SEÇÃO DE ENSINO DE ENGENHARIA DE FORTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO

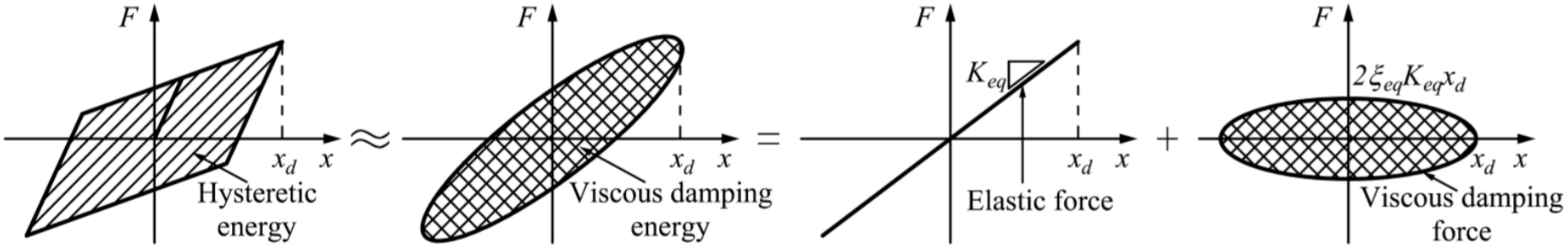
Dinâmica das Estruturas

Aula #2

Vibrações Livres Amortecidas

Prof. Luiz Augusto C. Moniz de Aragão Filho

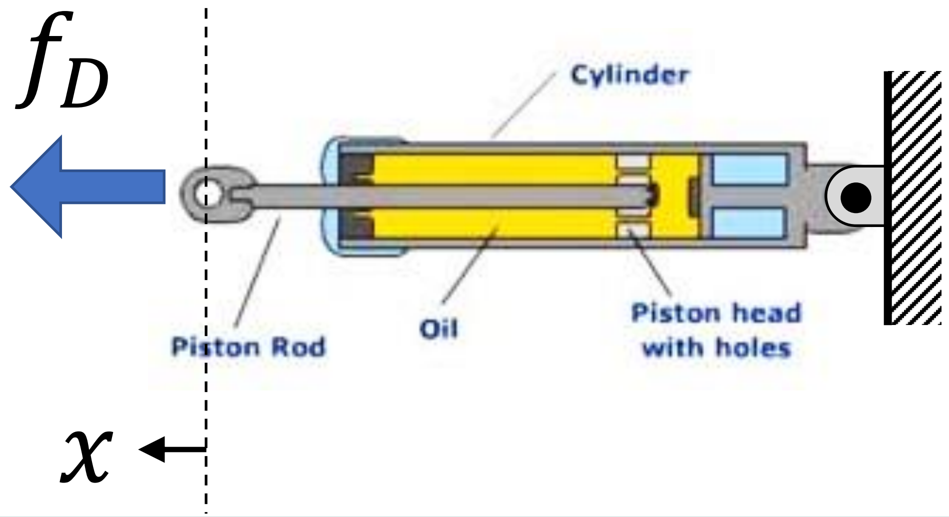
Força de Amortecimento



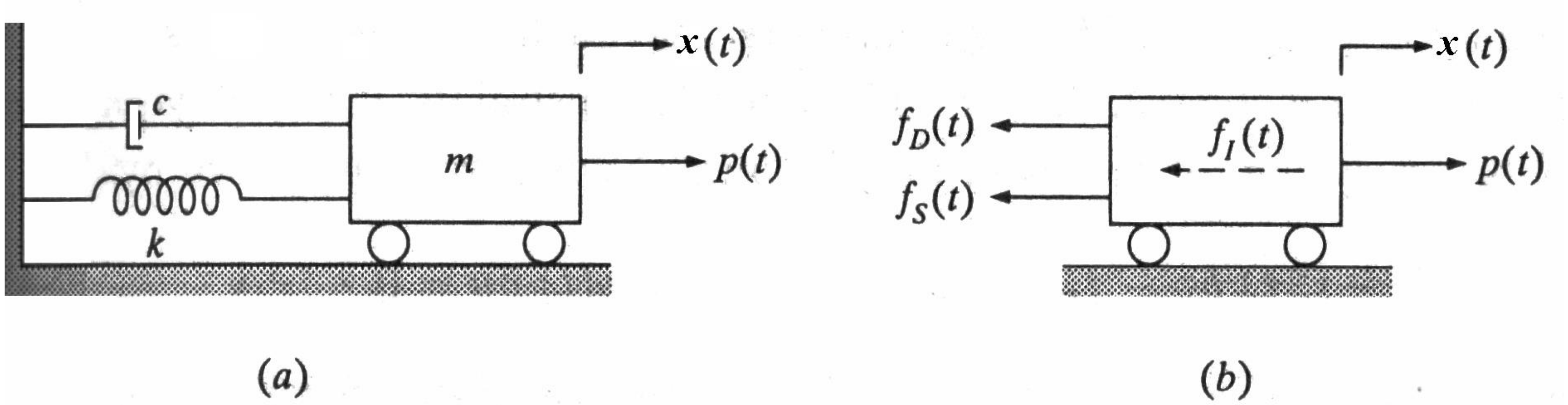
$$f_D = c\,\dot{x}(t)$$

$c \equiv$ *coef. de amortecimento*

$f_D \equiv$ *força de amortecimento viscoso equivalente*



Equação do Equilíbrio Dinâmico



$$f_I + f_D + f_S = p$$

⇒Vibração Livre Amortecida:

