



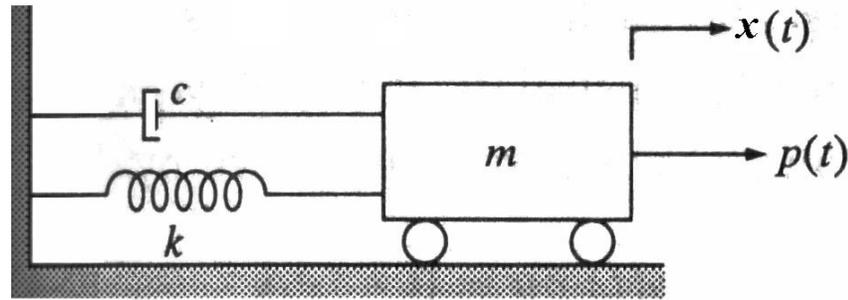
Dinâmica das Estruturas

Aula #3

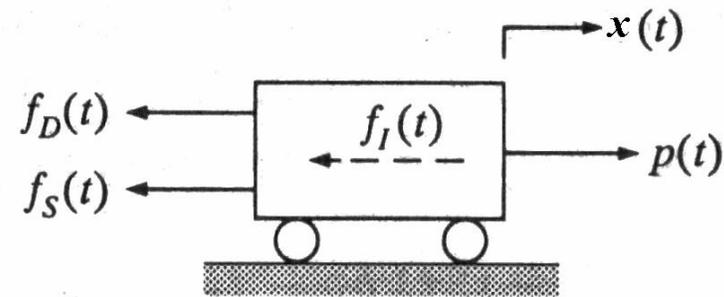
Vibração Forçada

Cel Luiz Augusto C. Moniz de Aragão Filho

Equação do Equilíbrio Dinâmico



(a)



(b)

$$f_I + f_D + f_S = p$$

Carregamento harmônico:

$$p(t) = p_0 \text{ sen } \bar{\omega}t$$

Resposta não-amortecida a um carregamento harmônico

$$m \ddot{x}(t) + \cancel{c \dot{x}(t)} + k x(t) = p_0 \operatorname{sen} \bar{\omega} t$$

1) Solução homogênea: **vibração livre não-amortecida**

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = 0$$

$$x_h(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Resposta não-amortecida a um carregamento harmônico

2) Solução particular: resposta harmônica e em fase com o carregamento:

$$x_p(t) = C \text{ sen } \bar{\omega}t$$

$$C = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right]$$

Deflexão estática

Fator de amplificação
"Magnification Factor – MF"
(estruturas não-amortecidas)

