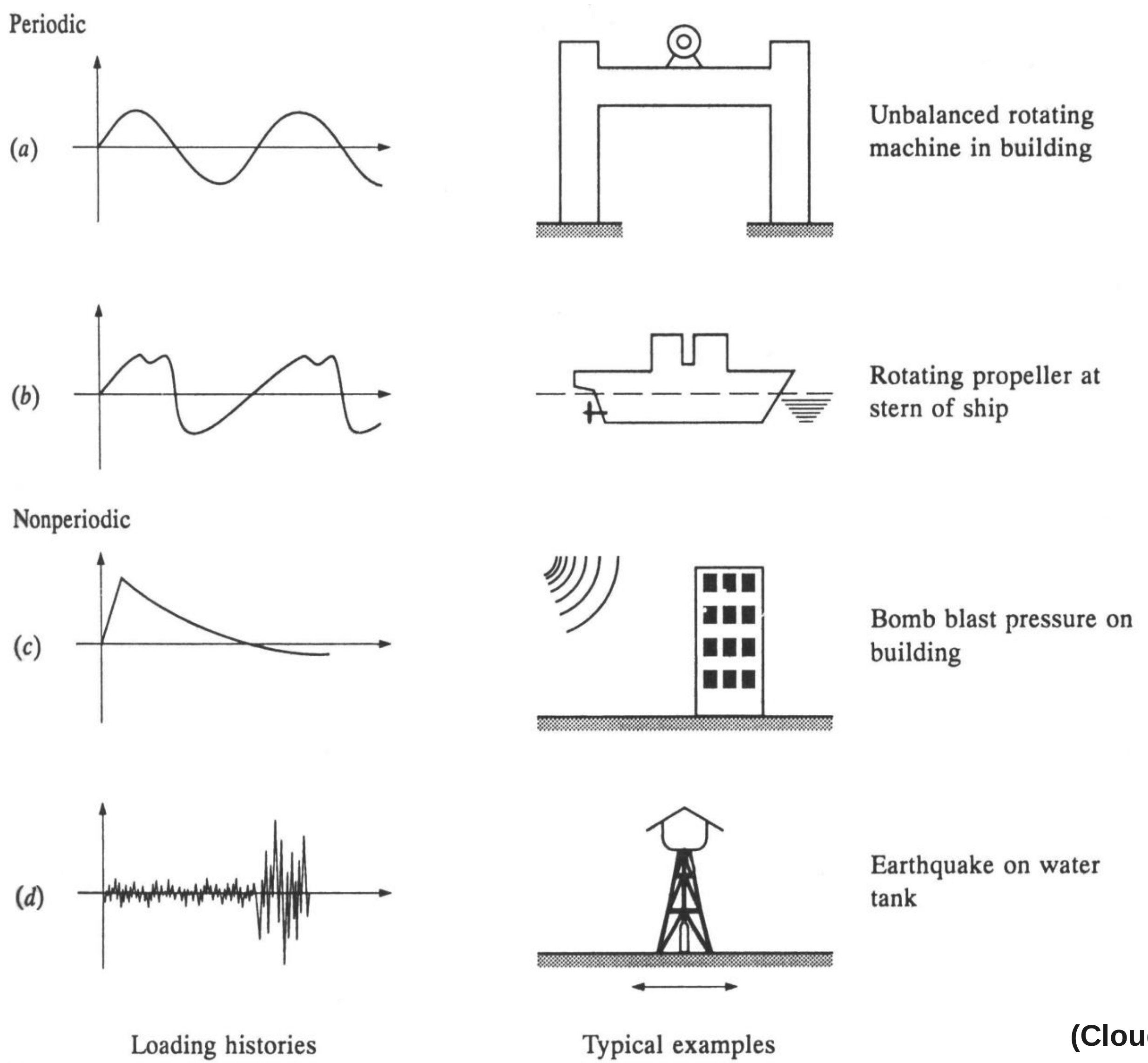
Instituto Militar de Engenharia
Engenharia de Fortificação e Construção

Dinâmica das Estruturas

Aula #1

Prof. Luiz A. Moniz de Aragão Filho

Carregamentos Dinâmicos X Tipos de Estruturas



(Clough e Penzien, 1993)

Movimento Oscilatório

Uma partícula está oscilando quando se move periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio:

- movimento de um pêndulo é oscilatório;
- um peso amarrado na extremidade de uma mola esticada oscila ao ser abandonado;
- os átomos num sólido estão em movimento oscilatório (ou vibracional);
- os elétrons numa antena executam rápidas oscilações.