$$m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

Vibração Livre Amortecida

$$\ddot{x}(t)+\frac{c}{m}\cdot\dot{x}(t)+\frac{k}{m}\cdot x(t)=0 \qquad \Rightarrow \ddot{x}(t)+2\xi\omega\dot{x}\cdot(t)+\omega^2 x(t)=0$$

$$\text{onde } \omega^2=\frac{k}{m}, \text{ e } \xi=\frac{c}{2m\cdot\omega}$$

$$\Rightarrow x(t)=A\cdot e^{st}$$

Substituindo na equação anterior:

$$s^2+2\xi\omega\cdot s+\omega^2=0$$

$$\Rightarrow s=-\xi\cdot\omega\pm i\omega\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\Rightarrow x(t)=A_1\cdot e^{\left(-\xi\cdot\omega+i\omega\sqrt{1-\xi^2}\right)\cdot t}+A_2\cdot e^{\left(-\xi\cdot\omega-i\omega\sqrt{1-\xi^2}\right)\cdot t}$$

Vibração Livre Amortecida

$$\Rightarrow x(t) = \left[A_1 \cdot e^{\left(i\omega\sqrt{1-\xi^2}\right)\cdot t} + A_2 \cdot e^{\left(-i\omega\sqrt{1-\xi^2}\right)\cdot t} \right] \cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}$$

$\xi = 1$ $\Rightarrow$ radical da equação se anula $\Rightarrow$ duas raízes iguais

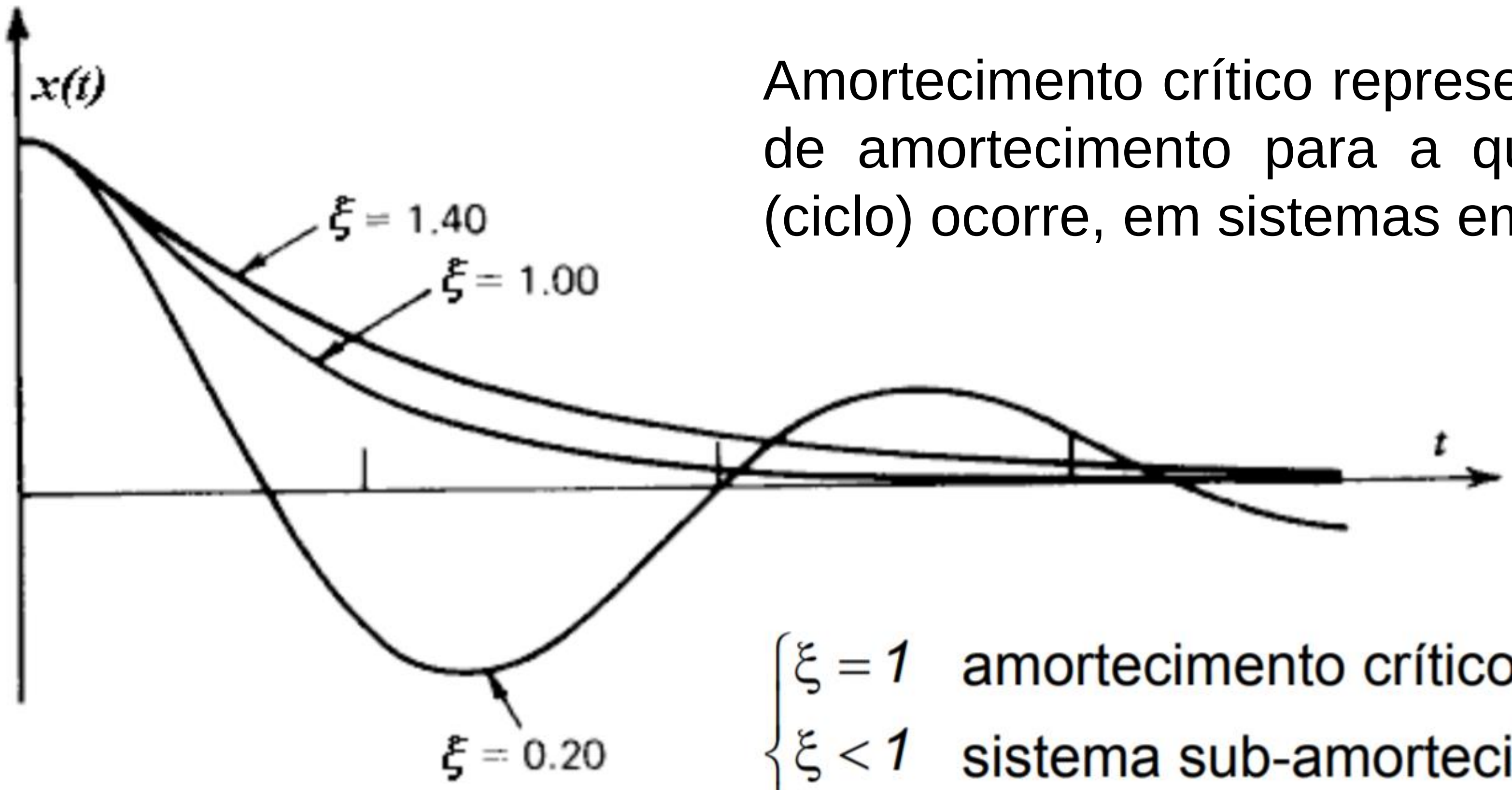
$\Rightarrow$ função <u>real</u>, sem oscilação, tendendo assintoticamente a zero, conforme comanda o fator exponencial $e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}$;

