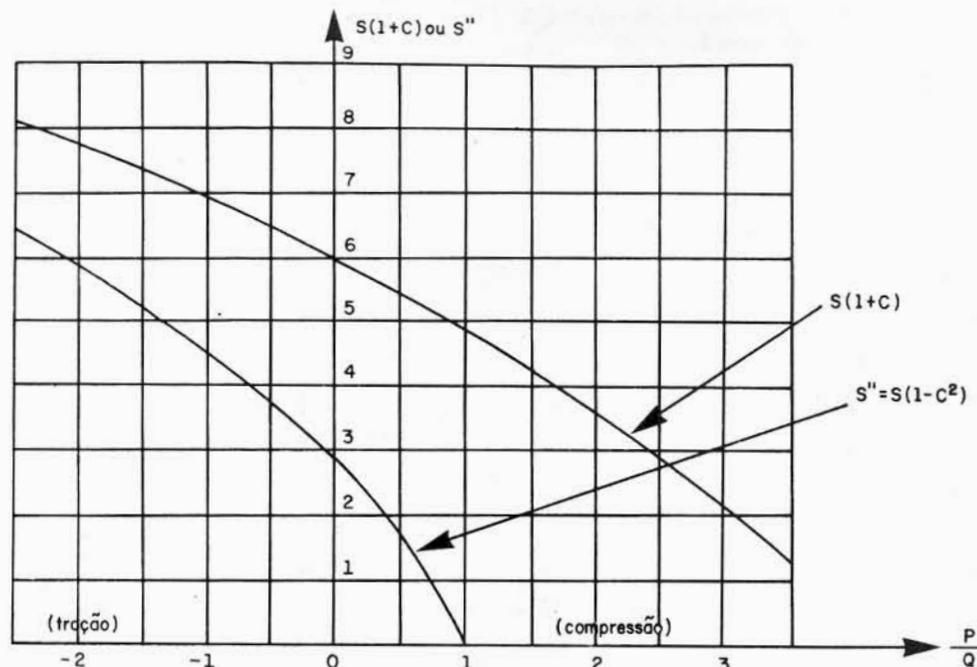


Fig. 13.5.11

A matriz de rigidez é

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EJ}{l} S'' & -\frac{EJ}{l^2} S'' & \frac{EJ}{l^2} S'' \\ -\frac{EJ}{l^2} S'' & \left(\frac{EJ}{l^3} S'' - \frac{P}{l}\right) & -\left(\frac{EJ}{l^3} S'' - \frac{P}{l}\right) \\ \frac{EJ}{l^2} S'' & -\left(\frac{EJ}{l^3} S'' - \frac{P}{l}\right) & \left(\frac{EJ}{l^3} S'' - \frac{P}{l}\right) \end{bmatrix}$$

A função

$$S'' = S(1 - C^2) \tag{93}$$

consta do ábaco da Fig. 13.5.11, onde o argumento de entrada é o valor de $\frac{P}{Q}$, para $Q = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