Movimento Periódico

Movimento repetido em intervalo de tempos iguais

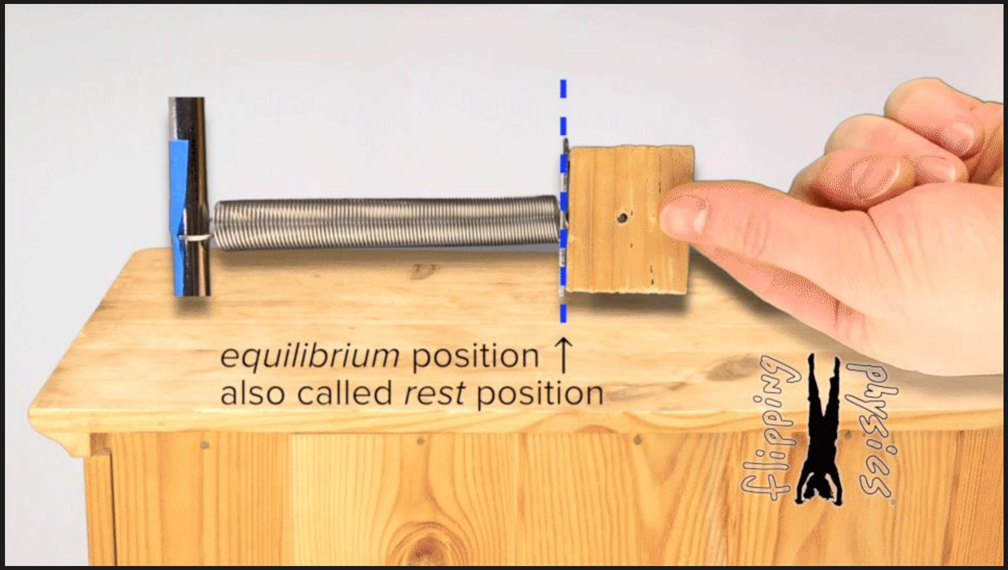
Movimento Harmônico Simples (MHS)

$\Rightarrow$ A força restauradora é atrativa e o centro de atração é o ponto O;

$\Rightarrow$ A força restauradora sempre aponta para a origem O (ponto de equilíbrio);

$\Rightarrow$ A força restauradora é proporcional e de sentido contrário ao deslocamento.

$$F = m\,a = -k\,x$$



Movimento Harmônico Simples (MHS)

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega^2} x = 0$$

$$x = A \ \mathrm{sen} \ (\omega t + \alpha)$$

x é o deslocamento em relação à origem

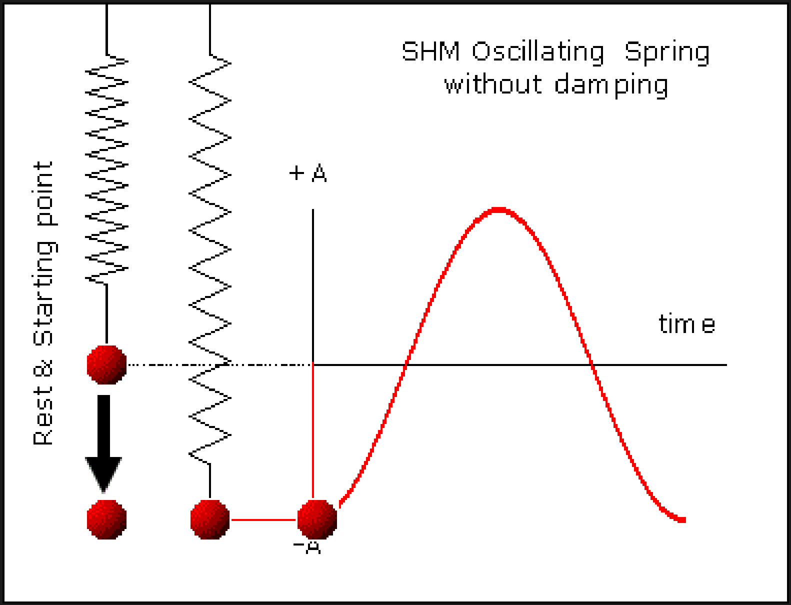
A é a amplitude ou deslocamento máximo do MHS;

$(\omega t + \alpha)$ é a fase do movimento;

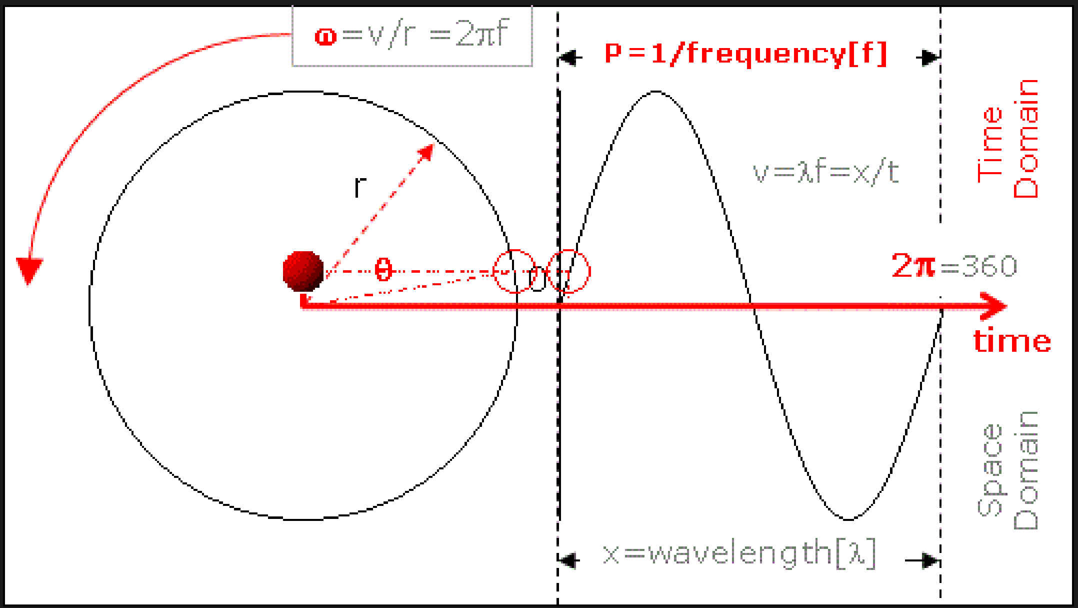
$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ é a frequência angular do movimento;