$\Rightarrow \xi = \dfrac{c}{2m\cdot\omega} = 1 \Rightarrow c = c_c = 2m\cdot\omega$ (coeficiente de amortecimento)

$\Rightarrow c_c \equiv$ amortecimento crítico

$\Rightarrow \xi = \dfrac{c}{c_c} \equiv$ taxa de amortecimento

Amortecimento Crítico



Amortecimento crítico representa a menor magnitude de amortecimento para a qual nenhuma oscilação (ciclo) ocorre, em sistemas em vibração livre

$$\begin{cases} \xi = 1 & \text{amortecimento crítico} \\ \xi < 1 & \text{sistema sub-amortecido (estruturas usuais)} \\ \xi > 1 & \text{sistema super-amortecido (automóveis)} \end{cases}$$

Vibração Livre Amortecida

$$x(t) = \left[A_1 \cdot e^{\left(i\omega\sqrt{1-\xi^2}\right)\cdot t} + A_2 \cdot e^{\left(-i\omega\sqrt{1-\xi^2}\right)\cdot t} \right] \cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}$$

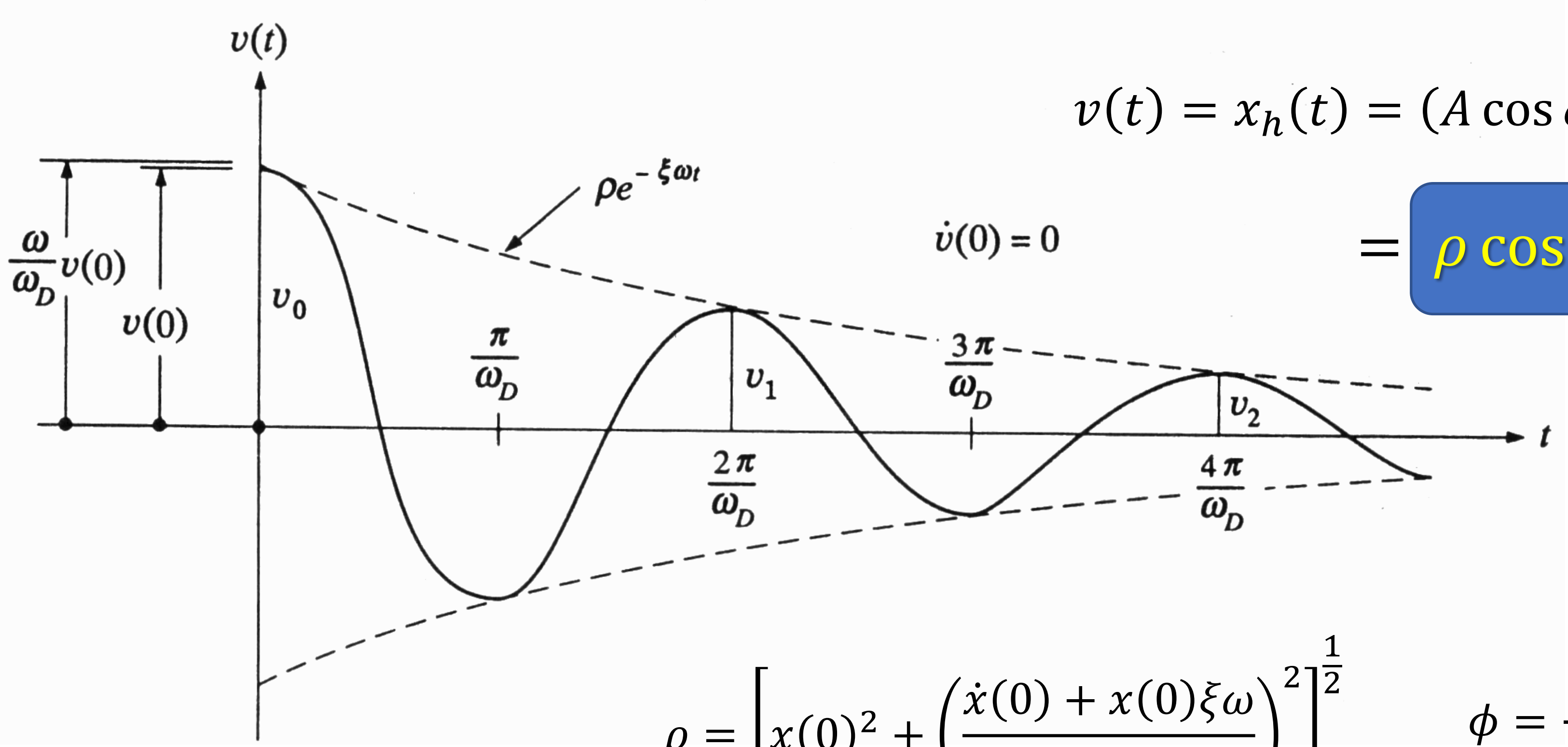
Sistemas sub-amortecidos ($0 < \xi < 1$)