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

→ frequência força excitadora
→ frequência circular natural

Resposta não-amortecida a um carregamento harmônico

Solução geral para $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

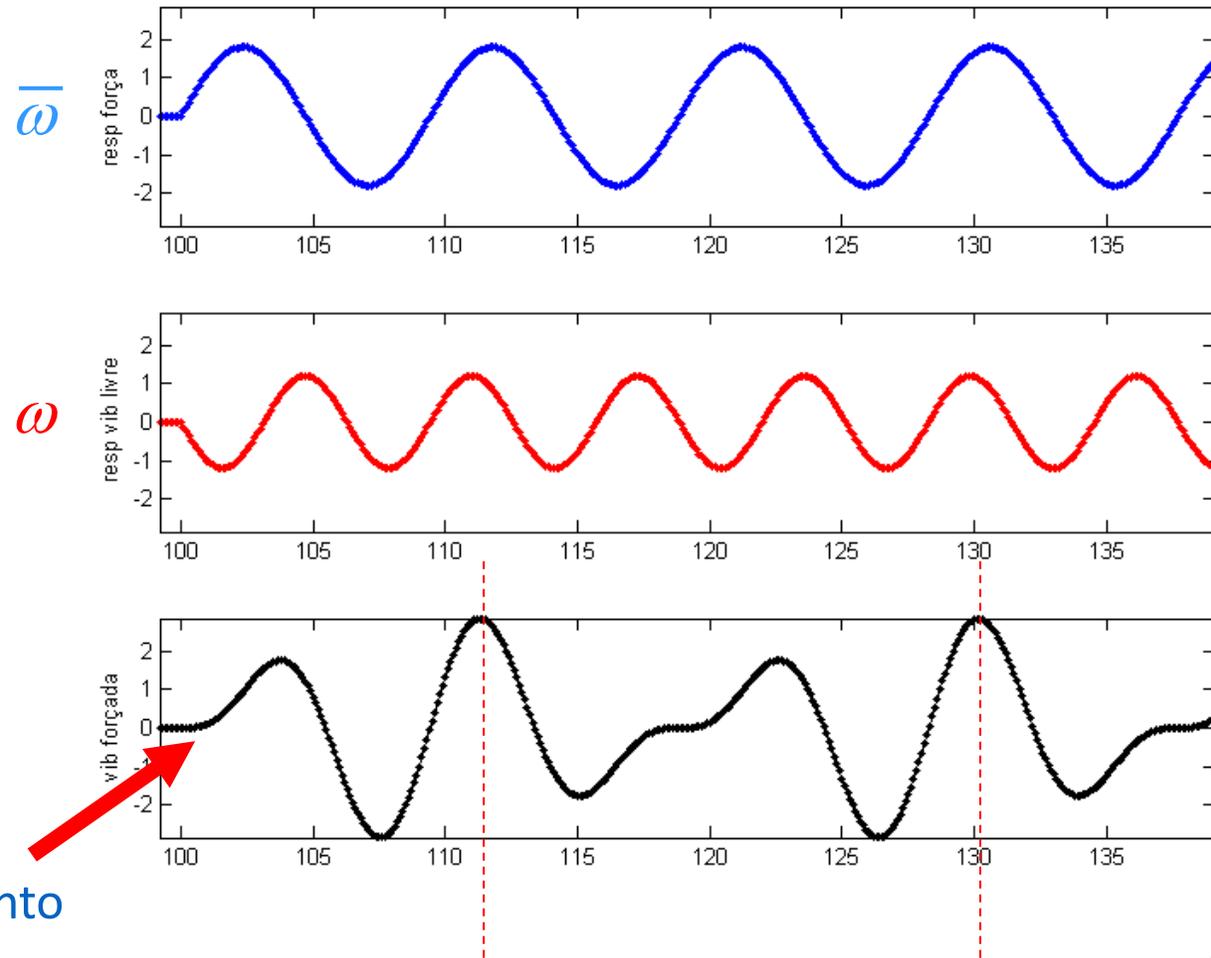
$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$= \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right] (\text{sen } \omega t - \beta^2 \text{sen } \bar{\omega} t)$$

máx

Batimento: $t = \frac{2\kappa\pi}{\omega - \bar{\omega}}$

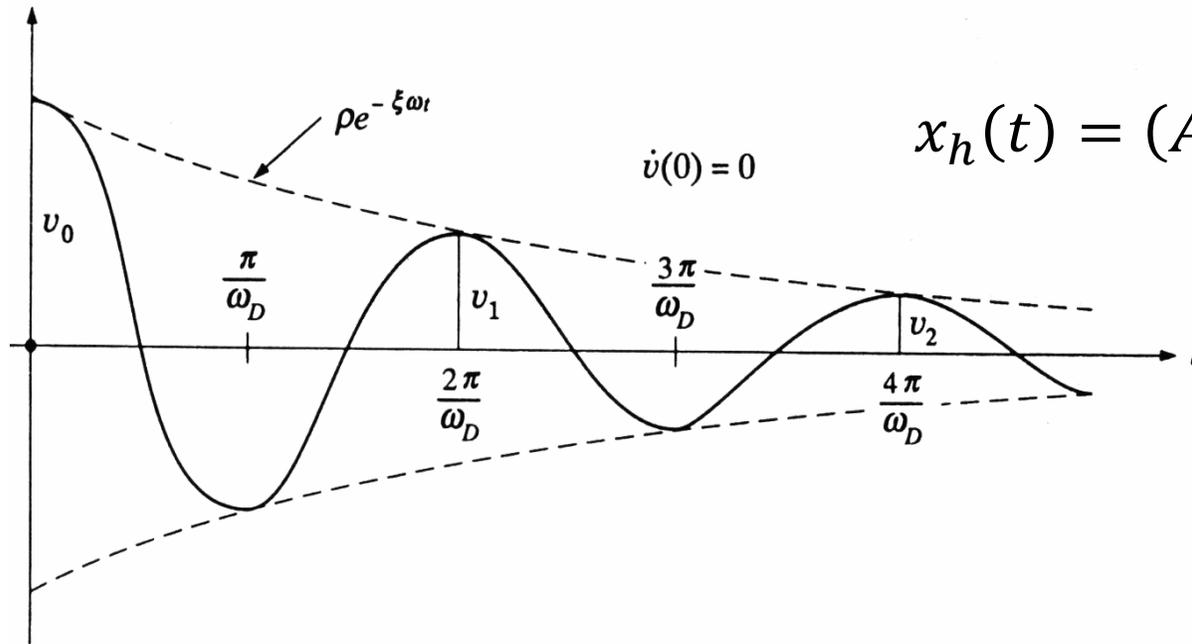
Início “suave” do movimento



Resposta AMORTECIDA a um carregamento harmônico

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = p_0 \text{ sen } \bar{\omega} t$$

