

# **ANÁLISE DE CAMADA LIMITE TURBULENTA TRIDIMENSIONAL EM PÁS DE TURBINAS HIDRÁULICAS / TRIDIMENSIONAL TURBULENT BOUNDARY LAYER ANALYSIS ON HYDRAULIC TURBINE ROTOR BLADES**

MARCOS DAVID BLOCH\* & JOSÉ CARLOS CESAR AMORIM‡

\**Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Departamento de Energia, FEG – UNESP – Guaratinguetá  
12500-000 Guaratinguetá, SP, Brasil – E-mail: mbloch@feg.unesp.br*

‡*IME – Instituto Militar de Engenharia, Praia Vermelha  
22290-270 Rio de Janeiro, RJ, Brasil – E-mail: jcamorim@ime.eb.br*

## **Abstract**

A numerical analysis has been developed for calculating viscous flows over arbitrary surfaces by solving the tridimensional turbulent boundary-layer equations. The governing equations are written in a general nonorthogonal coordinate system. The inviscid properties are obtained from the surface Euler equations. A simple algebraic model for Reynolds turbulent stresses is used to close the set of equations. The resulting equations are discretized and approximated by a two-point finite-difference numerical scheme. The procedure developed in this paper is validated for some standard test cases and applied for turbine rotor blades.

## **Keywords**

*camada limite/boundary layer; análise numérica/numerical method; escoamento turbulento 3-D/3-D turbulent flow; diferenças-finitas/finite difference, turbomáquinas/turbomachinery.*

## **1. INTRODUÇÃO**

Os métodos baseados na solução numérica das equações de Navier-Stokes não permitem o tratamento, de maneira eficaz e precisa, das camadas limites que se desenvolvem junto às superfícies arbitrárias tridimensionais devido às limitações da discretização impostas pela memória e velocidade de cálculo dos computadores atuais. Uma técnica eficaz, rápida e precisa para estudar estes escoamentos é a modelagem e análise de camada limite tridimensional.

No presente trabalho, um algoritmo foi desenvolvido para o cálculo de escoamentos viscosos sobre superfícies arbitrárias baseado na solução das equações de camada limite tridimensional e turbulenta. Para melhor representar as curvaturas das superfícies, um sistema de coordenadas curvilíneas não-ortogonais de superfície é utilizado.

As propriedades da camada limite fazem com que a escolha da malha seja dificultada se o escoamento for estudado nas variáveis físicas, sendo interessante utilizar-se uma transformação de variáveis nas equações de maneira a captar o crescimento da camada limite e mantê-la aproximadamente constante no espaço transformado. Uma generalização ao caso tridimensional das transformações de Levy-Lees foi escolhida para este estudo.

O cálculo de camada limite tridimensional faz intervir algumas propriedades e dificuldades que não estão presentes no caso bidimensional. Um cuidado especial deve ser tomado quando da formulação diferencial, de maneira a se considerar o princípio de zona de dependência e de

influência, que são funções da natureza matemática das equações de camada limite tridimensional. A definição dos domínios de dependência e influência ditam as condições de entrada e de contorno a associar às equações de camada limite.

Um modelo de turbulência deve ser introduzido para representar os novos termos introduzidos pelo tensor de Reynolds e fechar o sistema de equações. Neste estudo, um modelo de turbulência algébrico do tipo comprimento de mistura é utilizado.

As equações diferenciais parciais que governam o desenvolvimento da camada limite são, então, discretizadas e aproximadas por um esquema de diferenças finitas de segunda ordem. O sistema de equações algébricas não-lineares acopladas resultante é linearizado pelo método de Newton e o sistema tridiagonal por blocos obtido pode ser facilmente resolvido.

O procedimento numérico proposto no presente trabalho é validado pela sua aplicação em alguns casos testes disponíveis na literatura. Posteriormente, ele é aplicado ao escoamento em pás de turbinas hidráulicas.

## 2. EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE

Considerando-se a superfície de um corpo arbitrário definido em um sistema de coordenadas cartesianas de referência  $(y^1, y^2, y^3)$ , o sistema de coordenadas para a camada limite é definido sobre a superfície do corpo por um sistema de coordenadas curvilíneas não-ortogonais  $(x^1, x^2, x^3)$ . Em geral, as linhas de  $x^1 = \text{const.}$  e  $x^2 = \text{const.}$  são não-ortogonais com um ângulo local  $\vartheta$  entre elas, e a terceira coordenada  $x^3$  é retilínea e normal à superfície. O sistema  $(x^1, x^2, x^3)$  é um sistema de coordenadas localmente monoclinico. Ele é unicamente relacionado com o sistema de coordenadas cartesianas; as relações são dadas pelos vetores de base do sistema  $x^j$ .