α é a fase inicial;

Movimento Harmônico Simples (MHS)



Representação no domínio do tempo



Representação fasorial

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Gráficos do deslocamento (x), velocidade (v) e aceleração (a) em função do tempo no MHS:

$$x = A\ \text{sen}\ (\omega t + \alpha)$$

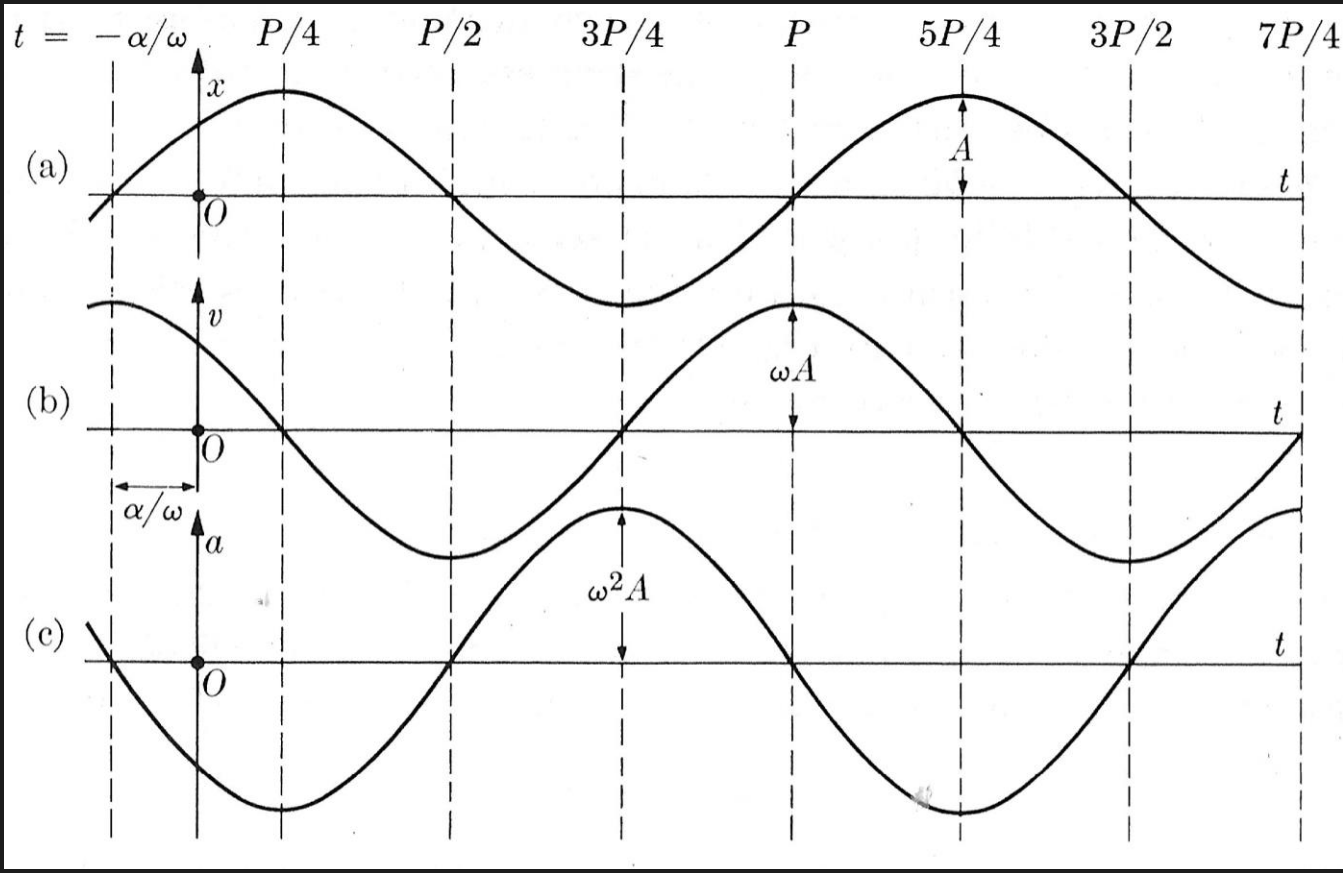
A velocidade da partícula em MHS é:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha)$$