1) Solução homogênea: **vibração livre amortecida**



$$x_h(t) = (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi \omega t}$$

Resposta AMORTECIDA a um carregamento harmônico

2) Solução particular: resposta harmônica defasada do carregamento

$$x_p(t) = \frac{p_0}{k} D \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \theta)$$

$$\frac{p_0}{k}$$

deflexão
estática

$$D = \left[\frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \right]$$

Fator de amplificação dinâmica
"Dynamic Magnification Factor"

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$$

defasagem / fase

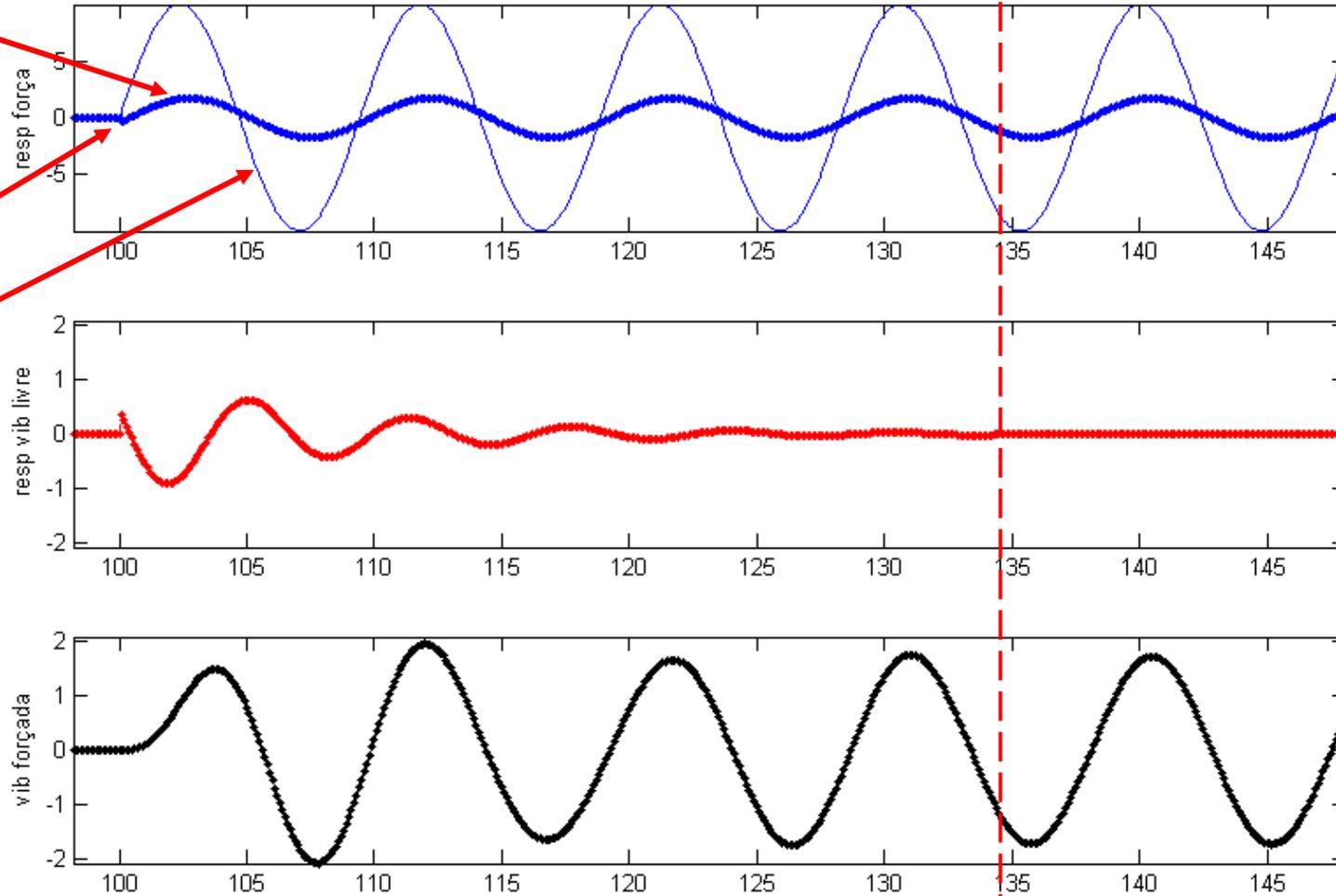
Resposta AMORTECIDA a um carregamento harmônico