As equações de camada limite em um sistema de coordenadas curvilíneas não-ortogonais para um escoamento tridimensional, turbulento e permanente, incluindo os termos relativos às forças de Coriolis e centrífuga tem a seguinte forma:

Equação da Continuidade

$$(k_{01}v^1)_{,1} + (k_{02}v^2)_{,2} + (k_{03}v^3)_{,3} = 0 \quad (1)$$

Equação da Q.D.M. em  $x^1$

$$\begin{aligned} & \frac{v^1}{h_1}(v^1)_{,1} + \frac{v^2}{h_2}(v^1)_{,2} + v^3(v^1)_{,3} + k_{11}(v^1)^2 + k_{12}v^1v^2 + k_{13}(v^2)^2 + k_{14}\omega^3v^1 + k_{15}\omega^3v^2 + \\ & (\omega)^2 R [k_{16}(R)_{,1} + k_{17}(R)_{,2}] = \frac{1}{\rho} \left\{ k_{16}(p)_{,1} + k_{17}(p)_{,2} + \left[ \mu(v^1)_{,3} - \overline{\rho v^1 v^3} \right]_{,3} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Equação da Q.D.M. em  $x^2$

$$\frac{v^1}{h_1}(v^2)_{,1} + \frac{v^2}{h_2}(v^2)_{,2} + v^3(v^2)_{,3} + k_{21}(v^1)^2 + k_{22}v^1v^2 + k_{23}(v^2)^2 + k_{24}\omega^3v^1 + k_{25}\omega^3v^2 +$$

$$(\omega)^2 \mathbf{R} [k_{26}(\mathbf{R})_{,1} + k_{27}(\mathbf{R})_{,2}] = \frac{1}{\rho} \left\{ k_{26}(p)_{,1} + k_{27}(p)_{,2} + \left[ \mu(v^2)_{,3} - \overline{\rho v^2 v^3} \right]_{,3} \right\} \quad (3)$$

Além destas equações, tem-se ainda algumas relações adicionais que estão definidas abaixo.

Relações para o Cisalhamento e Velocidade Total

$$\tau_{13} = \mu(v^1)_{,3} - \overline{\rho v^1 v^3} = (\mu + \mu_t)(v^1)_{,3} \quad \text{e} \quad \tau_{23} = \mu(v^2)_{,3} - \overline{\rho v^2 v^3} = (\mu + \mu_t)(v^2)_{,3} \quad (4)$$

$$v_T^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + 2 v^1 v^2 \cos \vartheta \quad (5)$$

No conjunto de equações apresentado acima, as velocidades  $v^1$ ,  $v^2$  e  $v^3$  são as componentes contravariantes físicas da velocidade e são normalizadas com a velocidade do escoamento não-perturbado  $v_\infty$ . As distâncias são adimensionalizadas por um comprimento de referência  $L_{ref}$ , as pressões pela pressão dinâmica  $\rho v_\infty^2$ . As distâncias e as velocidades normais à superfície são também multiplicadas pela raiz quadrada do número de Reynolds de referência  $Re = \rho_\infty v_\infty L_{ref} / \mu_{ref}$ . O efeito da turbulência sobre o escoamento principal é incorporado nas equações pela viscosidade turbulenta  $\mu_t$ . Nas equações (1)-(3) os fatores métricos  $k_{mn}$  são funções do tensor métrico da superfície. A notação indicial é usada para representar as derivadas, por exemplo:  $(v^1)_{,i} \equiv \partial v^1 / \partial x^i$ .

### 3. TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Para as camadas limites tridimensionais é interessante utilizar-se transformações nas equações de maneira a manter o crescimento da camada limite no espaço computacional aproximadamente constante e permitir o cálculo de uma família de soluções de similaridade para ser usada como condições de entrada para o início do cálculo. Amorim (1991) estudou algumas das transformações usadas na solução das equações de camada limite tridimensional.