Definindo $\boxed{\omega_D \equiv \omega \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$ como frequência circular amortecida

$$x(t) = \left[A_1 \cdot e^{i\cdot\omega_D\cdot t} + A_2 \cdot e^{-i\cdot\omega_D\cdot t} \right] \cdot e^{-\xi\cdot\omega\cdot t}$$

Vibração Livre Sub-amortecida

Resposta amortecida a um deslocamento e/ou velocidade iniciais



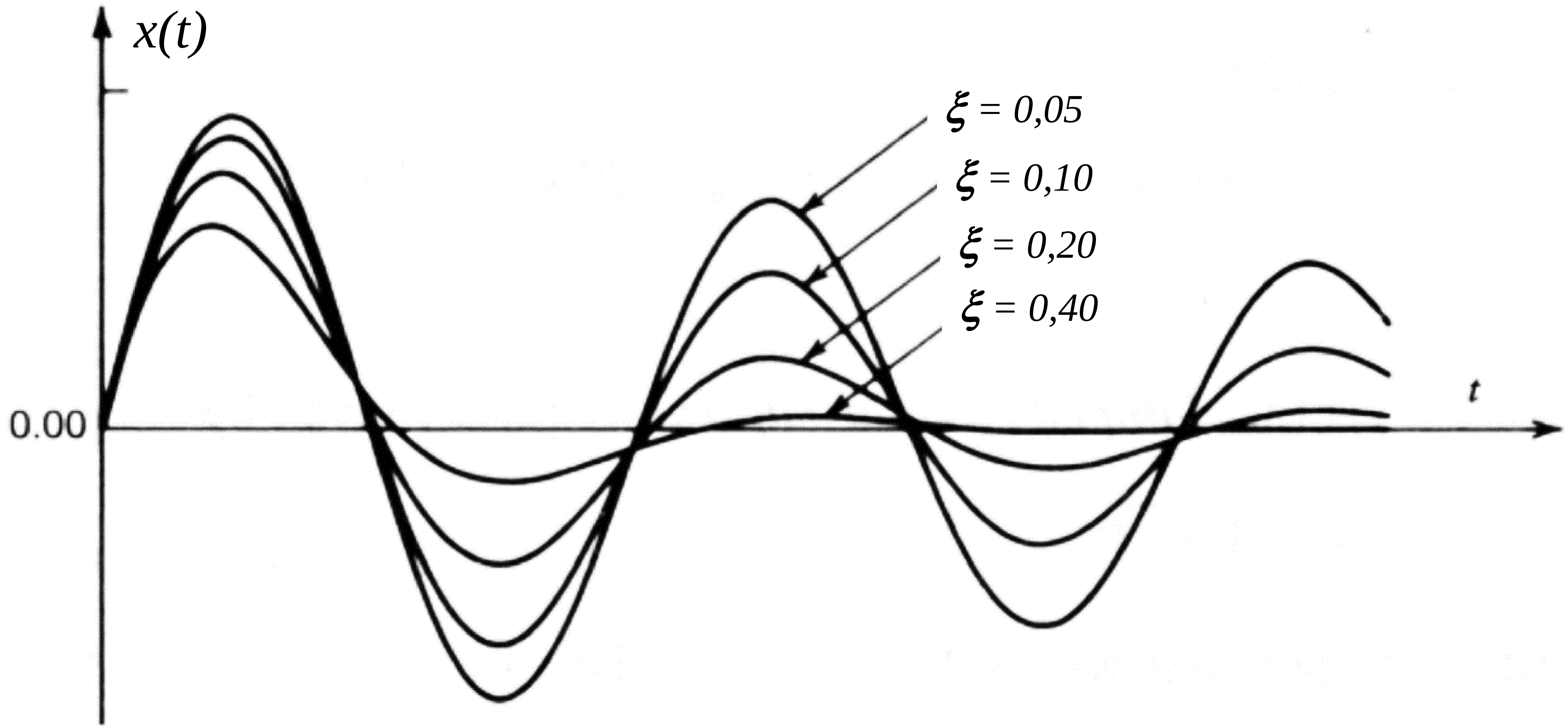
$$v(t) = x_h(t) = (A\cos\omega_D\ t + B\sin\omega_D\ t)\ e^{-\xi\,\omega\,t}$$

$$= \rho\cos(\omega_D\ t + \phi\ )\ e^{-\xi\,\omega\,t}$$

$$\rho = \left[x(0)^2 + \left(\frac{\dot{x}(0) + x(0)\xi\omega}{\omega_D}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi = -\arctan\left(\frac{\dot{x}(0) + x(0)\xi\omega}{\omega_D x(0)}\right)$$