resposta forçada

defasagem

força

Vibração livre amortecida

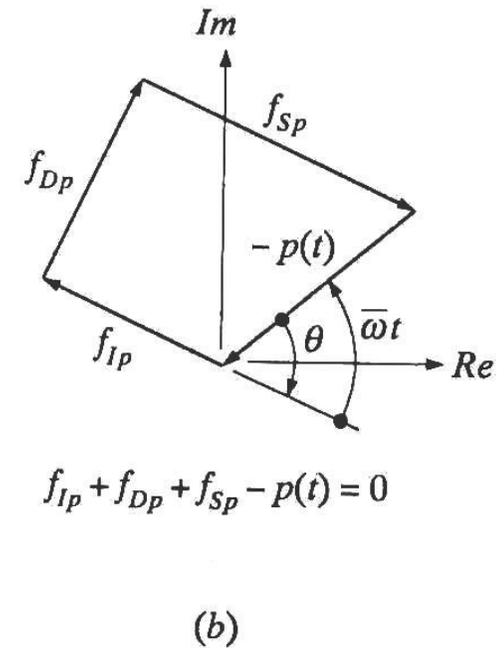
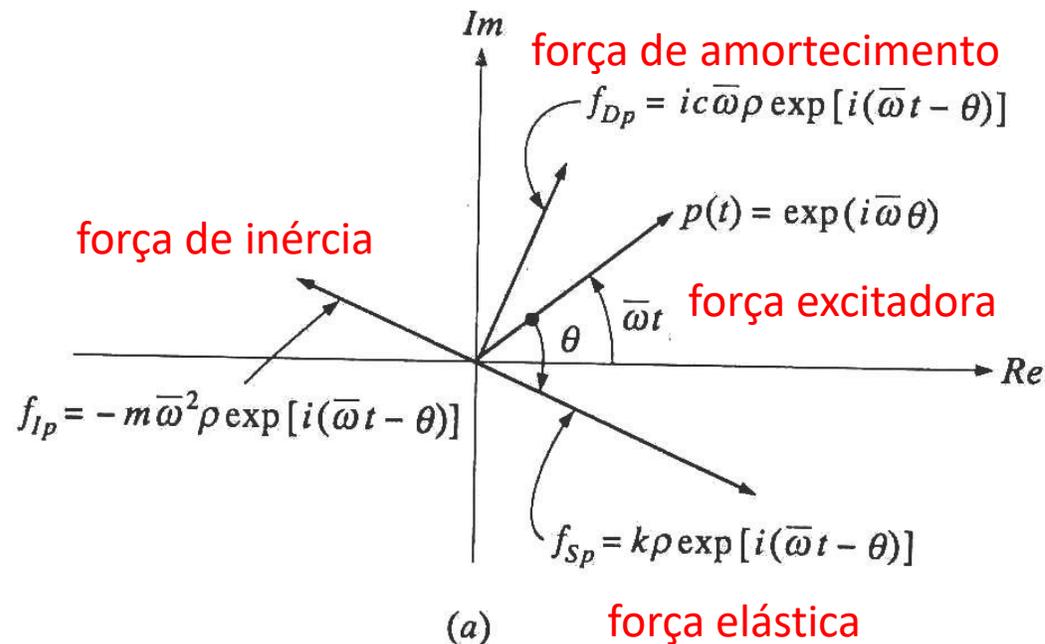
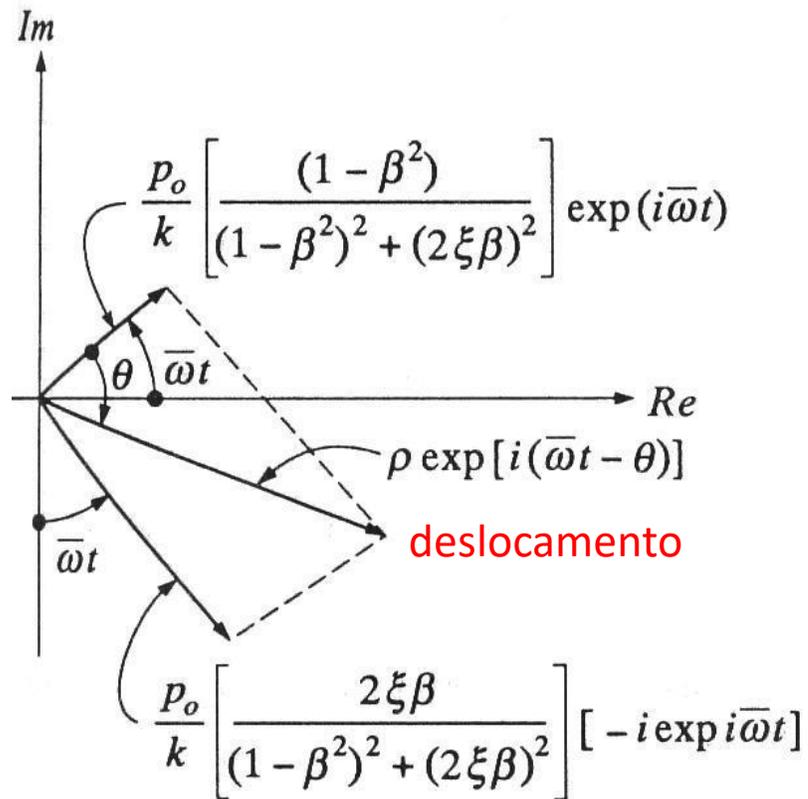