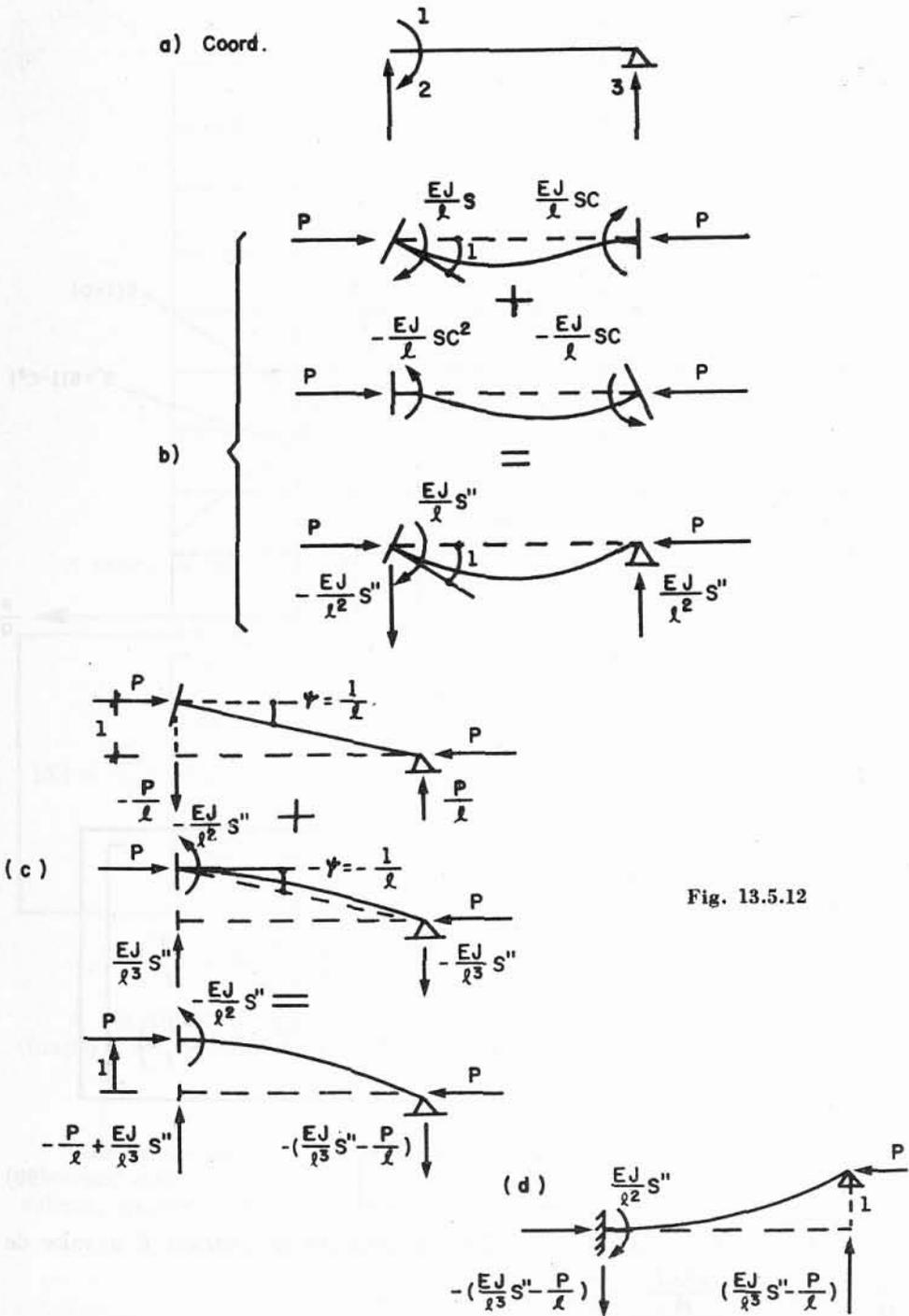


Fig. 13.5.12

13.5.5. Considerações Gerais Sobre o Problema da Instabilidade, no Formalismo Matricial — Critérios de Instabilidade

Como se viu, as funções S , SC e S'' (que integram os elementos da matriz de rigidez dos elementos sujeitos a força normal significativa) não são lineares, constituindo funções transcendentais de P , em certos casos associadas à função linear P/l .

Assim, só raramente (como nos três exemplos estudados no Item 13.5.3), será possível resolver de forma direta o problema dos autovalores, com o auxílio destas funções.

O usual, neste caso, é obter a carga crítica por aproximações, arbitrando P e verificando se a estrutura é ou não estável, para essa carga.

De modo geral, o princípio básico é o de que nas condições de instabilidade, um sistema elástico tem rigidez nula e flexibilidade tendendo a crescer indefinidamente.

1.º critério de avaliação da instabilidade. Se $\{\delta x\}$ são perturbações de equilíbrio aplicadas à estrutura, segundo um dos modos de flambagem, e se $\{\delta X\}$ são as forças externas necessárias para produzi-las, tem-se (admitindo que a rigidez seja função de $\lambda = \frac{P}{Q}$).

$$\{\delta X\} = [K(\lambda)] \{\delta x\}.$$

Ora, por definição, se a estrutura estiver submetida à carga crítica, $\{\delta X\} = \{0\}$ pois o equilíbrio é indiferente.

Logo.

$$[K(\lambda)] \{\delta x\} = \{0\}$$

e, portanto,

$$|K(\lambda)| = 0. \tag{94}$$

A carga P é crítica quando a matriz de rigidez se torna singular.

Posto que $|K(\lambda)|$ é função transcendente de P (e de λ , portanto), a aplicação deste critério exigirá que se chegue às raízes por aproximações numéricas, arbitrando valores de P e calculando o determinante característico (94). Sempre que este mudar de sinal, tem-se uma carga crítica. Em geral, interessa a primeira delas (a de menor valor).

Obtido P_{crit} , o modo correspondente vem das equações:

$$[K(\lambda)] \{x\} = \{0\}.$$

2.º critério: da rigidez absoluta. Segundo este critério, o estado crítico ocorre quando "a rigidez absoluta da estrutura, segundo cada coordenada generalizada, torna-se nula."

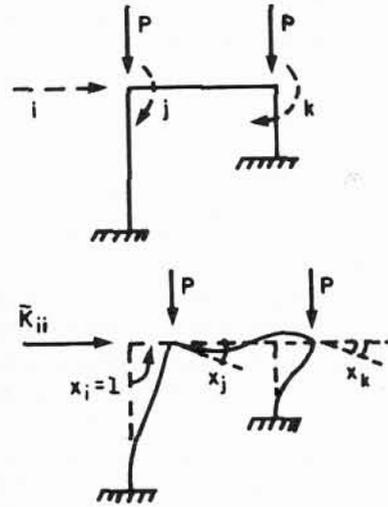


Fig. 13.5.13

A rigidez absoluta \bar{K}_{ii} , segundo a coordenada i , é a ação mecânica a aplicar segundo essa coordenada, para deslocar a estrutura de $x_i = 1$, sem que haja restrições aos deslocamentos segundo as demais coordenadas (Fig. 13.5.13).

É evidente que, quando \bar{K}_{ii} tornar-se nulo, a estrutura estará em equilíbrio indiferente e na iminência de tornar-se instável.

O 2.º critério é, portanto, (para todas as coordenadas i)

$$\boxed{\bar{K}_{ii} = 0.} \quad (95)$$

Determinação da rigidez absoluta \bar{K}_{ii} . Seja um sistema com n coordenadas. Quando aplicado o deslocamento $x_i = 1$, deve-se ter:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{K}_{ii} \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2i} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & K_{i2} & \dots & K_{ii} & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i = 1 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = K_{11}x_1 + K_{12}x_2 + \dots + K_{1i} + \dots + K_{1n}x_n \\ 0 = K_{21}x_1 + K_{22}x_2 + \dots + K_{2i} + \dots + K_{2n}x_n \\ \dots \\ \bar{K}_{ii} = K_{i1}x_1 + K_{i2}x_2 + \dots + K_{ii} + \dots + K_{in}x_n \\ \dots \\ 0 = K_{n1}x_1 + K_{n2}x_2 + \dots + K_{ni} + \dots + K_{nn}x_n \end{cases}$$

Trocando de posição a coluna i do segundo membro com o primeiro membro, as equações, sob forma matricial, serão:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & 0 & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & 0 & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & K_{i2} & \dots & -1 & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & \dots & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \bar{K}_{ii} \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -K_{1i} \\ -K_{2i} \\ \dots \\ -K_{ii} \\ \dots \\ -K_{ni} \end{Bmatrix} \quad (96)$$