A aceleração fica igual a:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\ \text{sen}\ (\omega t + \alpha)$$

$$= -\omega^2 x$$



No MHS a aceleração é sempre proporcional e de sentido oposto ao deslocamento

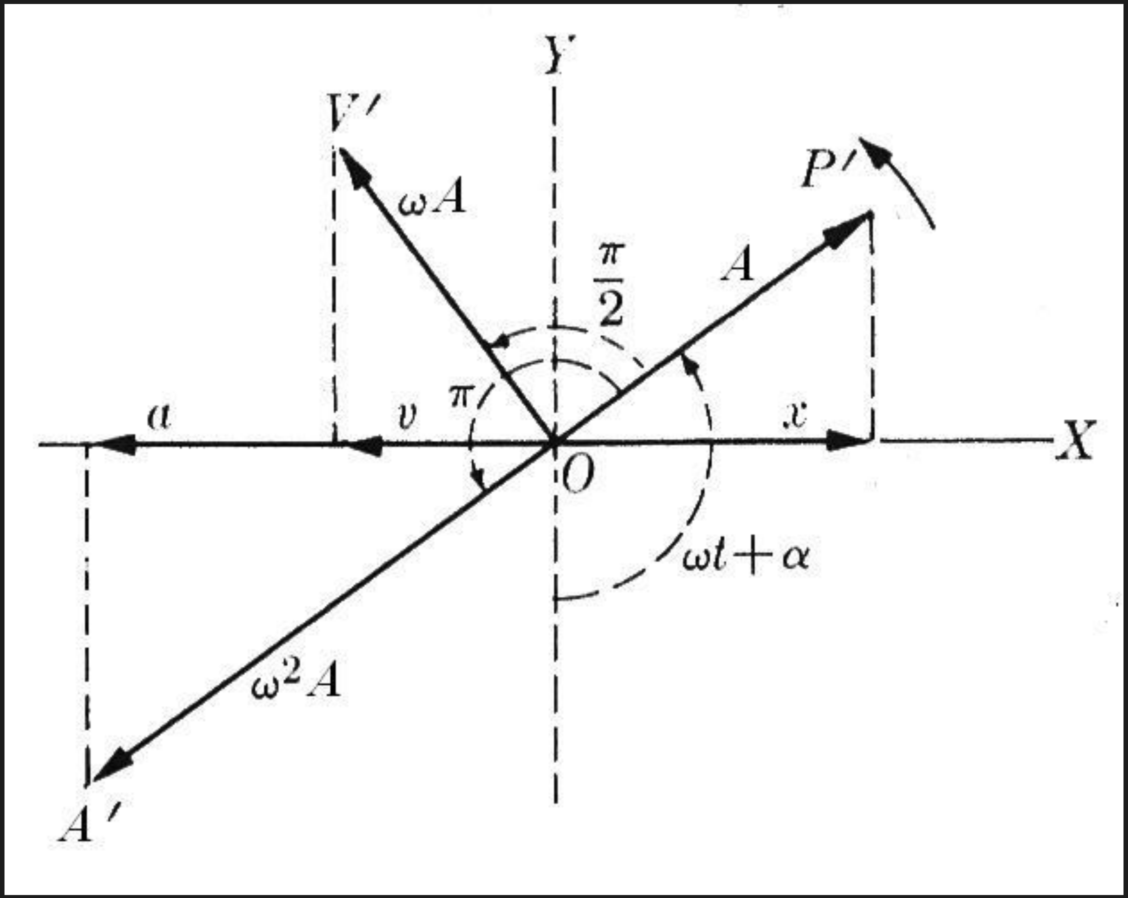
Movimento Harmônico Simples (MHS)

Representação do deslocamento (x), velocidade (v) e aceleração (a) no MHS pela projeção de vetores girantes defasados no eixo das abscissas:

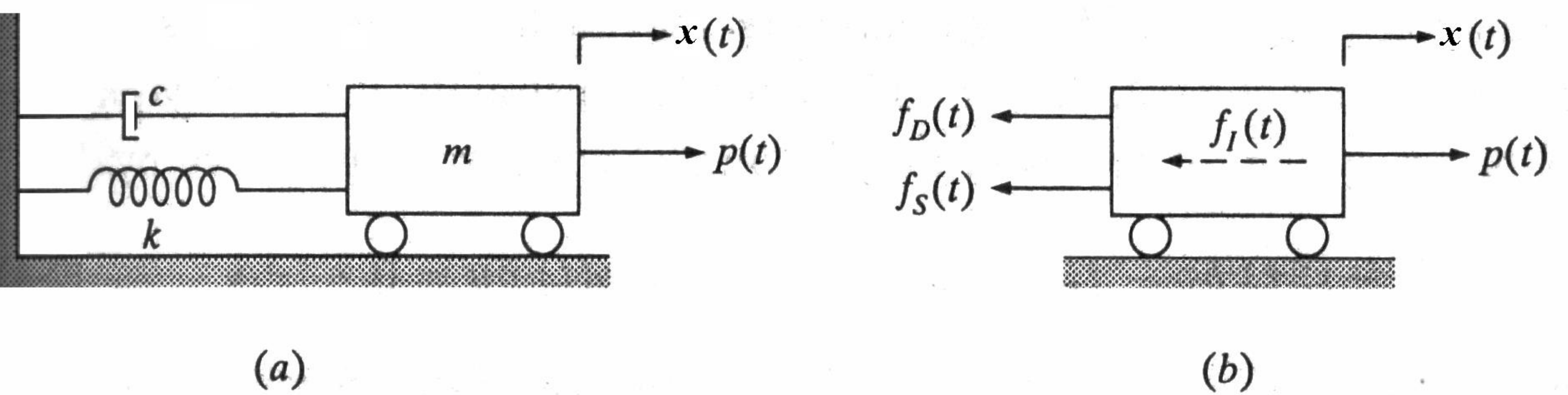
$$x = A\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$v = \omega A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$a = -\omega^2 A\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$$