Transiente

Regime permanente

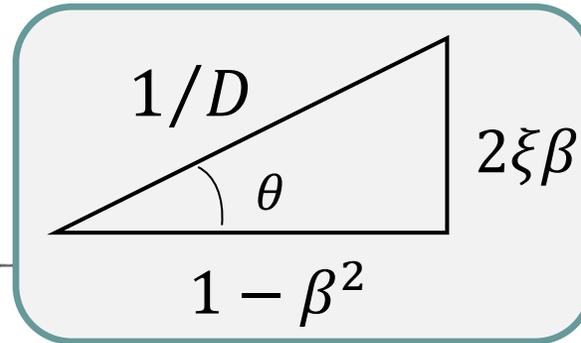
Resposta AMORTECIDA a um carregamento harmônico

$$x_p(t) = \underbrace{\left[\frac{p_0}{k} D \right]}_{\rho} \exp[i(\bar{\omega}t - \theta)]$$

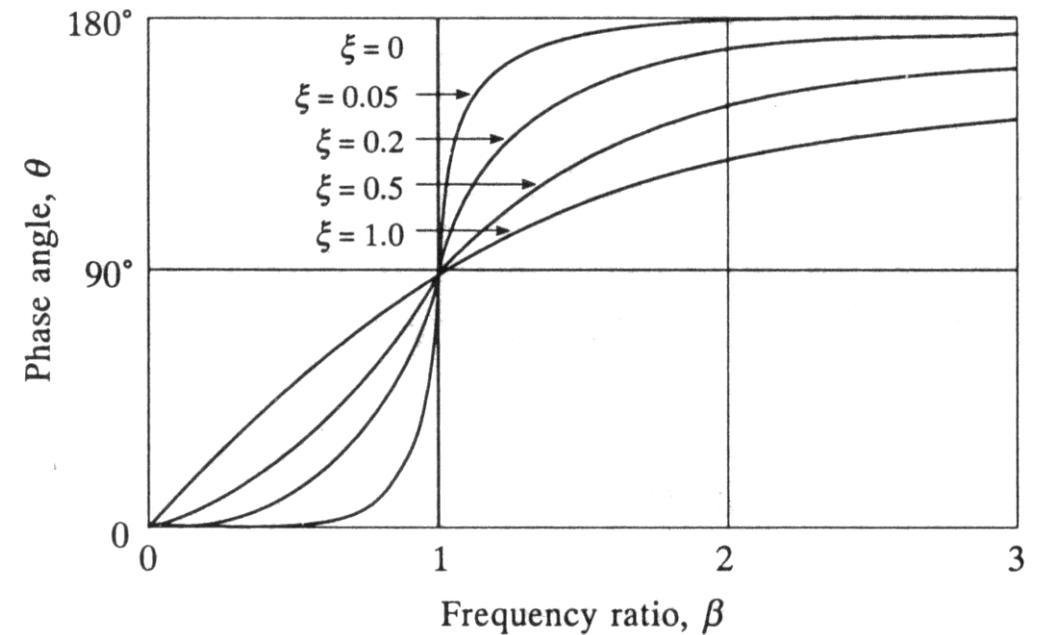
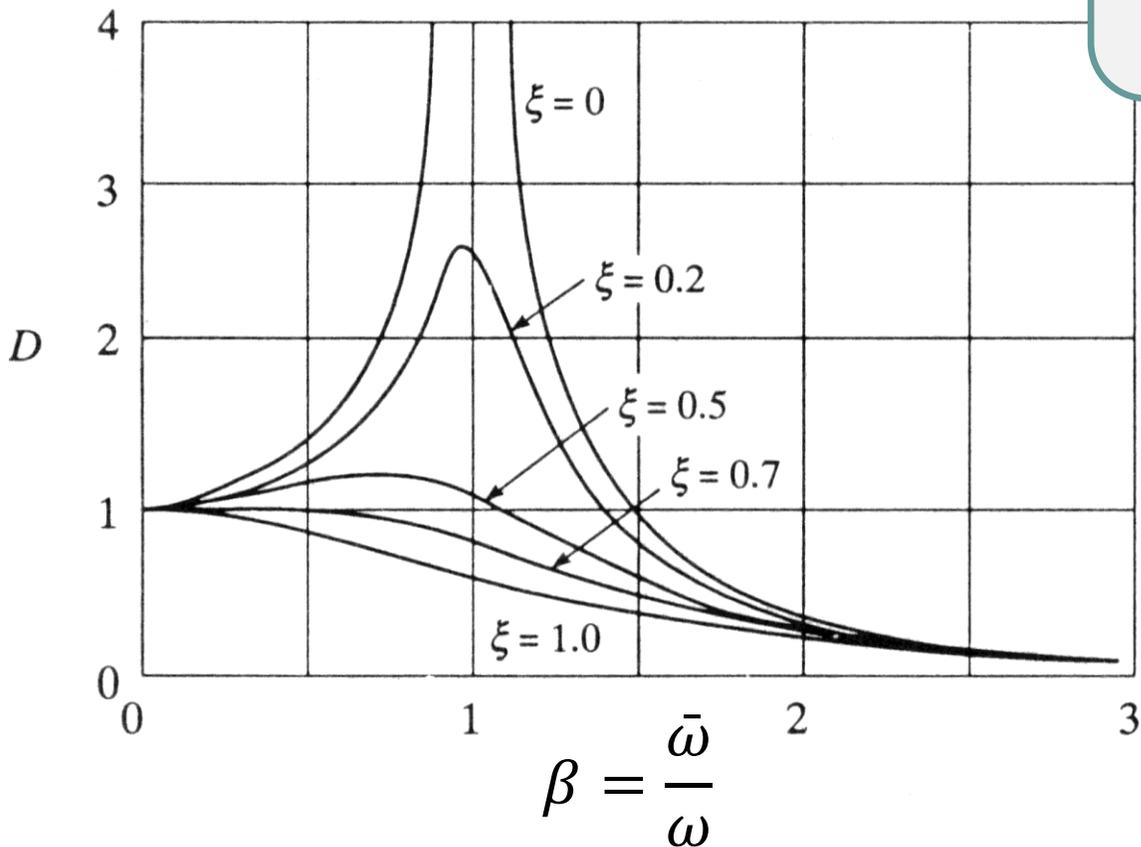