O primeiro membro da Eq. (96) apresenta uma matriz de rigidez modificada:

$$[K_S] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & 0 & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & 0 & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & K_{i2} & \dots & -1 & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & \dots & 0 & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

(obtida a partir da matriz inicial com a substituição da coluna de ordem i). Seja $[\beta] = [K_S]^{-1}$ a inversa desta matriz. Deve ser:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \bar{K}_{ii} \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1i} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2i} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \dots & \beta_{ii} & \dots & \beta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -K_{1i} \\ -K_{2i} \\ \dots \\ -K_{ii} \\ \dots \end{Bmatrix}$$

e finalmente

$$\boxed{\bar{K}_{ii} = -\beta_{i1} K_{1i} - \beta_{i2} K_{2i} - \dots - \beta_{in} K_{ni}.} \quad (97)$$

Concluindo: "a rigidez absoluta \bar{K}_{ii} resulta da multiplicação da linha i da matriz $[\beta]$ (inversa da matriz de rigidez modificada $[K_S]$) pela coluna i da matriz de rigidez original $[K]$ ".

Se a estrutura é estável, os valores da rigidez absoluta \bar{K}_{ii} para todas as coordenadas gerais (que correspondem a deslocamentos nodais independentes) serão positivos. A situação crítica é atingida quando um deles se anula. Existindo um K_{ii} negativo, a estrutura é instável.

3.º critério: da convergência na distribuição de momentos segundo Cross. Se se aplicar a uma estrutura sujeita a grandes esforços normais uma ação externa (força ou momento) perturbadora, esta ação irá em geral excitar a estrutura com participação dos diversos modos de flambagem (ocorrendo fato semelhante

ao o que foi estudado no caso das vibrações). Se tal ação externa afetar o primeiro modo e a força normal for a carga crítica correspondente, os momentos fletores induzidos por tal perturbação tenderão para valores infinitamente grandes. O mesmo seria válido, como é lógico, para os demais modos.

Esta particularidade pode ser explorada para testar a estabilidade pelo processo numérico de Cross.

As funções de rotação e translação estudadas servirão para se obterem as grandezas básicas desse processo. Assim:

$$K = \frac{EJ}{l} S \quad \text{ou} \quad K' = \frac{EJ}{l} S''$$

são os valores da rigidez em uma barra, conforme a extremidade oposta à que se considera esteja engastada ou articulada; o coeficiente de transmissão (carry over factor) é a função C , obtida do ábaco ou das funções α e β (no caso do ábaco será o quociente de SC por S); os efeitos de deslocabilidades dependem das funções $S(1+C)$.

Aplicando à estrutura uma ação externa (de preferência, por ser mais simples, um momento em um dos nós) que excite o primeiro modo, desenvolve-se normalmente a iteração segundo Cross. Se a solução converge, a estrutura é estável. Se diverge é instável. Há apenas que ter o máximo cuidado no constatar a correspondência entre o modo testado (no caso, o primeiro) e o modo excitado, isto é, torna-se necessário que a ação externa não produza efeitos que excluam a participação do primeiro modo.

Exemplos

1. Trata-se de determinar a carga crítica do quadro da Fig. 13.5.14, no qual todas as barras têm o mesmo EJ .

A estrutura considerada tem 2 graus de liberdade (ver as coordenadas da Fig. 13.5.15).

$$1.^{\text{a}} \text{ aproximação: } P = \frac{\pi^2 EJ}{a^2}$$

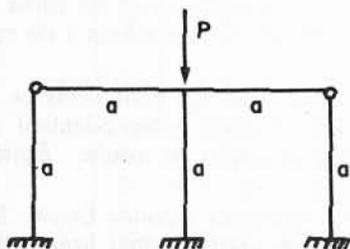


Fig. 13.5.14

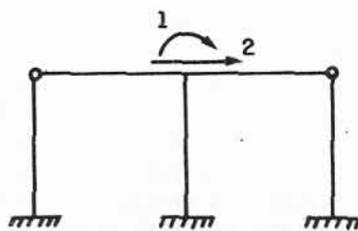


Fig. 13.5.15

13.5. 2ª SOLUÇÃO

Tem-se $S = SC = 2,5$; $S(1+C) = 5$

$$\therefore [K] = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 8,5a^2 & -5a \\ -5a & 6 \end{bmatrix}$$

Pelo 1.º critério: $|K| = 51a^2 - 25a^2 = 26a^2 (> 0)$ (estável).

Pelo 2.º critério:

$$\frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 8,5a^2 & -5a \\ -5a & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \therefore \begin{cases} x_1 = 0,59/a \\ \bar{K}_{22} = -2,95 + 6 = + 3,05 \end{cases} (> 0)$$

$$\frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 8,5a^2 & -5a \\ -5a & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{K}_{11} \\ 0 \end{Bmatrix} \therefore \begin{cases} x_2 = 5a/6 \\ \bar{K}_{11} = 8,5a^2 - 4,2a^2 = + 4,3a^2 \end{cases} (> 0)$$

A estrutura é estável, pois

$$\bar{K}_{11} > 0 \quad \bar{K}_{22} > 0.$$

$$2.^{\text{a}} \text{ aproximação: } P = 1,3 \frac{\pi^2 EJ}{a^2} \text{ (aumentou-se o valor de } P\text{).}$$

Neste caso, $S = 1,7$; $SC = 2,8$; $S(1+C) = 4,5$.

$$[K] = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 7,7a^2 & -4,5a \\ -4,5a & 2,0 \end{bmatrix}$$

Pelo 1.º critério: $|K| = 15,4a^2 - 20,2a^2 = -4,8a^2 (< 0)$ (instável).