Sistema Dinâmico Básico de 1GL



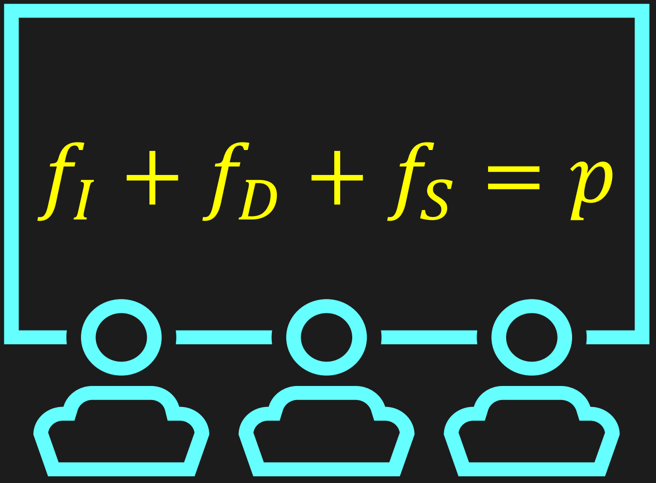
(a) (b)

$$F = p - f_S - f_D = m\,a = f_I$$

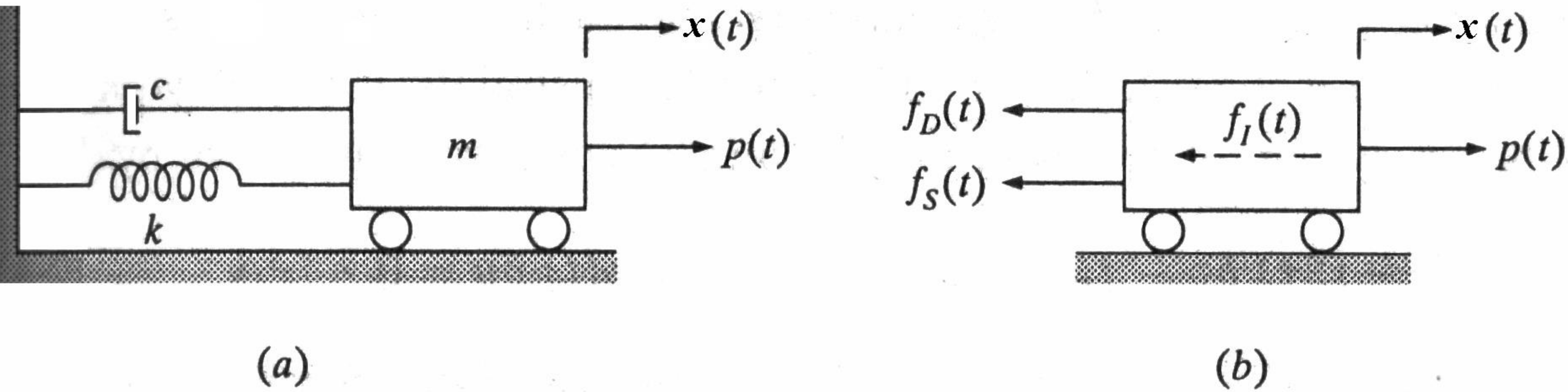
$$\Longrightarrow p - f_S - f_D - f_I = 0$$

Equação do equilíbrio dinâmico de D'Alembert

$$f_I + f_D + f_S = p$$



Sistema Dinâmico Básico de 1GL



- Grandezas físicas envolvidas:

  MASSA (m)

  PROPRIEDADES ELÁSTICAS (k)

  AMORTECIMENTO (c)

  FORÇA EXTERNA DINÂMICA (p(t))

- Equação de equilíbrio:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t)$$

FORÇAS DE INÉRCIA: $f_I(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$

FORÇAS DE AMORTECIMENTO: $f_D(t) = c \cdot \dot{x}(t)$ (Viscoso)

FORÇAS ELÁSTICAS: $f_S(t) = k \cdot x(t)$

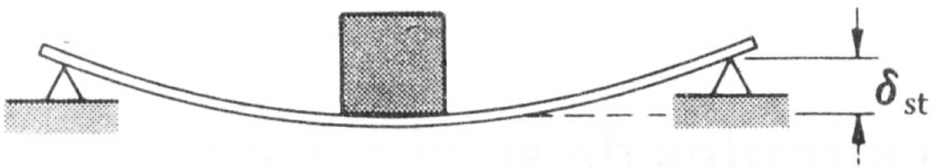
$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = p(t)}$$