Vibração Livre Sub-amortecida

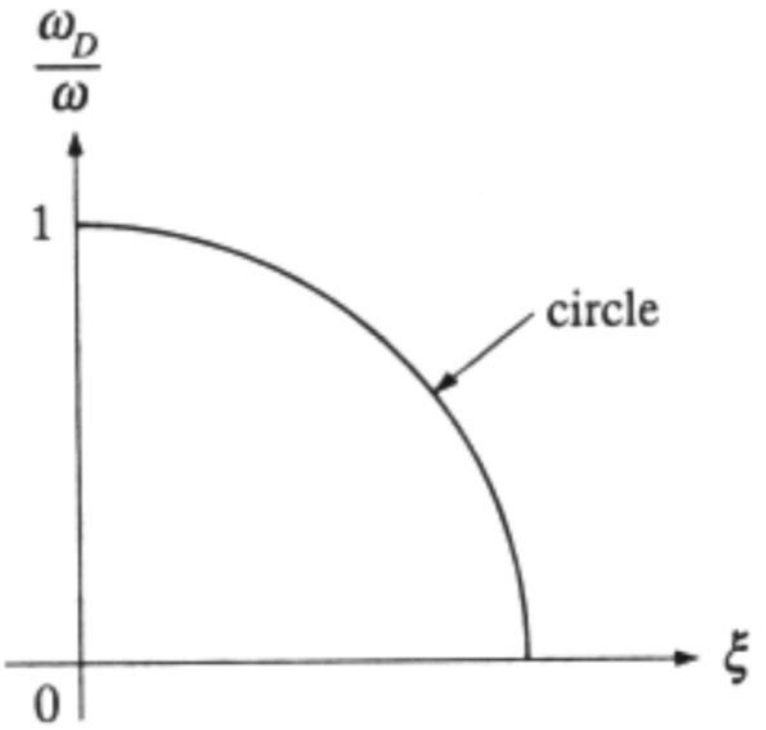


Effect of damping level on free vibration.