Neste trabalho, a transformação proposta por Vatsa (1985) é utilizada. Esta transformação é uma extensão natural das variáveis de Levy-Lees aos escoamentos tridimensionais, as quais podem captar o crescimento da camada limite seja ela laminar ou turbulenta. As variáveis independentes são transformadas conforme as relações abaixo:

$$\zeta = \int_0^{x^1} q_0 dx_1 \quad , \quad \xi = x^2 \quad \text{e} \quad \eta = \frac{v_e^1 h_2}{\sqrt{2\zeta}} \int_0^{x^3} \rho dx^3 \quad (6)$$

$$\text{onde:} \quad q = \rho v_e^1 h_1 h_2^2 (\mu + \mu_t)_e \quad (7)$$

$q_0$  é o valor de  $q$  para  $x^2 = 0$ , e o índice  $e$  refere-se ao contorno externo da camada limite.

### 4. PROPRIEDADES DAS EQUAÇÕES

O conjunto de equações apresentado na Seção 2 consiste de três equações diferenciais parciais acopladas, duas das quais são de segunda ordem e uma de primeira ordem. As propriedades dessas equações foram formalmente examinadas por Wang (1971). A análise feita

por Wang mostra que essas equações são parabólicas e por esta razão podem ser solucionadas por um algoritmo do tipo *forward marching*. Todavia, nota-se que existem dois conjuntos de características, um conjunto de superfícies normais à parede, e um conjunto de superfícies constituído pelas superfícies de corrente.

O conjunto de superfícies normais à parede é o equivalente tridimensional das linhas características normais à parede encontradas nas equações de camada limite bidimensional. Então, pode-se esperar que as condições de contorno devam ser aplicadas de maneira similar àquelas aplicadas ao caso bidimensional. O segundo conjunto de superfícies características, constituído pelas superfícies de corrente, produz as propriedades de caráter hiperbólico das equações de camada limite tridimensional. Destas superfícies, os conceitos de zona de influência e zona de dependência podem ser determinados. Estas zonas são determinadas construindo-se uma superfície de corrente do envelope de linhas de corrente passando através de uma linha perpendicular à superfície no ponto em questão. Desse modo, as condições iniciais para o problema são todas as propriedades do escoamento sobre uma superfície que não seja uma superfície de corrente. Estas condições iniciais são chamadas de condições de entrada pois a solução pode somente ser obtida a jusante dela. Assim, uma solução única das equações de camada limite tridimensional requer a especificação das condições de entrada ao longo de qualquer superfície de entrada e a especificação das condições de contorno similares àquelas empregadas para o caso bidimensional.

#### 4.1 Condições de entrada

As condições de entrada são requeridas ao longo de duas superfícies de entrada. Estas condições podem ser especificadas a partir de resultados experimentais ou construídas a partir de relações analíticas. Uma aproximação alternativa é a geração de soluções utilizando os conceitos de similaridade local. Estas soluções são obtidas reduzindo-se as equações diferenciais parciais em três variáveis independentes para equações em duas variáveis independentes. Um caso especial pode ocorrer quando existir um plano de simetria para o escoamento. Este plano é uma superfície característica e requer um tratamento especial.

#### 4.2 Condições de contorno

As condições de contorno são dadas por:

$$v^i(x^1, x^2, 0) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

No exterior da camada limite tem-se:

$$\lim_{x^3 \rightarrow \infty} v^j = v_e^j \quad j = 1, 2 \quad (9)$$

### 5. EQUAÇÕES DE EULER

A solução das equações de camada limite requerem a especificação das condições de contorno,  $v_e^1, v_e^2$ . Um procedimento de interface é usado para solucionar as equações de Euler de superfície para um dado campo de pressões do escoamento invíscido, assegurando consistência no contorno externo da camada limite. As equações de Euler de superfície podem ser obtidas das equações de camada limite tridimensional tomando-se o limite quando

$x^3 \rightarrow \infty$ . Este método é superior à interpolação direta dos vetores velocidades a partir de uma discretização não-fina do escoamento invíscido para uma discretização fina do escoamento na camada limite, especialmente junto ao contorno onde a precisão é crítica. Assim, as condições de contorno são derivadas de um subconjunto das equações completas de camada limite tridimensional, garantindo a consistência e a compatibilidade.