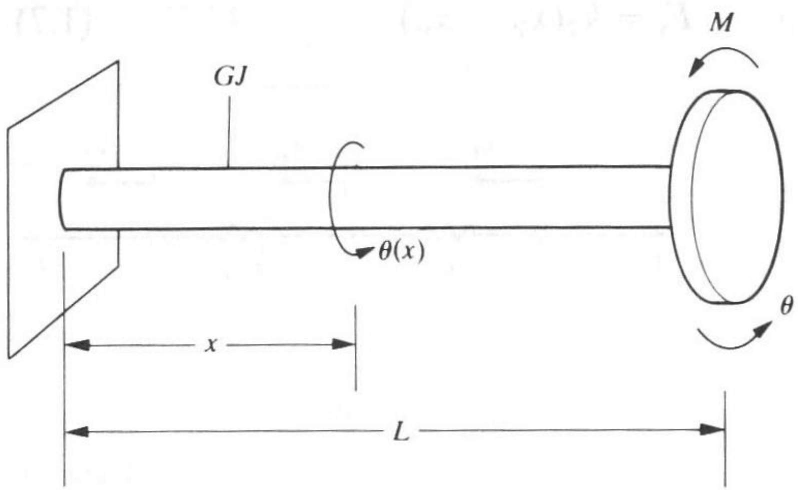
- Princípio de d'Alembert:

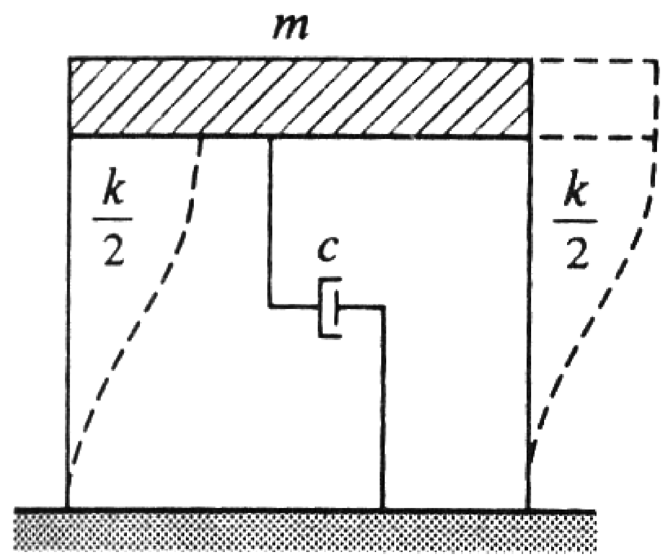
> "A massa m desenvolve uma força de inércia proporcional a sua aceleração e oposta a ela."

Sistema Dinâmico Básico

Outros sistemas de 1 grau de liberdade (GL):