Vibração Livre Sub-amortecida

Para os valores usuais de amortecimentos estruturais, $\xi < 20\%$,

$$\Rightarrow \omega_D \cong \omega$$

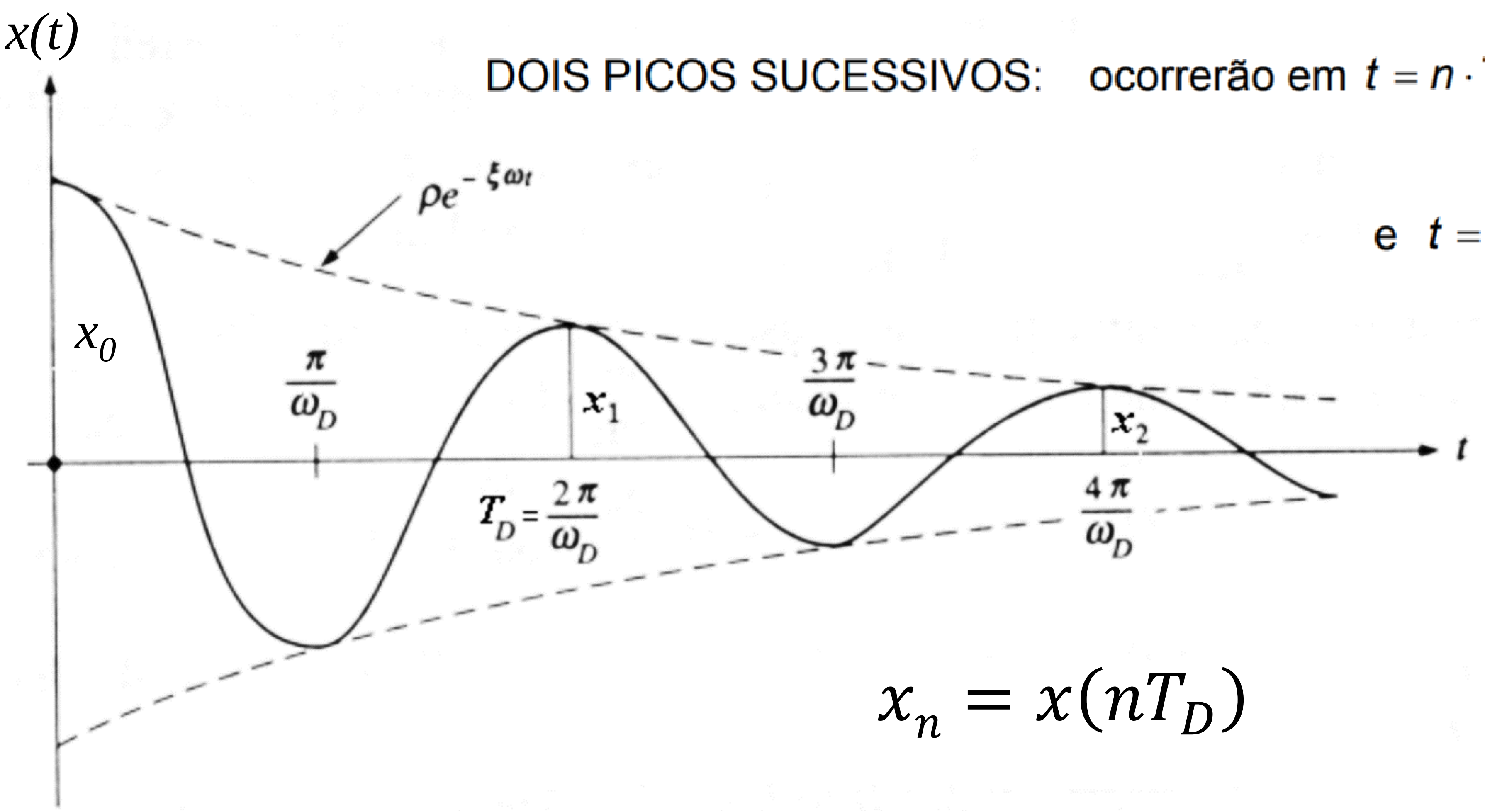


Relationship between frequency ratio and damping ratio.

Estimação do amortecimento

DOIS PICOS SUCESSIVOS: ocorrerão em $t = n \cdot T_D = n\left(\frac{2\pi}{\omega_D}\right)$

e $t = (n+1)\left(\frac{2\pi}{\omega_D}\right)$



$$x_n = x(nT_D)$$

Técnica do decremento logarítmico

$$x_n = x(nT_D) = \rho\, cos(\omega_D \cdot nT_D)\; e^{-\xi\, \omega n T_D} = \rho\cos(n \cdot 2\pi)\; e^{-\xi\, \omega (n\cdot 2\pi)/\omega_D}$$

$$\Longrightarrow x_n = \rho\, e^{-\xi\, \omega (n\cdot 2\pi)/\omega_D}$$

$$\Longrightarrow x_{n+1} = \rho\, e^{-\xi\, \omega (n+1)\cdot 2\pi/\omega_D}$$

$$\Longrightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\rho\, e^{-\xi\, \omega (n\cdot 2\pi)/\omega_D}}{\rho\, e^{-\xi\, \omega (n+1)\cdot 2\pi/\omega_D}} = e^{2\pi\xi\frac{\omega}{\omega_D}}$$

$$\Longrightarrow \delta = ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = 2\pi\xi\, \frac{\omega}{\omega_D} = 2\pi\xi\, \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Longrightarrow \xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}} \approx \frac{\delta}{2\pi}$$

Técnica do decremento logarítmico

NA EQ. DO MOVIMENTO: $\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\xi \omega T_D}$

CONSIDERANDO DOIS PICOS SEPARADOS POR *m* CICLOS:

$$\Rightarrow \frac{x_n}{x_{n+m}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} \cdots \frac{x_{n+m-1}}{x_{n+m}} = \left(e^{\xi \omega T_D}\right)^m = e^{m \xi \omega T_D}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{1}{m} \cdot \ln \frac{x_n}{x_{n+m}}}$$

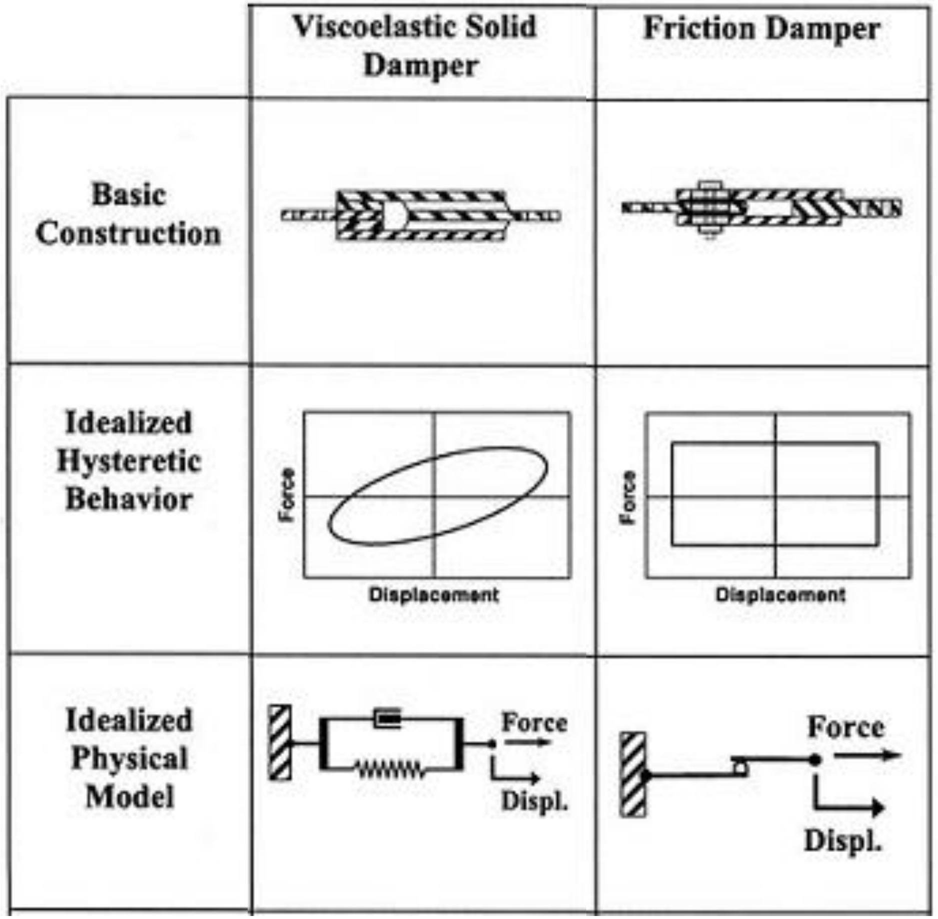
Valores usuais de amortecimento (constitutivo)