## 6. MODELO DE TURBULÊNCIA

Nesta avaliação preliminar do método de cálculo, um modelo de turbulência algébrico será considerado. O modelo algébrico de Cebeci e Smith (1974) foi proposto originalmente para camadas limites bidimensionais. Uma extensão deste modelo ao caso tridimensional em um sistema de coordenadas não-ortogonais foi proposta por Cebeci *et al.* (1977). O modelo considera uma viscosidade turbulenta que é especificada em duas partes. Uma formulação do tipo comprimento de mistura é usada na região interna da camada limite,

$$(\mu_t)_i = \rho(lm)^2(v_T)_{,3} \quad (10)$$

A derivada da velocidade total e o comprimento de mistura são dados respectivamente por:

$$(v_T)_{,3} = \left[ (v^1)_{,3}^2 + (v^2)_{,3}^2 + 2 \cos \vartheta (v^1)_{,3} (v^2)_{,3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad lm = \kappa x^3 (1 - e^{-x^3/A}) \quad (11)$$

onde  $\kappa$  é a constante de von Karman, geralmente considerada igual a 0,4. O coeficiente A na função de Van Driest é dado por

$$A = 26 \frac{\mu_w}{\rho_w v_w} \left( \frac{\rho}{\rho_w} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{com:} \quad v_w = \left( \frac{\tau_w}{\rho_w} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \tau_w = \mu_w [(v_T)_{,3}]_{\text{wall}} \quad (12)$$

Na região externa, a viscosidade turbulenta é dada pelo modelo de Clauser na forma

$$(\mu_t)_o = \chi \rho l_o \quad (13)$$

onde  $\chi$  é a constante de Clauser, geralmente considerada igual a 0,016 e  $l_o$  é uma escala representativa de comprimento dada por

$$l_o = \int_0^\infty x^3 (v_T)_{,3} dx^3 \quad (14)$$

## 7. DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

As equações de camada limite transformadas descritas acima constituem um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas, as quais foram discretizadas e aproximadas por expressões de diferenças finitas antes que a solução numérica destas equações pudesse ser obtida. Várias referências podem ser encontradas sobre este assunto e diferentes graus de esquemas de diferenças finitas têm sido estudados. Uma revisão bibliográfica detalhada é apresentada por Smith (1982). No presente método utiliza-se o esquema box

proposto por Cebeci *et al.* (1977), que é um esquema consistente de segunda ordem. Neste caso, uma malha regular é usada no espaço transformado. Definem-se  $(I, J, K)$  pontos na malha com espaçamentos  $(\Delta\zeta, \Delta\xi, \Delta\eta)$  nas três direções. Índices  $(i, j, k)$  são usados para representar o valor de uma grandeza em um determinado ponto da malha. As formas discretizadas das equações são centradas no ponto  $P(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})$ .

## 8. SOLUÇÃO NUMÉRICA

Quando as expressões de diferenças finitas são substituídas nas equações de camada limite, obtém-se um conjunto de equações algébricas não-lineares acopladas, cuja solução numérica requer um procedimento iterativo. Os termos não-lineares são quasi-linearizados para reduzir o número de iterações necessárias para obter a solução. O conjunto resultante de equações algébricas lineares é solucionado por um procedimento de inversão de matrizes tridiagonais por blocos.

## 9. RESULTADOS OBTIDOS

### 9.1 Escoamento em um duto curvo

Vermeulen (1971) realizou uma das mais completas investigações experimentais para o estudo de escoamentos em camada limite tridimensional em um duto curvo. O esquema experimental, com as estações de medidas é mostrado na Figura 1a. Os perfis de velocidade longitudinais iniciais foram gerados usando as correlações de Whitfield e os perfis de velocidade transversais usaram a representação de Mager.

O presente método foi utilizado para o cálculo do escoamento sobre a parede superior do duto, da estação 1 a 15 na direção principal e da linha A a E na direção transversal do escoamento. A distribuição obtida para a espessura de quantidade de movimento é comparada com os resultados experimentais na Figura 1b, apresentando uma boa concordância. Estes resultados confirmam o potencial do método proposto para tratar escoamentos com fortes curvaturas que ocorrem comumente em rotores de turbomáquinas.