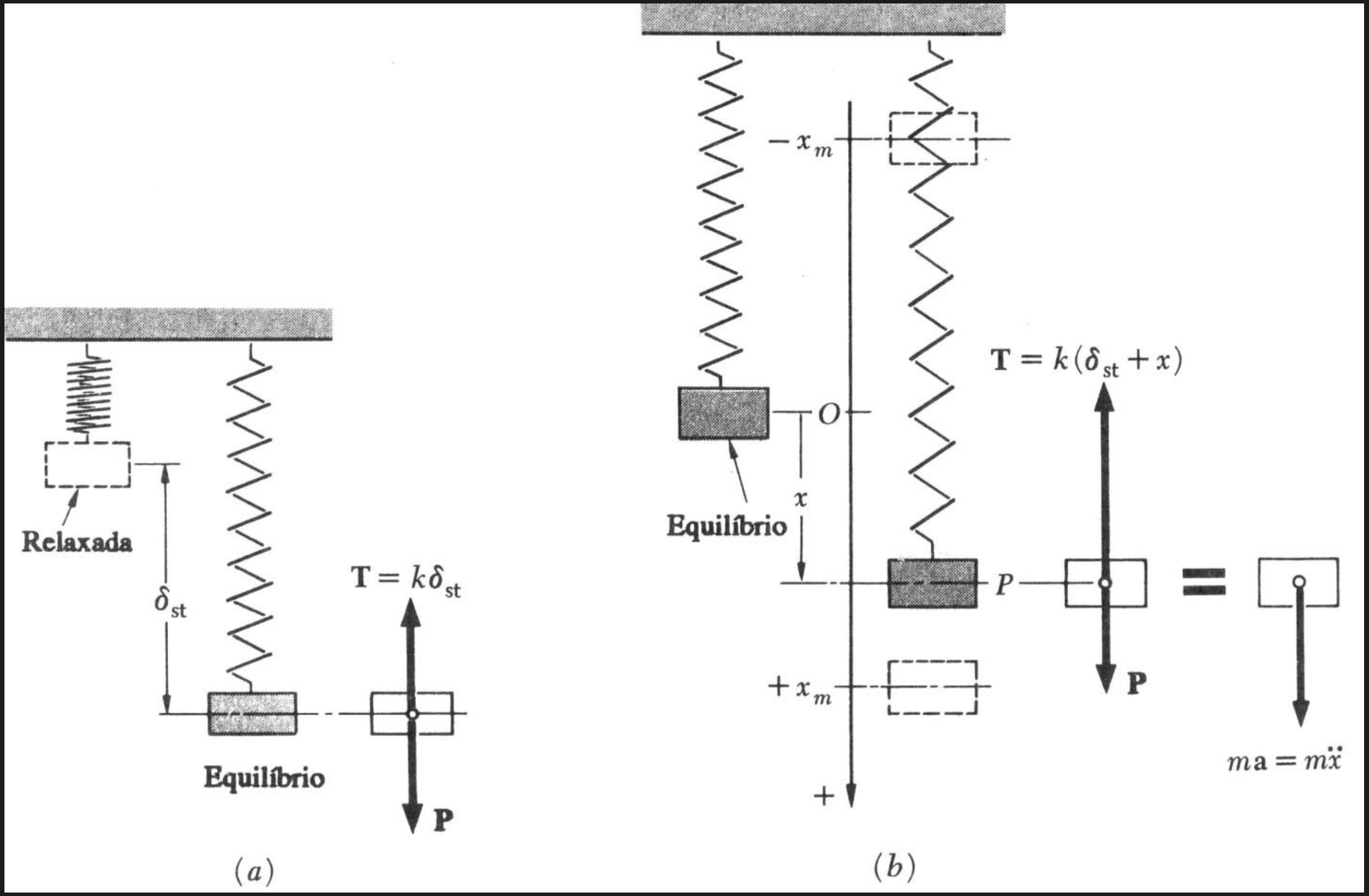






MHS e Forças Gravitacionais

Em sistemas mecânicos elásticos (uma mola, por exemplo) a força de restituição que surge ao se deformá-lo produz movimento harmônico simples.



Equação do movimento:

$$\begin{cases} F = ma \\ T - P = -kx \end{cases}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore$$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

⇒ A equação do movimento expressa em relação à posição de equilíbrio estático não é afetada por forças gravitacionais.

Vibração Livre Não-amortecida

$$m\,\ddot{x}(t) + \cancel{c\,\dot{x}(t)} + k\,x(t) = \cancel{p(t)}$$

VIBRAÇÕES LIVRES: $p(t) = 0$

VIBRAÇÕES NÃO-AMORTECIDAS: $c \to 0$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0}$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0 \quad \Rightarrow \ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0 \qquad \text{onde } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot e^{st}$$

Vibração Livre Não-amortecida

Substituindo na equação anterior:

$$s^2 + \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow s = \pm i\omega$$

$$\Rightarrow x(t) = A_1 \cdot e^{i\omega t} + A_2 \cdot e^{-i\omega t}$$

Onde A_1 e A_2 são constantes de integração, dependendo dos valores iniciais de deslocamento $x(0)$ e velocidade $\dot{x}(0)$.

$$\Rightarrow x(t) = A_1 \cdot e^{i\omega t} + A_2 \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow x(t) = A_1 \cdot (\cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t) + A_2 \cdot (\cos\omega t - i\,\mathrm{sen}\,\omega t)$$

$$\Rightarrow x(t) = \cos\omega t(A_1 + A_2) + \mathrm{sen}\,\omega t \cdot i(A_1 - A_2)$$

$$\Rightarrow x(t) = \cos\omega t \cdot (A \cdot \cos\phi) + \mathrm{sen}\,\omega t \cdot (A \cdot \mathrm{sen}\,\phi)$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot (\cos\omega t \cdot \cos\phi + \mathrm{sen}\,\omega t \cdot \mathrm{sen}\,\phi)$$