Pelo 2.º critério: $K_{11} = 7,7 - 10,1 = -2,4$ (instável).

$$3.^{\text{a}} \text{ aproximação: } P = 1,2 \frac{\pi^2 EJ}{a^2} \therefore S = 1,9; SC = 2,7; S(1+C) = 4,6.$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 7,9a^2 & -4,6 \\ -4,6a & 3,2 \end{bmatrix}$$

1.º critério: $|K| = 27,5a^2 - 21,2a^2 = 6,3a^2 (> 0)$ (estável).

2.º critério: $\bar{K}_{11} = 1,2$, $\bar{K}_{22} = 0,5$ (estável).

A carga crítica é intermediária entre os valores das 2.^a e 3.^a aproximações:

$$1,2 \frac{\pi^2 EJ}{a^2} < P_{crit.} < 1,3 \frac{\pi^2 EJ}{a^2}$$

Se feitas outras aproximações, seria possível determinar mais precisamente o valor dessa carga.

2. Verificar a estabilidade do quadro da Fig. 13.5.16 para a carga dada. Os esforços normais são:

- nas barras 1 e 2: compressão de $1,25 \frac{\pi^2 EJ}{a^2}$;
- na barra 3: tração de $\frac{\pi^2 EJ}{a^2}$.

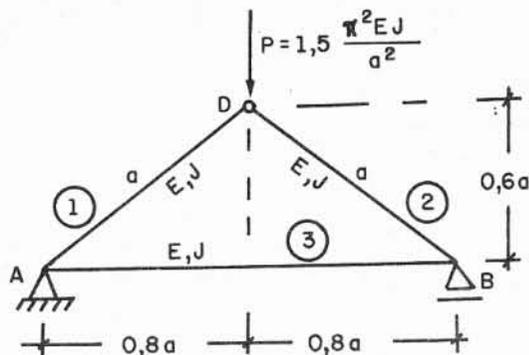


Fig. 13.5.16

Para as peças 1 e 2:

$$\frac{N}{Q} = 1,25; S = 1,75; SC = 2,75; C = 1,57; S'' = 1,75 (-1,48) = -2,59$$

$$\therefore K' = \frac{EJ}{a} S'' = -2,59 \frac{EJ}{a}$$

Para a barra n.º 3:

$$\frac{N}{Q} = -2,56 \frac{\pi^2 EJ}{a^2} \therefore S = 6,70; SC = 1,50, C = 0,224$$

$$K = 6,70 \frac{EJ}{1,6a} = 4,19 \frac{EJ}{a}$$

Os coeficientes de distribuição μ são:

$$\mu_{AB} = \mu_{BA} = \frac{4,19}{1,60} = 2,62;$$

$$\mu_{AD} = \mu_{BD} = -\frac{2,59}{1,60} = -1,62.$$

É claro que o primeiro modo é simétrico, pois não há deslocabilidade linear e as deformações simétricas acarretam menor energia de deformação. Logo, vai-se testar estrutura com momentos perturbadores simétricos em A e B, de 10 mt.

A solução é interrompida quando a tendência de convergir ou não já está patenteada.

Os momentos da coluna da esquerda (M_{AD}) serão obtidos pela soma de parcelas 16,20, 9,51, 5,57, ... que formam uma progressão geométrica de razão 0,586. Logo, a soma converge (o mesmo acontecendo em B, por simetria).

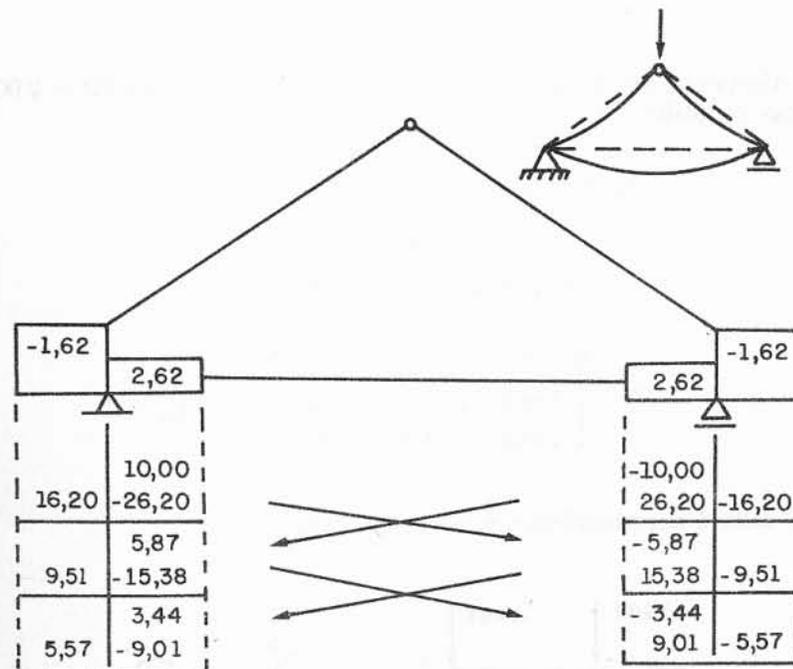


Fig. 13.5.17

A estrutura é estável para esta carga, embora esteja muito próxima das condições críticas.

Esta conclusão é confirmada pelo 1.º critério:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1,60 & 1,40 \\ 1,40 & 1,60 \end{bmatrix} \frac{EJ}{a} \text{ (coordenadas na Fig. 13.5.18)}$$

$$\therefore |K| = (2,56 - 1,96) \frac{E^2 J^2}{a^2} = + 0,60 \frac{E^2 J^2}{a^2} (> 0) \rightarrow \text{estável}.$$

É confirmada também pelo 3.º critério:

$$\bar{K}_{11} = \bar{K}_{22} = + 0,38 \frac{EJ}{a}$$

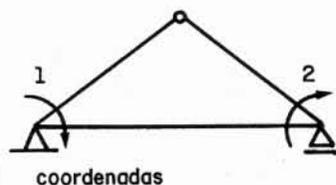


Fig. 13.5.18

3. Verificar a estabilidade do quadro da Fig. 13.5.19, no qual $EJ = 2\,000 \text{ tm}^2$. Nas peças verticais:

$$Q = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = 197,4 \text{ t} \quad \therefore \frac{P}{Q} = 0,75$$

$$\therefore S = 2,90 \text{ e } S(1 + C) = 5,21$$

$$\therefore [K] = \begin{bmatrix} 12,0 & 104,2 & 104,2 \\ 104,2 & 1380,0 & 400,0 \\ 104,2 & 400,0 & 1380,0 \end{bmatrix} \therefore [K] \approx 0.$$

A carga dada é aproximadamente a carga crítica.