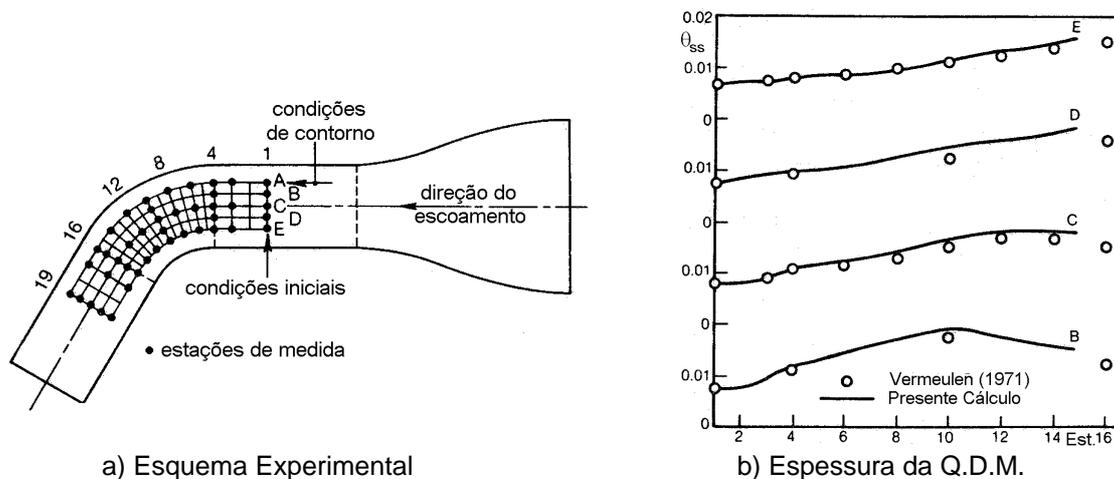


Figura 1: Escoamento em um Duto Curvo

## 9.2 Escoamento em pás de turbina francis

Esforços foram feitos para modelar a camada limite turbulenta tridimensional sobre uma pá de um rotor de turbina Francis. A geometria da pá e a malha usada para a solução do escoamento estão mostradas na Figura 2a. A malha consiste de 40 pontos na direção principal do escoamento, do bordo de ataque ao bordo de fuga, 40 pontos ao longo da direção transversal e 45 pontos na direção normal, perpendicular à superfície da pá. As condições de contorno foram calculadas usando as equações de Euler de superfície, com o campo de pressões do escoamento invíscido como entrada. O cálculo da camada limite iniciou-se com as condições de entrada obtidas de soluções de similaridade local das equações de camada limite. A progressão do cálculo se faz ao longo da direção longitudinal do escoamento, do bordo de ataque ao bordo de fuga, para um plano  $x^2$  constante que vai no núcleo à carcaça.

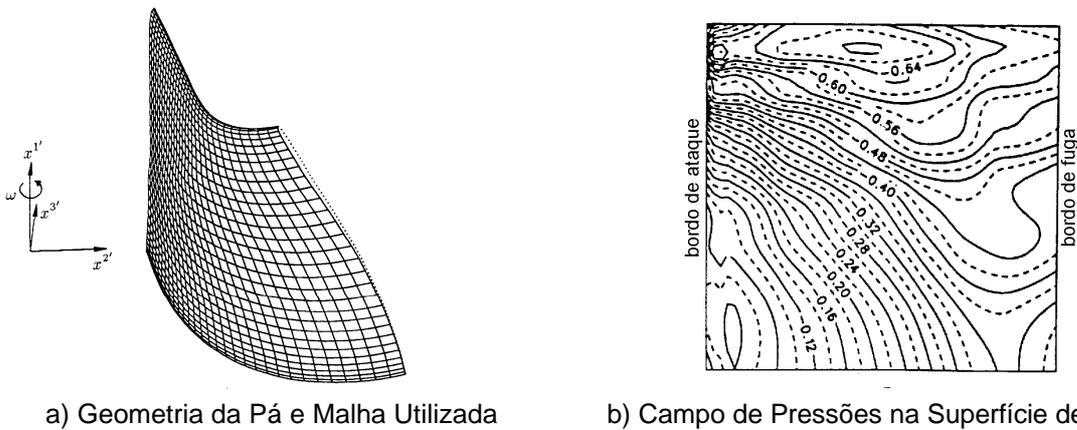


Figura 2: Escoamento em Pás de Turbina Francis

O escoamento na camada limite é influenciado pelo gradiente de pressão e pela força de Coriolis. O campo de pressões para a superfície de sucção das pás é mostrado na Figura 2b. Uma característica interessante do escoamento é a representação da evolução dos perfis de velocidade na camada limite. Na Figura 3 são mostrados os perfis de velocidade na camada limite no plano médio da superfície de sucção da pá, em dois pontos: ponto A a 40% e ponto B a 80% da corda. Pode-se evidenciar o aparecimento do escoamento transversal. A Figura 4 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pelo presente método e os obtidos experimentalmente pela companhia francesa Neyrpic para os ângulos do escoamento na parede da superfície de pressão da pá. Esta comparação comprova claramente que o procedimento de cálculo pode prever eficientemente a curvatura das linhas de corrente que ocorrem no escoamento em pás de turbinas hidráulicas.