Resposta AMORTECIDA a um carregamento harmônico

$$D = \left[\frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \right]$$



$$\theta = \arctan \left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \right)$$



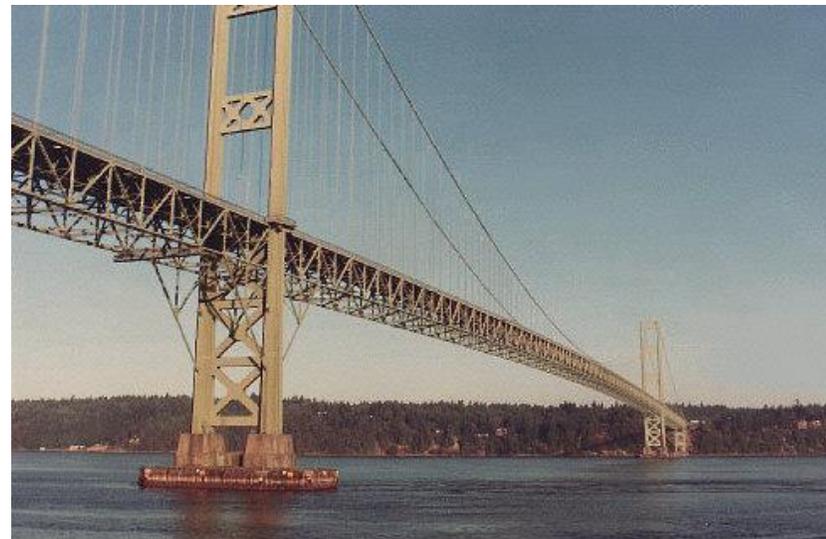
Tacoma Narrows Bridge, WA, 1940 – “Galloping Gertie”



[Collapse of the Tacoma Narrows Bridge](#)



[Why the Tacoma Narrows Bridge Collapsed](#)