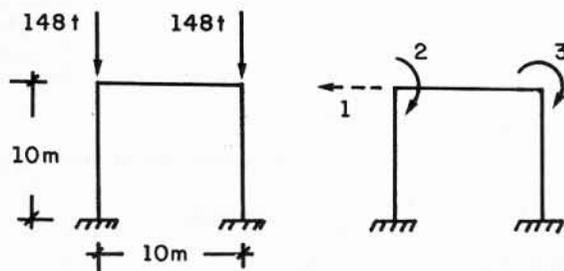


Fig. 13.5.19

Para obter o 1.º modo, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 12,0 & 104,0 & 104,0 \\ 104,2 & 1380,0 & 400,0 \\ 104,2 & 400,0 & 1380,0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \therefore \{X\} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -0,059 \\ -0,059 \end{Bmatrix}$$

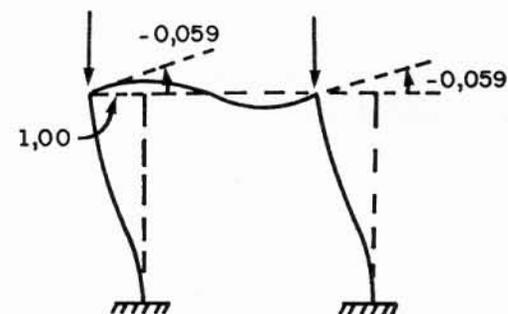


Fig. 13.5.20

Elementos de Álgebra Matricial

1. DEFINIÇÕES — NOTAÇÕES

Matriz $[A]$, de ordem $m \times n$, é um arranjo retangular de elementos dispostos em m linhas e n colunas:

$$[A]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} pode ser um número qualquer — utilizado para operar transformações lineares — ou o valor de uma grandeza mecânica ou geométrica, como por exemplo força, momento, tensão, deslocamento, velocidade e comprimento. A matriz condensa ordenadamente um conjunto de dados.

Matriz linha é a que só tem uma linha:

$$[A] = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \quad (\text{de ordem } 1 \times n).$$

Matriz coluna é a que se reduz a uma coluna:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{Bmatrix}, \quad (\text{de ordem } m \times 1).$$

As matrizes linha e coluna são também tratadas como vetores.

Matriz quadrada ($m \times m$) é a que tem tantas linhas quantas colunas:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Toda matriz quadrada tem um determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Observação: Há uma diferença conceitual profunda entre uma matriz quadrada $[A]$ e seu determinante $|A|$. O determinante é uma função explícita dos m^2 elementos.

$|A| = \sum_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots m}} (a_{1i} a_{2j} \dots a_{pm})$, podendo sempre ser reduzido a um escalar.

A matriz é um simples arranjo, não correspondendo necessariamente a uma função ou ordem de operação. Embora possa ser designada compactamente por um símbolo único, a matriz só fica inteiramente conhecida quando são apresentados todos os seus elementos. A troca de posições destes, que no determinante pode não afetar o seu valor, na matriz dará lugar a outra matriz, diferente da primeira.

Duas matrizes de mesma ordem $[A]$ e $[B]$ serão iguais se, para quaisquer i e j , for $a_{ij} = b_{ij}$:

$$[A]_{m \times n} = [B]_{m \times n}, \text{ se } a_{ij} = b_{ij}$$

Matriz diagonal é a matriz quadrada na qual só são diferentes de zero os elementos da diagonal principal a_{ii} : exemplo,

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{bmatrix}$$

Matriz escalar é a matriz diagonal na qual todos os elementos da diagonal principal são iguais:

$$[E] = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

Matriz unidade ou *matriz identidade* é a matriz escalar na qual todos os elementos da diagonal principal são unitários:

$$[I]_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (matriz unidade de ordem 4).}$$

A matriz escalar é múltipla da matriz unidade de mesma ordem:

$$[E] = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix} = e \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e[I].$$

Transposta de uma matriz $[A]_{m \times n}$ é outra matriz, $[A]_{n \times m}^T$, que resulta de uma troca, na matriz original, das linhas pelas colunas, e vice-versa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Matriz simétrica é a matriz quadrada $[S]$ cuja transposta é igual a ela própria:

$$[S]^T = [S] \quad \therefore s_{ij} = s_{ji}; \quad \text{ex.: } [S] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz anti-simétrica é a matriz quadrada $[A]$ na qual os elementos da diagonal principal são nulos e os demais (dispostos simetricamente aos pares em relação à diagonal principal) são iguais dois a dois, e de sinais contrários:

$$a_{ii} = 0 \quad \text{e} \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

$$[A]^T = -[A]; \quad \text{ex.: } [A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz nula é a que tem todos os elementos nulos: $[A] = [0]$ se $a_{ij} = 0$.

2. SOMA E DIFERENÇA (de matrizes de mesma ordem $m \times n$)

$$[S]_{m \times n} = [A]_{m \times n} + [B]_{m \times n} \quad \therefore s_{ij} = a_{ij} + b_{ij};$$

$$[D]_{m \times n} = [A]_{m \times n} - [B]_{m \times n} \quad \therefore d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

(é necessário realizar a operação elemento por elemento).