	damping ratio ζ		
Construction type	min.	mean	max.
Reinforced concrete	0.008	0.013	0.020
Prestressed concrete	0.005	0.010	0.017
Composite	0.003	0.006	--
Steel	0.002	0.004	--

Table 1.1: Common values of damping ratio ζ for footbridges

Ref.: *Vibration Problems in Structures – Practical Guidelines*, 1995, Bachmann, H. (Editor).

Dispositivos especiais de amortecimento



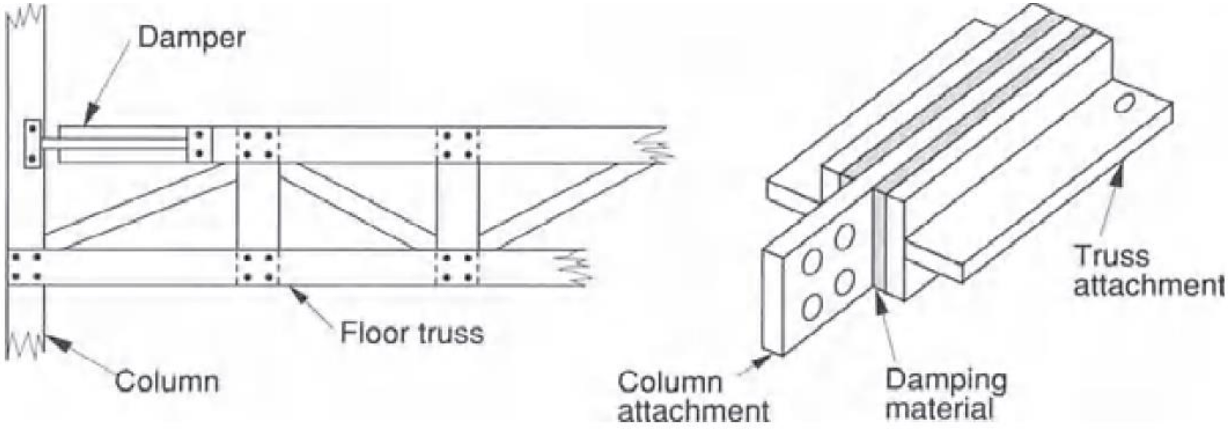


Figure 3.4: Friction dampers in the load bearing structure of the World Trade Centre in Manhattan (New York) [H.2]

Ref.: *Vibration Problems in Structures – Practical Guidelines*, 1995, Bachmann, H. (Editor).