Tacoma Bridge,
1950

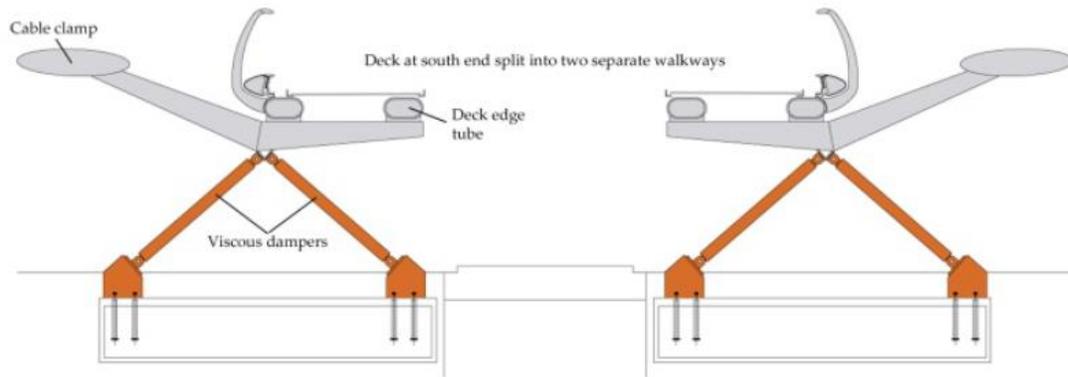
Millenium bridge, Londres, 2000 – “Wobbly Bridge”



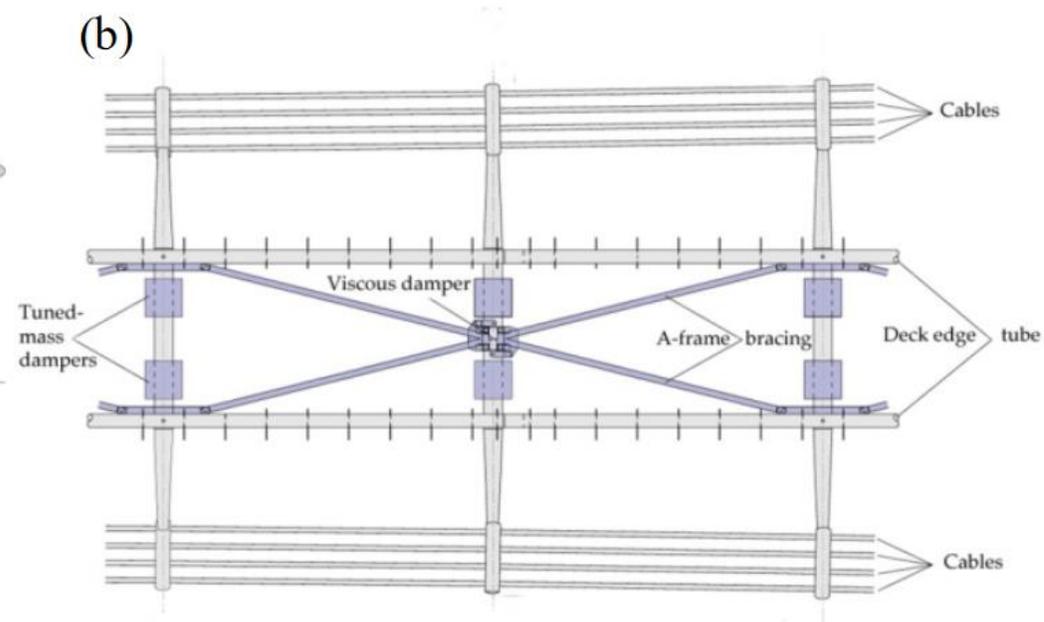
[London Millenium Bridge Opening](#)