Propriedades da adição de matrizes

a) Comutatividade:

$$[A] + [B] - [C] = [A] - [C] + [B];$$

b) Propriedade associativa:

$$[A] + ([B] - [C]) = ([A] + [B]) - [C].$$

c) Transposta de uma soma:

$$\text{sendo } [S] = [A] + [B] - [C], \quad [S]^T = [A]^T + ([B]^T - [C]^T).$$

d) Decomposição:

Qualquer matriz quadrada pode ser decomposta em duas parcelas: uma simétrica e outra anti-simétrica.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & \frac{a_{13}+a_{31}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}+a_{32}}{2} \\ \frac{a_{13}+a_{31}}{2} & \frac{a_{23}+a_{32}}{2} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} & \frac{a_{13}-a_{31}}{2} \\ -\frac{a_{12}-a_{21}}{2} & 0 & \frac{a_{23}-a_{32}}{2} \\ -\frac{a_{13}-a_{31}}{2} & -\frac{a_{23}-a_{32}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

3. MULTIPLICAÇÃO

Produto de uma matriz por um escalar

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \end{bmatrix}$$

Matrizes conformes (para multiplicação)

Dois matrizes $[A]_{m \times r}$ e $[B]_{r \times n}$ são conformes se o número de linhas da primeira é igual ao número de colunas da segunda (r , no caso citado).

Exemplo de matrizes conformes:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Produto de vetores (linha por coluna)

Sendo $[A] = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ e $\{B\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$, o produto $[A] \{B\}$ é

uma escalar:

$$[A] \{B\} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = c$$

(é o produto escalar conhecido desde o cálculo vetorial).

Observações:

a) Dadas duas matrizes-coluna $\{A\}$ e $\{B\}$ de mesma ordem:

$$\{A\}^T \{B\} = \{B\}^T \{A\} = C.$$

Assim, no caso de uma força

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

e um deslocamento de seu ponto de aplicação

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix},$$

o trabalho da força $\{F\}$ é:

$$\mathcal{E} = \{F\}^T \{D\} = \{D\}^T \{F\} = [X \ Y \ Z] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = Xx + Yy + Zz.$$

b) No caso das matrizes

$$[A] = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \quad \text{e} \quad B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix},$$

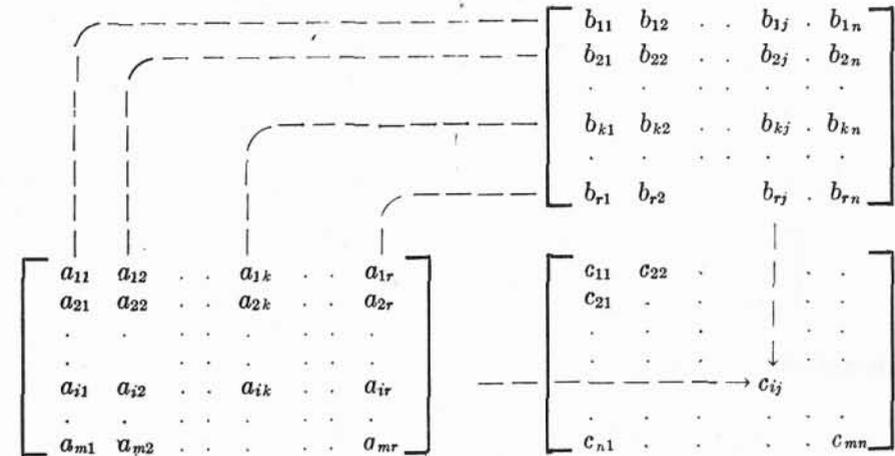
o produto $[P] = \{B\} [A]$ (coluna por linha) também é possível, pois os fatores são conformes, porém o resultado não é um escalar e sim uma matriz, conforme será visto a seguir.

Produto de matriz por matriz

Dadas duas matrizes conformes $[A]$ e $[B]$, o produto $[A]_{m \times r} [B]_{r \times n} = [P]_{m \times n}$ é uma matriz, tendo o mesmo número m de linhas de $[A]$ e o número n de colunas de $[B]$. Cada elemento P_{ij} da matriz produto é obtido multiplicando a linha i de $[A]$ pela coluna j de $[B]$:

$$P_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ik} \ \dots \ a_{ir}] \begin{Bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}.$$

Uma disposição simples e prática para calcular o produto de duas matrizes é a conhecida como arranjo de Falk. As matrizes $[A]$ (primeiro fator, que pré-multiplica) e $[B]$ (segundo fator, que pós-multiplica), são colocadas como se vê a seguir, tornando-se fácil destacar a linha e coluna a serem multiplicadas para obter cada elemento c_{ij} da matriz produto.



Acima se vê o dispositivo para a multiplicação de uma matriz $[A](m \times r)$ por outra, $[B](r \times n)$, para obter a matriz produto $[C]$ (de ordem $m \times n$).

Uma verificação do cálculo pode ser feita: 1) somando os elementos de cada coluna de $[A]$, para obter $[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]$; 2) somando os elementos de cada linha de $[B]$, para obter o vetor

$$\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{Bmatrix}$$

e 3) efetuando o produto $[\alpha] \{\beta\} = C$ (escalar que deve ser igual à soma dos elementos de $[C]$).