$$\boxed{\Rightarrow x(t) = A \cdot \cos(\omega t - \phi)}$$

Vibração Livre Não-amortecida

$$x_h(t) = A_1 \cos\omega\ t + A_2 \sin\omega\ t$$

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

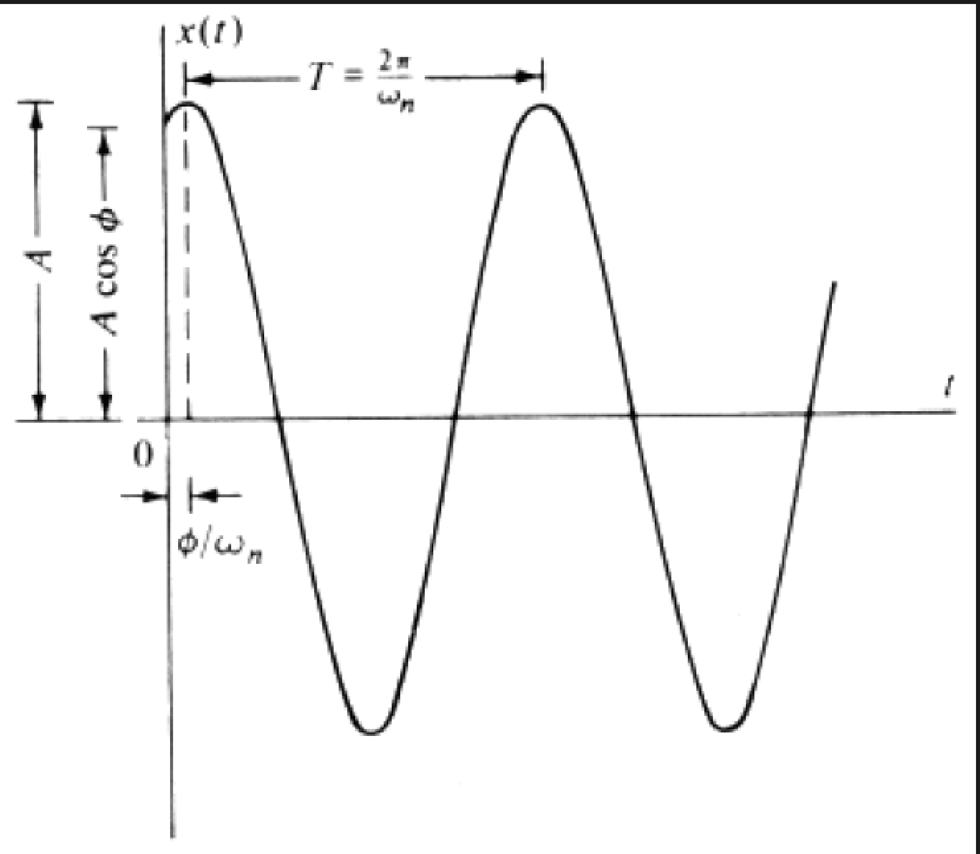
AMPLITUDE DO MOVIMENTO: $A = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right]^2}$

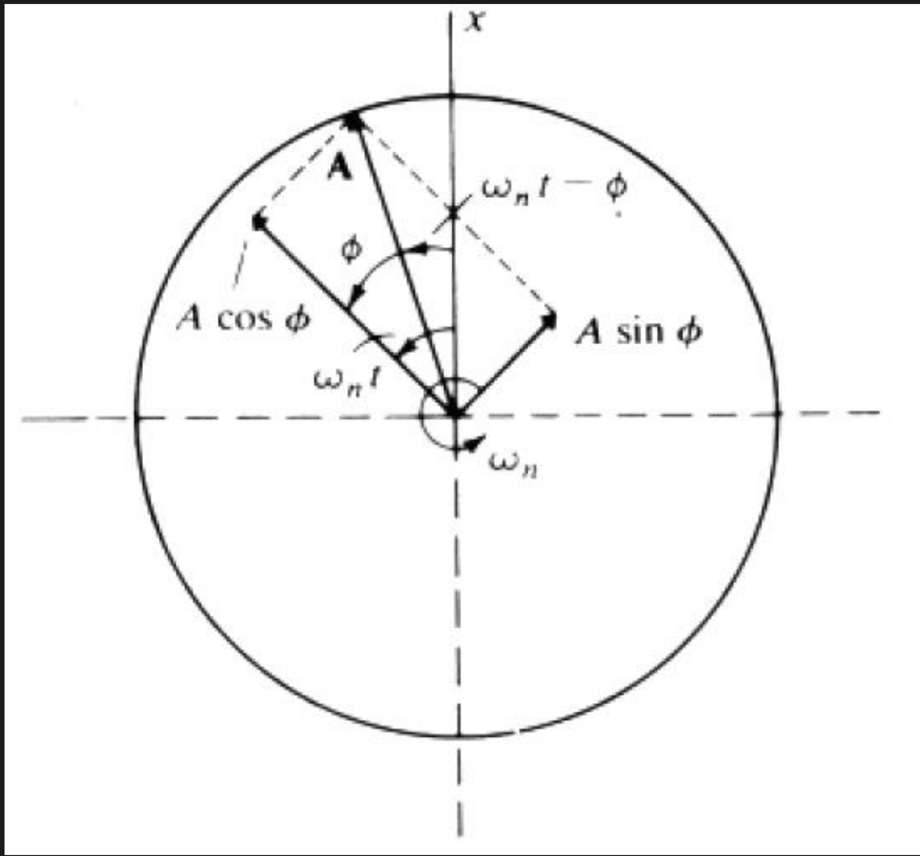
ÂNGULO FASE: $\phi = arctg\left[\frac{-\dot{x}(0)}{\omega \cdot x(0)}\right]$

O sistema realiza oscilação harmônica simples (OHS ou MHS) com frequência $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

O termo ω é conhecido como frequência natural, pois, quando colocado em movimento através de condições iniciais não-nulas de deslocamento e/ou velocidade, livre de carregamentos e sem amortecimento, sempre oscilará com a mesma frequência ω.

Vibração Livre Não-amortecida





Sistema de 1GL

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

m = 200 g
rigidez k

m = 150 g
rigidez k

Sistema 1 GL

Sistema com infinitos GL