Millenium bridge, 2000 – Amortecedores Viscosos

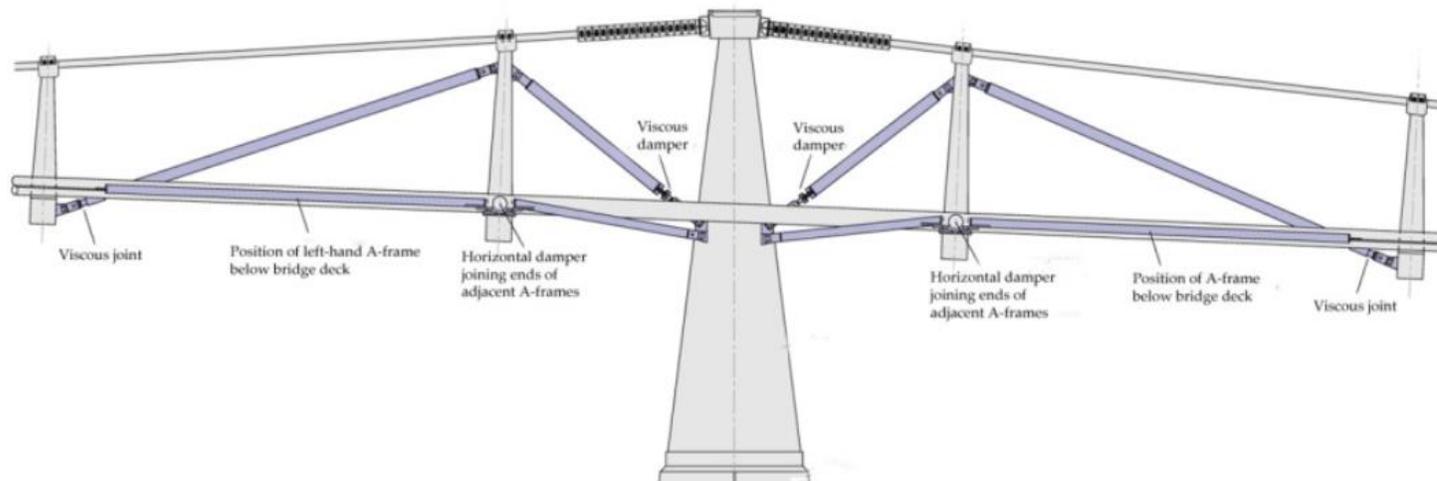
(a)



(b)



(c)



- (a) the ‘vertical dampers’ connected to the south bank
- (b) the A-frame arrangement connecting the horizontal ‘deck dampers’
- (c) a side elevation showing two pairs of ‘pier damper’

Millenium bridge, 2000 – Absorvedores Dinâmicos

(b)



(c)



(b) laterally- and (c) vertically-acting tuned-mass absorbers

NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto

23 - Ações dinâmicas e fadiga

23.3 - Estado-limite de vibrações excessivas

23.4 - Estados-limites últimos provocados por ressonância ou amplificação dinâmica

23.5 - Estado-limite último de fadiga

23.6 - Estados-limites de serviço

Obs: Definição 3.2.1 - estado-limite último (ELU)

estado-limite relacionado ao colapso, ou a qualquer outra forma de ruína estrutural, que determine a paralisação do uso da estrutura.

23.3 - Estado-limite de vibrações excessivas

A análise das vibrações pode ser feita em regime linear no caso das estruturas usuais. Para assegurar comportamento satisfatório das estruturas sujeitas a vibrações, deve-se afastar o máximo possível a frequência própria da estrutura (f) da frequência crítica (f_{crit}), que depende da destinação da respectiva edificação. A condição abaixo deve ser satisfeita:

$$f > 1,2 f_{crit}$$

Tabela 23.1 – Frequência crítica para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas

Caso	f_{crit} Hz
Ginásio de esportes e academias de ginástica	8,0
Salas de dança ou de concerto sem cadeiras fixas	7,0
Passarelas de pedestres ou ciclistas	4,5
Escritórios	4,0
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,5

NBR 8800:2008 – Projeto de estruturas de aço (...)

Anexo L – Vibrações em Pisos

L.1 Considerações gerais

L.1.1 O uso de estruturas de pisos com vãos grandes e amortecimento reduzido pode resultar em vibrações que causem desconforto durante as atividades humanas normais ou causar prejuízo ao funcionamento de equipamentos. Para esse estado-limite de serviço, devem-se utilizar as combinações freqüentes de serviço, dadas em 4.7.7.3.3.

L.1.2 Em nenhum caso a freqüência natural da estrutura do piso pode ser inferior a **3 Hz**.

L.3.2 Nos pisos em que as pessoas caminham regularmente, como os de residências e escritórios, a menor freqüência natural não pode ser inferior a **4 Hz**. Essa condição fica satisfeita se o deslocamento vertical total do piso causado pelas ações permanentes, excluindo a parcela dependente do tempo, e pelas ações variáveis, calculado considerando-se as vigas como biapoiadas e usando-se as combinações freqüentes de serviço, dadas em 4.7.7.3.3, não superar 20 mm.

L.3.3 Nos pisos em que as pessoas saltam ou dançam de forma rítmica, como os de academias de ginástica, salões de dança, ginásios e estádios de esportes, a menor freqüência natural não pode ser inferior a **6 Hz**, devendo ser aumentada para **8 Hz** caso a atividade seja muito repetitiva, como ginástica aeróbica. Essas condições ficam satisfeitas, respectivamente, se o deslocamento vertical total do piso causado pelas ações permanentes, excluindo a parcela dependente do tempo, e pelas ações variáveis, calculado considerando-se as vigas como biapoiadas e usando-se as combinações freqüentes de serviço, dadas em 4.7.7.3.3, não superar 9 mm e 5 mm.