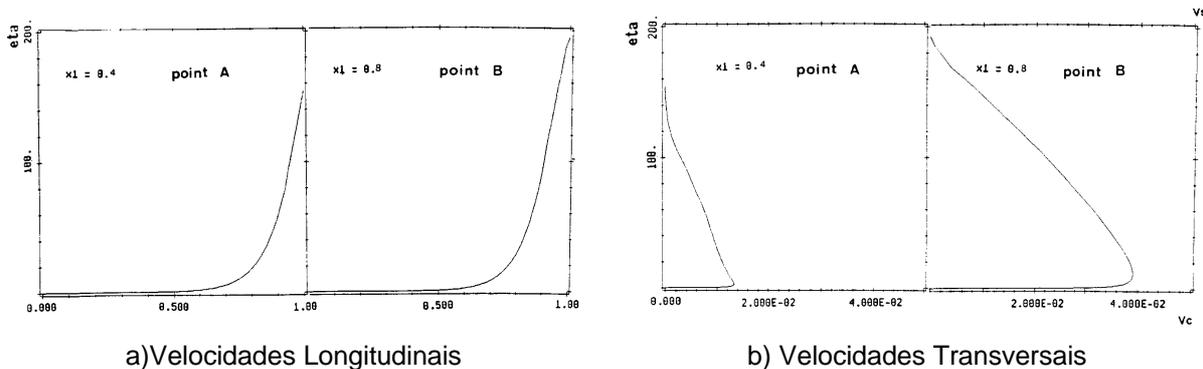


Figura 3: Perfis de Velocidade na Superfície de Sucção da Pá

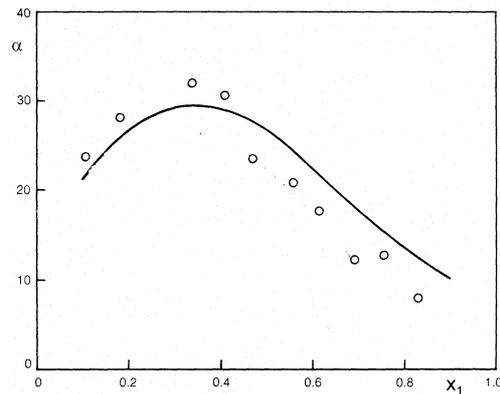


Figura 4: Ângulos do Escoamento na Superfície de Pressão da Pá

## 10. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

O método de solução desenvolvido neste trabalho foi utilizado para o cálculo do escoamento viscoso turbulento tridimensional em alguns casos testes, e boas comparações foram obtidas. Entretanto, um trabalho adicional deve ser feito, especialmente nas áreas da modelagem da turbulência para melhorar as previsões quantitativas dos escoamentos mais complexos. No caso de turbomáquinas, os modelos clássicos de turbulência com uma viscosidade turbulenta isotrópica representam corretamente o escoamento médio mas, para levar em conta os efeitos da rotação sobre a estrutura da turbulência na camada limite, um modelo com uma viscosidade turbulenta anisotrópica é necessário.

## 11. REFERÊNCIAS

- Amorim, J.C.C. Modélisation de Couches Limites Tridimensionnelles dans les Turbomachines, *Thèse de Doctorat de l'INPG*. Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 1991.
- Cebeci, T. and Smith, A.M.O. *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, Academic Press, New York, 1974
- Cebeci, T.; Kaups, K.; and Ramsey, J.A. A General Method for Calculating Three-Dimensional Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers on Arbitrary Wings, *NASA Contractor Report 2777*, 1977.
- Smith, P.D. The Numerical Computation of Three-Dimensional Boundary Layers, *Proc. of the IUTAM Symposium on 3-D Turbulent Boundary Layers*, Berlin, 265-277, 1982.
- Vatsa, V.N. A 3-D Boundary-Layer Analysis Including Heat Transfer and Blade Rotation Effects, *3rd Symp. on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows*, 1985.
- Vermeulen, A.J. Measurements of Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers, *Ph.D. Thesis*, University of Cambridge, U.K., 1971
- Wang, K.C. On the Determination of the Zones of Influence and Dependence for Three-Dimensional Boundary Layer Equations, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.48, 397-404, 1971.