Propriedades da adição de matrizes

a) A multiplicação de matrizes não é operação comutativa, isto é:

$$[A] [B] \neq [B] [A]$$

(no produto $[P] = [A] [B]$, diz-se que $[A]$ pré-multiplica $[B]$ ou que $[B]$ pós-multiplica $[A]$).

b) É operação associativa:

$$[A] ([B] [C]) = ([A] [B]) [C].$$

c) É distributiva:

$$[A] ([B] + [C]) = [A] [B] + [A] [C].$$

d) Pode ser $[A] [B] = [A] [C]$, sendo $[B] \neq [C]$.

e) Pode ser $[A] [B] = [0]$, sendo $[A] \neq [0]$ e $[B] \neq [0]$.

f) O produto de uma matriz por um vetor é um vetor. Assim, a igualdade

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}, \quad \text{ou} \quad [A] \{X\} = \{C\},$$

permitindo escrever

$$\begin{Bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix},$$

passa a representar compactamente, no formalismo matricial, o sistema de equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

g) Dimensão do produto de várias matrizes conformes em seqüência

$$\begin{matrix} [A] & [B] & [C] & [D] & = & [P] \\ m \times n & n \times p & p \times q & q \times r & & m \times r \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \end{matrix}$$

h) Pré-multiplicação por uma matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_1 \\ a_{21}d_2 & a_{22}d_2 \\ a_{31}d_3 & a_{32}d_3 \end{bmatrix}$$

(cada linha i da matriz $[A]$ resultou multiplicada pelo elemento d_i da matriz diagonal).

i) Pós-multiplicação por uma matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 \\ a_{31}d_1 & a_{32}d_2 \end{bmatrix}$$

(cada coluna j de $[A]$ ficou multiplicada por d_j).

j) Transposta do produto de matrizes:

$$([A] [B] [C])^T = [C]^T [B]^T [A]^T$$

(é o produto das transpostas dos fatores, em ordem inversa).

k) Determinante do produto de matrizes:

$$|[A] [B] [C]| = |A| \cdot |B| \cdot |C|.$$

l) Para que duas matrizes quadradas tenham produto nulo, é necessário (não suficiente) que pelo menos uma delas tenha determinante nulo

$$\text{se } [A] [B] = [0] \quad \therefore \quad |A| = 0 \quad \text{ou} \quad |B| = 0.$$

4. POTENCIAÇÃO DE MATRIZES QUADRADAS

Potência de uma matriz quadrada $[A]$:

$$[A]^n = [A] [A] \dots [A]$$

Calculam-se todos os cofatores A_{ij} . Colocando-os sob forma de matriz e obtém-se a transposta desta matriz, que é a *adjunta* de A :

$$\text{Adj}[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix};$$

A matriz inversa é obtida dividindo pelo valor do determinante de $[A]$ a matriz adjunta:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}[A].$$

Se a matriz a inverter for uma matriz diagonal

$$[D] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & d_n \end{bmatrix},$$

sua inversa é

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_n \end{bmatrix}.$$

Propriedades

a) A inversa de um produto de matrizes quadradas é igual ao produto das inversas dessas matrizes, na ordem inversa:

$$([A][B][C] \dots [L])^{-1} = [L]^{-1} \dots [C]^{-1}[B]^{-1}[A]^{-1};$$

b) Transposta da inversa:

$$([A]^{-1})^T = ([A]^T)^{-1}.$$

7. DERIVADA DE UMA MATRIZ

Obtém-se derivando todos os elementos da matriz:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dx} & \frac{da_{12}}{dx} & \dots & \frac{da_{1n}}{dx} \\ \frac{da_{21}}{dx} & \frac{da_{22}}{dx} & \dots & \frac{da_{2n}}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{da_{nn}}{dx} \end{bmatrix}.$$

8. INTEGRAÇÃO ENVOLVENDO MATRIZES

Aplica-se o mesmo princípio visto para a derivação

$$\int_{1_1}^{1_2} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} dx = [B]$$

onde todos os elementos de $[B]$ são obtidos por integração

$$b_{ij} = \int_{1_1}^{1_2} a_{ij} dx.$$

Bibliografia

1. Argyris, J. H., *Energy Theorems and Structural Analysis*. Butterworth & Cia, Londres, 1960.
2. Pestel, E. C. e Leckie, F. A., *Matrix Methods in Elasto-Mechanics*. McGraw-Hill, 1963.
3. Rubinstein, M. F., *Matrix Computer Analysis of Structures*. Prentice-Hall, 1966.
4. Laursen, H. I., *Matrix Analysis of Structures*. MacGraw-Hill, 1966.
5. Rubinstein, M. F., *Dynamics of Structures*. Prentice-Hall, 1966.
6. Rubinstein, M. F., *Structural Systems — Statics, Dynamics and Stability*. Prentice-Hall, 1970.
7. Livesley, R. K., *Metodos Matriciales para Calculo de Estructuras*. Ed. Blume, 1970.
8. Asplund, S. O., *Structural Mechanics: Classical and Matrix Methods*. Prentice-Hall, 1966.
9. Wang, Ping Chun, *Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics*. Wiley, 1966.
10. Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*. Wiley, 1968.
11. Beaufait, Rowan, Hoadley e Hackett, *Computer Methods of Structural Analysis*. Prentice-Hall, 1970.
12. Hall & Woodhead, *Frame Analysis*. Wiley, 1965.
13. Warburton, G. B., *The Dynamical Behaviour of Structures*. Pergamon Press, 1964.
14. Gregory, M., *Elastic Instability: Analysis of Buckling Modes and Loads of Framed Structures*. Cassie, Londres, 1967.
15. Smith, G. N., *An Introduction to Matrix and Finite Element Methods in Civil Engineering*. Apl. Sc. Publ. Londres, 1971.
16. Meek, J. L., *Matrix Structural Analysis*. McGraw-Hill, 1971.
17. Wang, Chu-Kia, *Computer Methods in Advanced Structural Analysis*. Intext Ed. Publ., Nova Iorque, 1973.
18. Gere e Weaver, *Analysis of Framed Structures*. Van Nostrand, 1966.
19. Gallagher, Yamada, Oden. *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design*. Publ. Univ. Alabama, 1971.
20. Tuma e Munshi, *Advanced Structural Analysis*. McGraw-Hill, 1971.
21. Venancio, *Análise Matricial de Estruturas*. Alm. Neves 1975