Dispositivos especiais de amortecimento

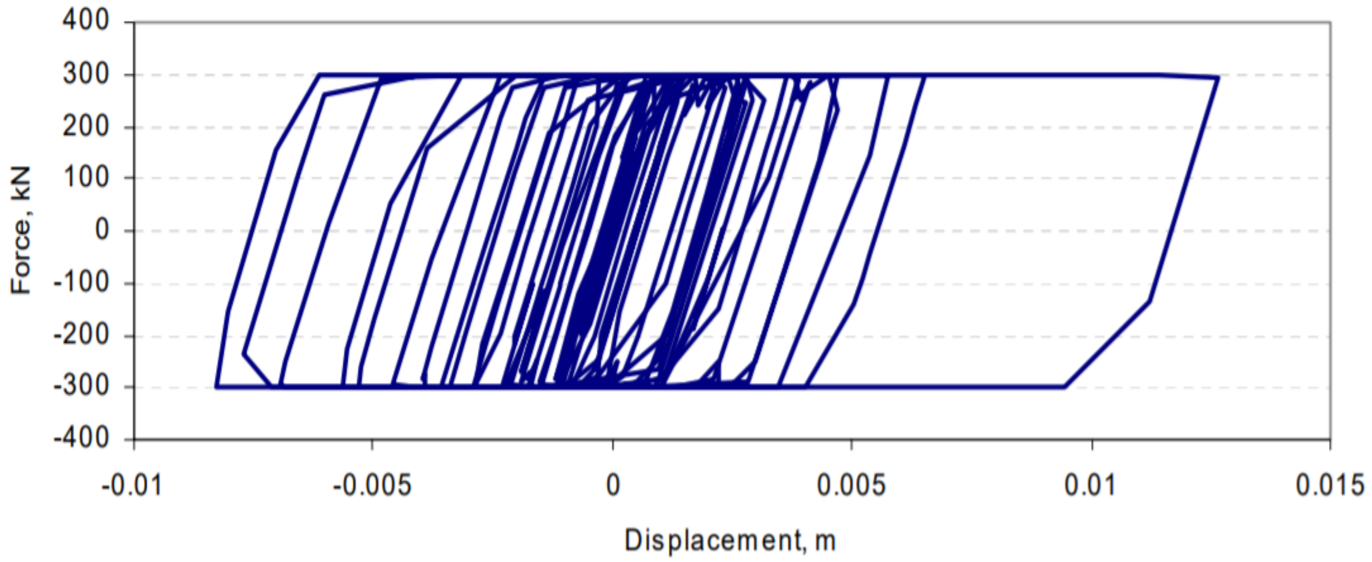
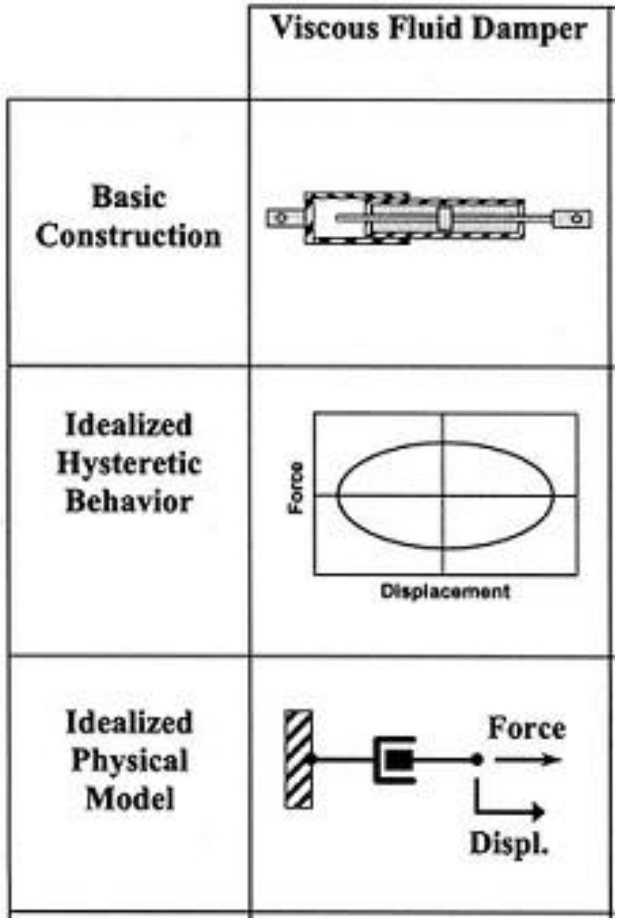


Figure 9. Hysteretic loop of friction damper

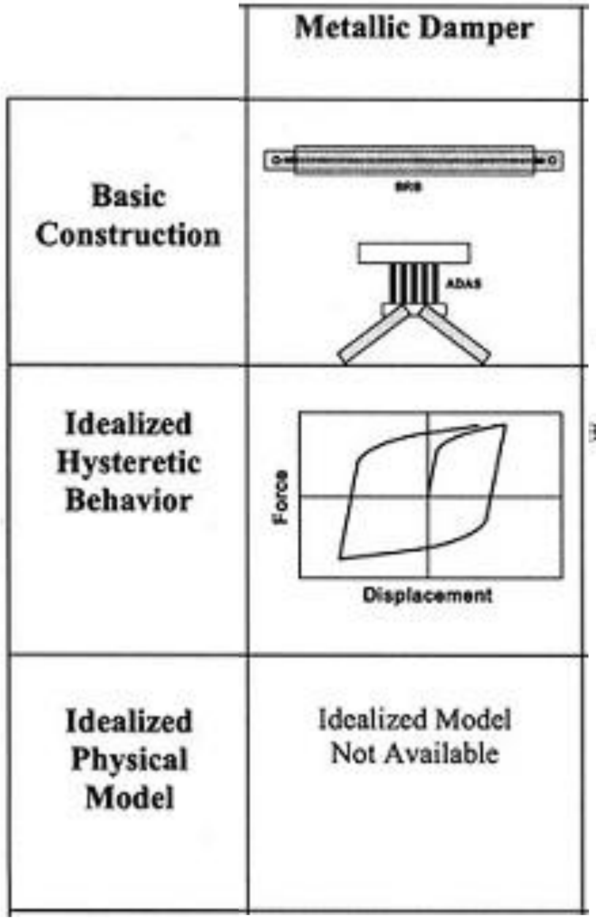
Friction damper in single diagonal bracing

Ref: FRICTION DAMPERS FOR SEISMIC UPGRADE OF ST. VINCENT HOSPITAL, OTTAWA, 2004 , 13th World Conference on Earthquake Engineering Vancouver, Canada, MALHOTRA, A. *et al*.

Dispositivo de Amortecimento Viscoso



Dispositivo de Amortecimento Metálico



	Metallic Damper
Basic Construction	BRB ADAS
Idealized Hysteretic Behavior	Force / Displacement
Idealized Physical Model	Idealized Model Not Available