Índice Remissivo

A

Ações nodais (Vetor das), 6
Acoplamento estático e dinâmico, 288
Associação dos elementos, 53 a 58
Autovalores, 247

B

Betti-Maxwell (teorema), 31, 32

C

Carregamento nodal equivalente, 53
Castigliano (teoremas de), 32 a 34
Clebsh (teorema de), 44
Coeficiente de flexibilidade, 9, 10, 33
Coeficiente de rigidez, 10, 32, 33
Compatibilidade estática (matriz de), 21, 22, 23
Compatibilidade cinemática (matriz de), 24, 25, 26
Contragradência (princípio da), 44
Convergência do processo de Cross, 227, 235
Coordenadas (sistemas de), 5
Coordenadas (mudança de), 57, 58
Coordenadas de referência, 5, 8
Coordenadas locais, 6 a 8, 18, 19
Coordenadas normais, 288
Critérios de instabilidade, 367
Cross (tratamento do processo de), 224

D

Deformações (vetor das), 8
Dependência linear entre coordenadas, 16 a 18
Desacoplamento, 288 a 290
Deslocamentos (épuras), 206
Deslocamentos (método dos), 163
Deslocamentos do solo ou referencial, 303
Deslocamentos nodais (vetor dos), 6
Diagonalização, 255

Discretização com elementos linearizados, 335
Distribuição (operador de), 225

E

Efeitos do esforço normal, 212
Elasticidade (equações de), 111
Elementos, 4
Energia complementar de deformação, 34, 37, 38
Energia de deformação, 30, 32, 33, 34
Esforços (vetor dos), 7
Envoltória dos efeitos estáticos da vibração, 303
Equilíbrio e distribuição (operador de), 225
Estrutura desmembrada, 55
Estruturas deslocáveis (Cross), 231
Estrutura integrada, 55 a 58
Estruturas isostáticas, 92
Estruturas simétricas, 149 a 156
Expansão de um vetor, 252
Expulsão de modo de vibração, 279

F

Fatores-escala, 140 a 143
Flexibilidade (coeficiente de), 9, 10, 32, 33
Flexibilidade (matriz de), 11, 12
Flexibilidade (matrizes de), 73 a 83
Forças perturbadoras atuando harmonicamente, 292

G

Grandezas hiperestáticas, 109
Grau de indeterminação cinemática, 165
Grau hiperestático, 109
Graus de liberdade, 258

H

Hiperestáticos, 109
Hiperestático (grau), 109

Idealização estrutural, 3
 Incidência (matrizes de), 21 a 26
 Indeterminação cinemática (grau de), 165
 Instabilidade (critérios de), 367
 Instabilidade de estruturas contínuas, 334
 Instabilidade de sistemas discretos, 307
 Iteração segundo Cross, 226
 Iteração (proc. de Stodola-Vianello), 274

M

Matriz de flexibilidade, 11, 12
 Matrizes de flexibilidade (formulário de), 89 a 92
 Matriz de rigidez, 11, 12
 Matriz de rigidez de uma barra, 163 a 165
 Matriz de rigidez geométrica, 312 a 315, 337, 341
 Matriz dinâmica, 265
 Matriz espectral, 248
 Matriz modal, 247
 Método da flexibilidade (estruturas isostáticas), 92
 Método da flexibilidade (estruturas hiperestáticas), 109
 Método da rigidez (solução geral)
 Modos de flambagem, 311
 Modo natural de vibração, 266
 Modificações de montagem, 97, 131
 Mudança de coordenadas, 57, 58
 Mudança de pólo, 73
 Mudança de sistema principal, 135, 146, 147

N

Nodal equivalente (carregamento), 53

O

Ortogonalidade dos modos, 251

P

Pólo (mudança de), 73

R

Rayleigh (quociente de), 253, 254
 Recalques (efeitos, pelo método da rigidez), 178
 Recalques em estruturas hiperestáticas, 128
 Recalques em estruturas isostáticas, 107
 Redução (teorema da), 51
 Ressonância, 294
 Rigidez (coeficiente de), 10, 32, 33
 Rigidez (matriz de), 11, 12
 Rigidez (método da), 163

Rigidez absoluta, 367, 368
 Rigidez direta (processo da), 170
 Rigidez geométrica, 310
 Rigidez geométrica (matriz de), 312 a 315, 337 a 341
 Rígidas (estruturas com peças infinitamente), 192
 Rotação de eixos, 75, 76

S

Simetria (simplificações de), 149
 Sistema principal, 109
 Sistema principal (escolha do), 139, 140
 Sistema principal (mudança de), 135
 Stodola-Vianello (iteração), 274
 Subdivisão da matriz de rigidez, 187

T

Temperatura (efeitos em estruturas hiperestáticas), 123
 Temperatura (efeitos em estruturas isostáticas), 97 a 105
 Temperatura (efeitos, pelo método da rigidez), 182 a 184
 Teorema da redução, 51
 Trabalho e energia, 30
 Trabalhos virtuais (princípio dos), 40 a 42
 Transformações lineares, 53
 Translação (operador de), 233, 234
 Transmissão (operador de), 226

V

Valores característicos, 247
 Variação de temperatura (estruturas hiperestáticas), 123, 124
 Variação de temperatura (estruturas isostáticas), 97 a 105
 Variações de temperatura (método da rigidez), 182 a 184
 Vetor característico, 247
 Vetor das deformações, 8
 Vetor das ações nodais, 6
 Vetor dos deslocamentos nodais, 6
 Vetor dos esforços, 7
 Vibrações do solo ou referencial, 303
 Vibrações forçadas (lei harmônica), 292
 Vibrações livres com um grau de liberdade, 259
 Vibrações livres com vários graus de liberdade, 263

W

Williot, 206

LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA S.A.
EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO