

## MODELAGEM DE CAMADA LIMITE TRIDIMENSIONAL, COMPRESSÍVEL E TURBULENTA EM CORPOS AERODINÂMICOS

**Mauro Jorge Pisani dos Santos**

Universidade Severino Sombra – Av. Exp. Oswaldo A. Ramos, s/nº - Vassouras – RJ  
mauropisani@uss.br

**José Carlos Cesar Amorim**

Instituto Militar de Engenharia – Pça. General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha – Rio de Janeiro – RJ  
jcamorim@ime.br

**Resumo.** *O presente trabalho consiste em uma modelagem numérica de camada limite tridimensional, compressível, laminar e turbulenta no qual as equações de governo são discretizadas pela utilização do esquema de diferenças finitas de Matsuno. Tal esquema é eficiente quando comparado com outros de uso corrente, possui precisão de segunda ordem e é caracterizado pela independência do sentido da velocidade transversal. O modelo de turbulência empregado é o modelo algébrico de comprimento de mistura de Cebeci e Smith adaptado para o sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas. Os resultados obtidos são validados com dados numéricos e experimentais para um elipsóide de revolução em diversos ângulos de ataque. Os parâmetros do escoamento não-viscoso que se constituem nas condições de contorno para o problema de camada limite são obtidos analiticamente da teoria do escoamento potencial e a malha também gerada analiticamente no sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas.*

**Palavras chave:** *Camada limite, Aerodinâmica, Turbulência.*

### 1. Introdução

#### 1.1. Considerações iniciais

A resolução das equações de camada limite constitui-se hoje como uma opção altamente viável no que tange à simulação de escoamentos sobre corpos aerodinâmicos. Os resultados são obtidos a uma fração do custo computacional necessário para a resolução das equações de Navier-Stokes e, embora não sejam adequadas na simulação de escoamentos complexos, para propósitos de projeto, os resultados obtidos possuem a precisão necessária.

Em detrimento da maior facilidade de resolução numérica das equações de camada limite tridimensional quando comparadas às equações de Navier-Stokes. Tais equações, no caso tridimensional, apresentam propriedades e dificuldades adicionais quando comparadas às equações para o caso bidimensional. Uma atenção especial deve ser dirigida ao princípio de zona de influência - zona de dependência no sentido de não se violar o critério de estabilidade imposto pela natureza matemática das equações de camada limite 3D.

Para o caso laminar e compressível, o sistema formado pelas equações de camada limite associado à equação de estado de um gás perfeito e à lei de viscosidade de Sutherland é fechado, contudo, no caso de escoamentos turbulentos, faz-se necessária a inserção de um modelo de turbulência capaz de calcular os termos do tensor de Reynolds oriundos do modelo representativo da natureza do escoamento.

#### 1.2. Histórico

Escoamentos em camada limite tridimensional tem sido estudados sob um ponto de vista numérico nas últimas quatro décadas. Os pioneiros trabalhos de Raetz (1957) e de Der e Raetz (1962) ainda hoje permanecem como as principais referências no que tange à estabilidade do sistema misto elíptico-hiperbólico associado às equações de governo, isto é, o princípio de zona de influência-dependência. Blottner (1975) apresentou uma revisão dos procedimentos numéricos aplicados à análise de camada limite tridimensional, trabalho este que, mesmo com os recentes desenvolvimentos, ainda é bastante profícuo. Wang (1970) apresentou ao fim da década de 1960 um trabalho onde é mostrada uma vasta gama de resultados para escoamento laminar sobre um elipsóide de revolução a variados ângulos de ataque. Patel e Choi (1982) e Cousteix (1987) apresentam resultados para escoamentos turbulentos sobre elipsóides de revolução. Durante as duas últimas décadas, a maior ênfase em mecânica dos fluidos computacional foi dirigida à resolução das equações de Euler e de Navier-Stokes para geometrias cada vez mais complexas. Azevedo et al. (1998) apresentam ao início da década de 1990 resultados para o escoamento turbulento sobre o veículo lançador de satélites (VLS) brasileiro. Tais resultados são obtidos pela resolução das equações de Navier-Stokes parabolizadas com o auxílio da técnica de multiblocos. Sem dúvida, em muitas situações, a resolução das equações de Navier-Stokes se tornam o único procedimento numérico viável, como por exemplo escoamentos que possuam forte interação ou escoamentos com separação, contudo, em virtude do refinamento da malha gerada, tal solução possui ainda hoje um custo computacional elevado, além do mais, para propósitos iniciais de análise e projeto, a resolução de tais equações não é essencial.

Redução de arrasto, controle de escoamento laminar e predição da transição em corpos aerodinâmicos são exemplos de casos em que a aplicação das equações de camada limite se prestam com precisão adequada a uma fração do custo computacional exigido para a resolução das equações de Navier-Stokes.

### 1.3. Objetivos

O presente trabalho, tem como objetivo fornecer dados sobre o escoamento compressível, laminar e/ou turbulento ao redor de corpos aerodinâmicos. Tais dados se constituem em fatores de extrema importância no que tange à problemas de interesse em redução do arrasto aerodinâmico, controle do escoamento laminar e predição da transição. Os dados em questão são obtidos pela resolução numérica das equações de camada limite tridimensional, devidamente discretizadas pelo método de diferenças finitas baseando-se no esquema de Matsuno (1981) que apresenta como característica precípua a independência do sentido da velocidade do escoamento transversal além de mais eficiente quando comparado com outros métodos de uso corrente.

O modelo de turbulência empregado consiste no modelo algébrico de comprimento de mistura de Cebeci e Smith com modificações propostas para o caso 3D em sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas.

Para a simulação de escoamentos que possuem inicialmente natureza laminar e em seguida turbulenta foi utilizado o modelo de transição algébrico proposto por Dhawan e Narasimha (1958).

As malhas são geradas algebricamente no sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas.

Os resultados obtidos são validados para o escoamento laminar e turbulento ao redor de um elipsóide de revolução a variados ângulos de ataque.

## 2. Análise teórica

### 2.1. Conceitos fundamentais

O conceito de camada limite foi introduzido por Ludwig Prandtl em 1904. A partir de evidências experimentais Prandtl observou que, para um número de Reynolds suficientemente elevado, os efeitos viscosos em um escoamento sobre uma superfície ficam confinados a uma fina região próxima a esta superfície.

No caso de equações de camada limite tridimensional, um fator de grande importância é a escolha do sistema de coordenadas. Um sistema cartesiano pode ser utilizado para escoamentos sobre superfícies planas, porém para escoamentos sobre superfícies que possuam maior complexidade geométrica, faz-se necessária a utilização de um sistema de coordenadas curvilíneas. Alguns estudos foram desenvolvidos com um sistema de coordenadas curvilíneas coincidentes com as linhas de corrente. Wie (1991), por exemplo, se utiliza de tal sistema de coordenadas para estudar o escoamento sobre a fuselagem de uma aeronave Cessna. Apesar disso, a maioria dos estudos em camada limite tridimensional são desenvolvidos com um sistema de coordenadas ligado à geometria da superfície.

### 2.2. Sistemas de coordenadas

A escolha do sistema de coordenadas é particularmente importante nos casos de escoamento tridimensional sobre uma superfície arbitrária. Para um cálculo de camada limite, normalmente utiliza-se sistemas de coordenadas curvilíneas ligadas à superfície do corpo sobre o qual se desenvolve a camada limite. Este sistema pode, por exemplo, ser ligado às linhas de corrente do escoamento não-viscoso e suas ortogonais. Tal sistema apresenta como vantagens um equacionamento mais simples, associado à inexistência de singularidades geométricas, bem como independência do ângulo de ataque. Contudo, sob um ponto de vista de geração da malha o problema torna-se significativamente complexo. Em virtude de tal complexidade, na maioria dos casos, utiliza-se um sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas, não necessariamente ortogonal.

No presente trabalho, foi utilizado o sistema de coordenadas curvilíneas orientadas de superfície. Tal sistema apesar de apresentar um equacionamento mais complexo e de apresentar uma singularidade no nariz do corpo aerodinâmico a ser estudado ( $x = 0$ ), torna bastante simples o procedimento de geração da malha. Além disso deve-se ressaltar, também, a dependência do ângulo de ataque.

O problema da singularidade é resolvido, iniciando-se os cálculos em um ponto ligeiramente a montante do bordo de ataque. No que diz respeito a dependência do ângulo de ataque, o problema está associado a não coincidência entre os bordos de ataque físico e geométrico. O procedimento para se remediar este problema é iniciar os cálculos em um ponto ligeiramente a jusante do bordo de ataque físico, desta forma, desconsiderando a não coincidência entre os bordos de ataque físico e geométrico. É claro que tal procedimento só é adequado para pequenos ângulos de ataque ( $\leq 10^\circ$ ). Para ângulos de ataque mais elevados, faz-se necessária a utilização de transformações que localizem a posição correta do bordo de ataque físico.

A Figura (1) mostra a superfície de um corpo aerodinâmico e o sistema de coordenadas utilizado. Em tal sistema, as linhas de  $x$  e  $y$  constantes são definidas sobre a superfície do corpo aerodinâmico e são em geral não-ortogonais. A coordenada  $z$  ( $\xi$ ) é retilínea e normal às duas outras e, por conseguinte, também normal à superfície. O sistema de coordenadas em questão é, então, dito localmente monoclinico.

O sistema de coordenadas orientadas de superfície localmente monoclinico é muito bem adaptado para representar um escoamento próximo à superfície sólida. Tal sistema pode ser utilizado sem restrições para superfícies convexas.

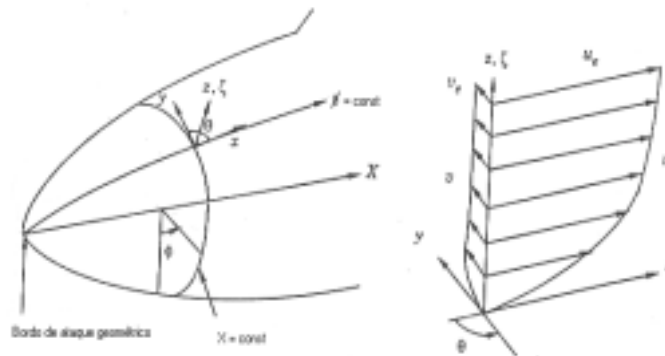


Figura 1. Sistema de coordenadas orientadas de superfície em um corpo aerodinâmico

**2.3. Equações de camada limite**

**2.3.1. Equações de governo**

As equações de camada limite num sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas, vem sendo utilizado por muitos autores nas últimas décadas. Cebeci et al. (1977) em meados da década de 1970 utiliza-se de tais equações para estudar o escoamento sobre asas arbitrárias. No início da década de 1990 Wie (1991) aplica as mesmas equações para estudar o escoamento sobre a fuselagem de uma aeronave Cessna. As equações são as seguintes:

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u h_2 \sen \theta) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v h_1 \sen \theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w h_1 h_2 \sen \theta) = 0 \tag{1}$$

Equação da Quantidade de Movimento em x:

$$\begin{aligned} \frac{\rho u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho v}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} - \rho u^2 K_1 \cot \theta + \rho v^2 K_2 \csc \theta + \rho u v K_{12} = \\ - \frac{\csc^2 \theta}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\cot \theta \csc \theta}{h_2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \tag{2}$$

Equação da Quantidade de Movimento em y:

$$\begin{aligned} \frac{\rho u}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho v}{h_2} \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} - \rho v^2 K_2 \cot \theta + \rho u^2 K_1 \csc \theta + \rho u v K_{21} = \\ - \frac{\csc^2 \theta}{h_2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\cot \theta \csc \theta}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \tag{3}$$

Equação da Energia:

$$\frac{\rho u}{h_1} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\rho v}{h_2} \frac{\partial H}{\partial y} + \rho w \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial z} + \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{V^2}{2} \right) \right\} \tag{4}$$

Nas equações acima, os tensores métricos  $h_1$  e  $h_2$  são os responsáveis pela transformação do sistema cartesiano para o sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas, sendo dados por:

$$h_1 = \frac{\partial s}{\partial x} \tag{5}$$

$$h_2 = \sqrt{\left( \frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial y} \right)^2} \tag{6}$$

Os parâmetros  $K_1$  e  $K_2$  são as curvaturas geodésicas das curvas  $y = \text{constante}$  e  $x = \text{constante}$  respectivamente e são dados por:

$$K_1 = \frac{1}{h_1 h_2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (h_2 \cos \theta) - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right\} \tag{7}$$

$$K_2 = \frac{1}{h_1 h_2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (h_1 \cos \theta) - \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\} \tag{8}$$

$$K_{12} = \frac{1}{h_1 h_2 \sin^2 \theta} \left\{ (1 + \cos^2 \theta) \frac{\partial h_1}{\partial y} - 2 \cos \theta \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\} \tag{9}$$

$$K_{21} = \frac{1}{h_1 h_2 \sin^2 \theta} \left\{ (1 + \cos^2 \theta) \frac{\partial h_2}{\partial x} - 2 \cos \theta \frac{\partial h_1}{\partial y} \right\} \tag{10}$$

A velocidade total é dada por:

$$V = (u^2 + v^2 + 2uv \cos \theta)^{1/2} \tag{11}$$

O sistema de equações acima é fechado pela equação de estado de um gás perfeito e pela lei de viscosidade de Sutherland. Respectivamente:

$$p = \rho RT \tag{12}$$

$$\mu = C_1 \frac{T^{3/2}}{T + C_2} \tag{13}$$

As condições de contorno são dadas por:

$$z = \delta, \quad u = u_e(x, y), \quad v = v_e(x, y), \quad H = H_e \tag{14}$$

$$z = 0, \quad u = v = 0, \quad w = w_w, \quad H = H_w \tag{15}$$

**2.3.2. Natureza matemática das equações de camada limite**

As equações de camada limite tridimensional se constituem em um sistema misto elíptico-hiperbólico resultando no princípio de zona de influência – zona de dependência. A Figura 2 mostra a projeção de duas linhas de corrente tomadas num escoamento sobre uma superfície. Tais linhas de corrente se situam em duas superfícies distintas. A primeira sobre a superfície do corpo aerodinâmico e a segunda no topo da camada limite. Elas são escolhidas como as linhas de corrente que possuam o maior deslocamento angular. A projeção de tais linhas na direção normal a superfície forma duas regiões em formato de cunha. A região a jusante do ponto P é chamada de zona de influência e a região a montante do ponto P é chamada de zona de dependência.

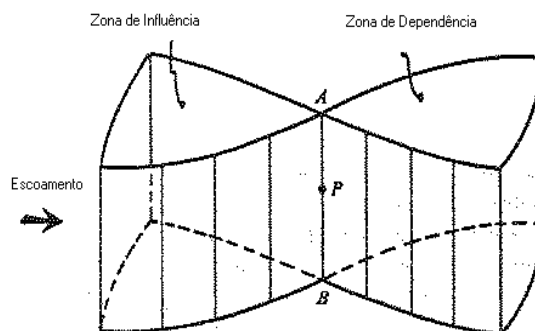


Figura 2 – Zonas de influência e de dependência

O princípio de zona de influência – zona de dependência estabelece que a influência da solução em qualquer ponto é transferida por difusão para todos os pontos numa linha normal à superfície e convectada pelas linhas de corrente ao longo do escoamento.

**2.4. Condições iniciais**

As equações de camada limite bidimensional possuem natureza matemática parabólica se constituindo, portanto, em problemas de marcha numérica na direção do escoamento. Ou seja, uma vez imposta as condições iniciais em um ponto, marcha-se numericamente a montante deste ponto, na direção do escoamento.

Já as equações de camada limite tridimensional, obrigam a uma marcha numérica tanto na direção longitudinal como na direção transversal à direção do escoamento não-perturbado. Em virtude destas duas direções de marcha mostradas na Fig.3, faz-se necessária a imposição de condições iniciais em dois planos que se cruzem. Estes planos são o plano de simetria, ou seja, o plano vertical que divide o corpo aerodinâmico ao meio, e o plano que passa pelo ponto de estagnação e é normal ao plano de simetria. Uma vez obtidas as condições iniciais neste dois planos pode-se iniciar o processo de marcha numérica.

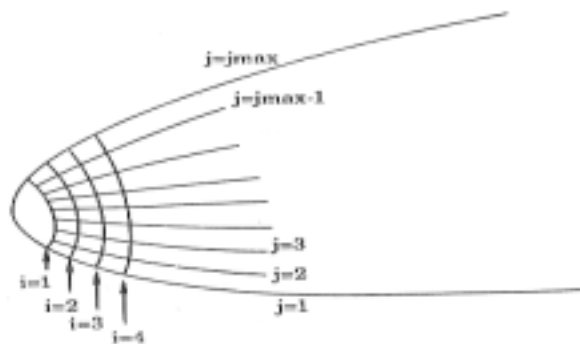


Figura 3 - Direções de marcha numérica sobre a superfície de um corpo aerodinâmico

Desta forma, para se obter tais condições iniciais, faz-se necessária a resolução de dois conjuntos de equações degeneradas, uma para o plano de simetria e outra para o ponto de estagnação.

**3. Método numérico**

**3.1. O Método de diferenças finitas**

Estudos bibliográficos sobre os métodos existentes de cálculo para escoamentos em camada limite tridimensional tem sido desenvolvidos nas últimas quatro décadas. Os métodos podem ser divididos em duas classes distintas, em função do método pelo qual as equações sejam resolvidas, seja sob a forma diferencial, seja sob a forma integral. Os métodos integrais são, do ponto de vista computacional, mais rápidos que os métodos diferenciais, uma vez que há somente duas coordenadas espaciais que intervêm. Entretanto, um certo número de relações auxiliares devem ser introduzidas para fechar o conjunto de equações diferenciais parciais. Essas relações compreendem, usualmente, a consideração de famílias de perfis de velocidade nas direções mutuamente ortogonais escolhidas mais ou menos empiricamente. A precisão de um método integral é, então, limitada pela aplicabilidade das relações empíricas consideradas para a previsão do escoamento. Contrariamente, no caso do método diferencial, nenhuma consideração é feita sob a forma dos perfis de velocidade. Por essa razão os métodos diferenciais são, potencialmente, mais gerais que os métodos integrais. Uma certa dose de empirismo é todavia introduzida pela utilização de um modelo de turbulência para o tensor de Reynolds.

No presente trabalho, o método de diferenças finitas é utilizado para a discretização das equações de camada limite tridimensional. O esquema escolhido é apresentado na seção 3.2.

**3.2. Esquema de diferenças finitas de Matsuno**

A partir das condições iniciais obtidas, o esquema de diferenças finitas de Matsuno é utilizado para a marcha numérica. Tal esquema consiste em uma modificação do esquema predictor-corretor de Crank-Nicolson, tendo sido originalmente proposto por Douglas e Jones (1963) para a aplicação em problemas de camada limite tridimensional. Este esquema é implícito na direção  $\zeta$ , explícito na direção  $y$ , não-iterativo e possui precisão de segunda ordem. Além do que é altamente vetorizável sob o ponto de vista computacional na medida em que é independente do sentido da velocidade do escoamento transversal.

### 3.2.1. Estabilidade

Raetz (1957) mostrou que as equações de camada limite tridimensional possuem um caráter hiperbólico no plano  $x - y$ , resultando na formulação de princípio de zona de influência – zona de dependência. A influência da solução em qualquer ponto é transferida por difusão para todos os pontos em uma linha normal a superfície sólida e convectada pelas linhas de através do escoamento.

A zona de dependência determina uma quantidade mínima de dados a serem supridos; em outras palavras, a molécula de diferenças deve incluir as informações da zona de dependência. Em virtude deste princípio, os esquemas de diferenças finitas comumente utilizados para a resolução das equações de camada limite tridimensional que se utilizam de procedimentos de marcha nas direções longitudinal e transversal devem ser modificados sempre que o sinal do escoamento transversal reverte. Mais exatamente, quando a direção de qualquer linha de corrente na camada limite é oposta à direção de marcha numérica, uma modificação ao método deve ser utilizada.

Os esquemas de diferenças finitas utilizados por Shevelev (1955), Dwyer e Sanders (1974) e o esquema Box de Cebeci et al. (1977) são exemplos de esquemas que requerem modificação para a região onde o sentido da velocidade transversal é oposta ao sentido de marcha numérica. Os esquemas Zig-Zag usado por Krause et al. (1972), Zig-Zag Box usado por Cebeci et al. (1981) são exemplos de modificações usadas nesta região para os procedimentos usuais de marcha numérica.

A principal característica do esquema de Matsuno é que as derivadas com respeito a  $y$  são formadas independentemente do sentido do escoamento transversal. Portanto a molécula de diferenças finitas de Matsuno não depende do sentido da velocidade transversal.

O esquema de diferenças finitas de Matsuno é condicionalmente estável e impõe as mesmas condições de estabilidade que são estabelecidas pelo princípio de zona de dependência, ou seja:

$$\frac{u}{u_c} > 0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{h_1 \Delta x v}{h_2 \Delta y u} \right| < 1.0 \quad (16)$$

### 3.2.2. Eficiência

O esquema de diferenças finitas de Matsuno é rápido e eficiente quando comparados com outros métodos de uso corrente. A eficiência e rapidez do esquema Box e do esquema de Matsuno pode ser diretamente comparada. O esquema Box se utiliza do método de eliminação por blocos para a resolução da matriz tridiagonal por blocos  $6 \times 6$  resultante das equações de quantidade de movimento. Pelo mesmo esquema a equação da energia é transformada em uma matriz tridiagonal por blocos  $2 \times 2$ . Utilizando-se o esquema de Matsuno, as equações de quantidade de movimento resultam em um sistema tridiagonal por blocos  $2 \times 2$  que pode ser resolvido de forma bastante eficiente pelo algoritmo tridiagonal modificado de Davis, além do que a equação da energia é transformada em uma matriz linear tridiagonal, que pode ser então resolvida pelo algoritmo de Thomas. Outra vantagem computacional é que o esquema de Matsuno não é um processo iterativo (sendo somente um procedimento predictor-corrector) enquanto que o esquema Box é um método iterativo em virtude da linearização.

## 4. Resultados e discussão

### 4.1. Comentários iniciais

O elipsóide de revolução foi selecionado como caso teste, sendo as soluções obtidas para os casos laminar incompressível e compressível e turbulento incompressível a variados ângulos de ataque. Este corpo aerodinâmico particular foi selecionado em virtude das seguintes vantagens:

- a) Sua geometria pode ser obtida analiticamente;
- b) As condições do escoamento não-viscoso são obtidas analiticamente da teoria do escoamento potencial para qualquer ângulo de ataque e;
- c) A razoável quantidade de resultados na literatura para fins de comparação e validação.

### 4.2. Escoamento laminar e axissimétrico

Para o escoamento laminar e axissimétrico ao redor de um elipsóide com razão de aspecto de 0,25 (1m x 0,25m) foi gerada uma malha com  $100 \times 13$  pontos sobre o mesmo. A malha em questão é mostrada na Fig. 4 A Figura 5 mostra os resultados obtidos para o coeficiente de atrito ao longo da direção longitudinal comparados com os resultados de Hirsch e Cebeci (1970). Tais resultados são obtidos para uma velocidade do escoamento não-perturbado de 1m/s e mostram boa coincidência desde o bordo de ataque até o ponto de separação.

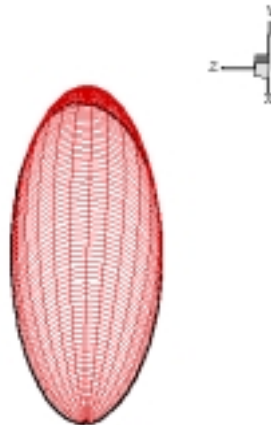


Figura 4 – Malha sobre o elipsóide de revolução

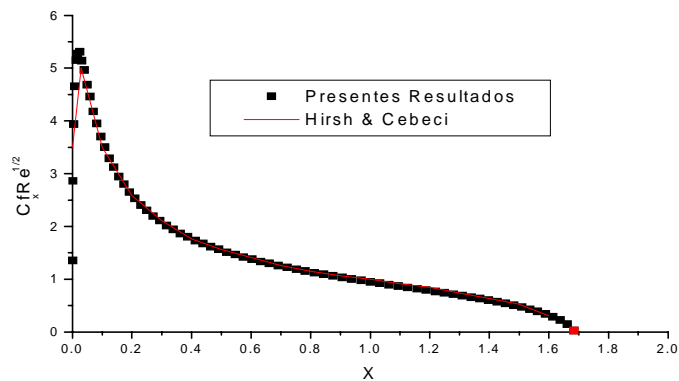


Figura 5 – Coeficiente de atrito longitudinal versus a distância longitudinal

**4.3. Escoamento laminar com ângulo de ataque de 6°**

Escoamentos que envolvem ângulo de ataque apresentam maior dificuldade de análise no sistema de coordenadas utilizado em virtude da não coincidência entre os bordos de ataque físico e geométrico. Torna-se então necessária a utilização de um sistema de coordenadas que esteja alinhado com as linhas de corrente externas e suas ortogonais ou a identificação do bordo de ataque físico numericamente. Para o mesmo elipsóide mencionado no item anterior, as figuras 6 e 7 mostram os resultados obtidos para a espessura de deslocamento versus a coordenada azimutal devidamente adimensionalizada em duas estações longitudinais distintas, respectivamente  $x = 1,2m$  e  $x = 0,6m$ . Além da boa coincidência com os resultados analíticos, pode-se reparar que a proximidade do ponto de separação gera um abrupto crescimento na espessura de deslocamento na região ao resguardo do vento.

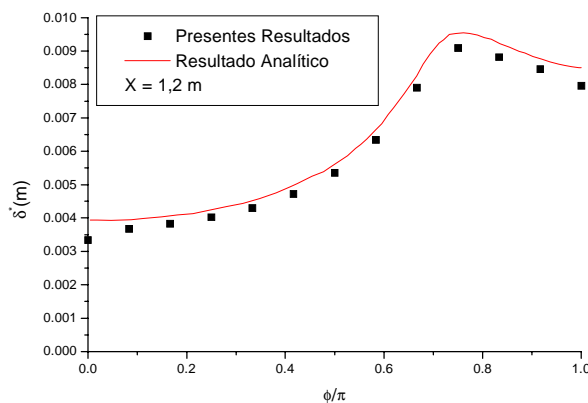


Figura 6 – Espessura de deslocamento versus a distância azimutal em  $X = 1,2m$

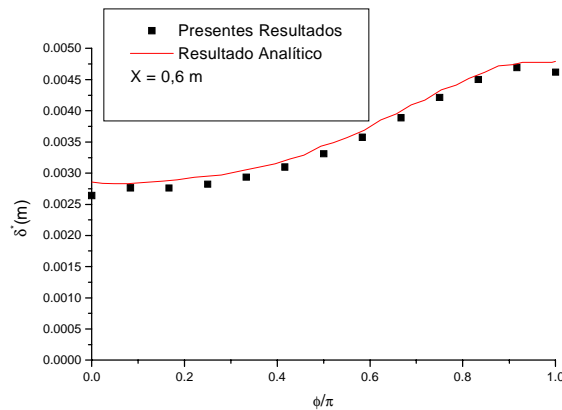


Figura 7 - Espessura de deslocamento versus a distância azimutal em  $X = 0,6m$

**4.4. Escoamento turbulento com ângulo de ataque de  $10^\circ$**

Para a simulação do escoamento turbulento sobre um elipsóide, foi considerado um ângulo de ataque de  $10^\circ$  com o objetivo de se comparar os resultados obtidos com dados experimentais. Pelo mesmo motivo, o elipsóide agora possui uma razão de aspecto de 0,17 (1,2m x 0,2m) e a velocidade do escoamento não perturbado é de 55m/s.

A figura 8 apresenta os resultados para o coeficiente de atrito longitudinal versus a distância longitudinal para uma dada estação azimutal ( $\phi = 110^\circ$ ). Tais resultados são obtidos sem a utilização do modelo de transição e comparados com resultados experimentais disponíveis no banco de dados europeu ERCOFTAC. A comparação evidencia a diferença entre o intervalo de transição (experimental) e o ponto de transição imposto em  $x = 0,22m$  (simulação).

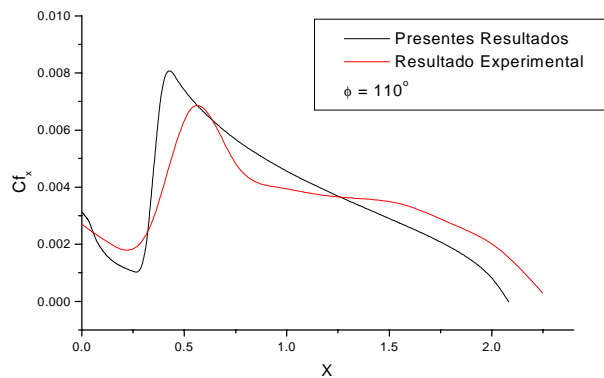


Figura 8 – Coeficiente de atrito longitudinal versus a distância longitudinal em  $\phi = 110^\circ$  sem a utilização do modelo de transição

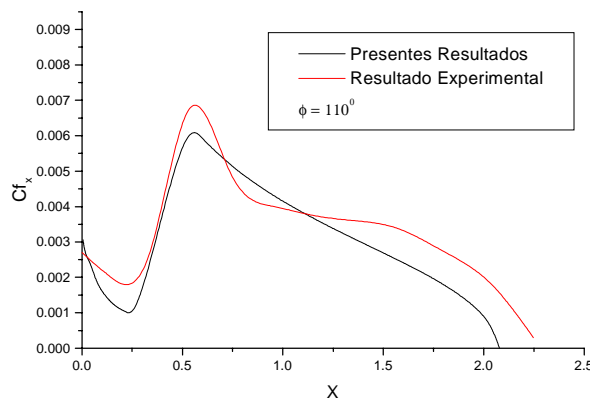


Figura 9 - Coeficiente de atrito longitudinal versus a distância longitudinal em  $\phi = 110^\circ$  com a utilização do modelo de transição



A figura 9 apresenta resultados para o coeficiente de atrito longitudinal versus a distância longitudinal para a mesma estação azimutal da figura 8, contudo os resultados agora apresentados são obtidos com a utilização do modelo de transição de Dhawan e Narasimha (1958), evidenciando uma significativa melhora nos resultados na região de transição.

## 5. Referências

- Azevedo, J. L. F., Strauss, D., Ferrari, M. A. S.,1998, “Viscous Multiblock Simulations of Axisymmetric Launch Vehicle Flows”. CTA/IAE/ASE-N.
- Blottner, F. G.,1975, “Computational Techniques for Boundary Layers”. AGARD Lecture Series, n. 73.
- Cebeci, T., Smith, A. M. O.,1974, “Analysis of Turbulent Boundary Layers”. Academic Press, New York.
- Cebeci, T., Khattab, A. K., and Stewartson, K.,1981, “Three-Dimensional Laminar Boundary Layers and OK of Accessibility”. Journal of Fluid Mechanics, v. 107, p. 57-87.
- Cebeci,T., Kaups, K., Ramsey, J., A., 1977, “A General Method for Calculating Three-Dimensional Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers on Arbitrary Wings”. NASA CR-2777.
- Cousteix, J.,1987, “Three-Dimensional Boundary Layers. Introduction to Calculation Methods”. AGARD Report n. 741.
- Der, J. Jr., Raetz, G. S.,1962, “Solution of General Three-Dimensional Laminar Boundary-Layer Problems by an Exact Numerical Method”. Institute of the Aerospace Sciences Paper n. 62-70.
- Dhawan, S. Narasimha, R.,1958, “Some Properties of Boundary Layer Flow During Transition from Laminar to Turbulent Motion”. Journal of Fluid Mechanics. v. 3, p. 418-436.
- Douglas, J. Jr., Jones, B. F.,1963, “On predictor –Corrector Methods for Nonlinear Parabolic Differential Equations”. J. Soc. Indust. Appl. Math., v. 11, n. 1, p.195-204.
- Dwyer, H. A., Sanders, B. R.,1974, “A physical Optimum Difference Scheme for Three- Dimensional Boundary-Layers”. Fourth International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Boulder, Colorado.
- Hirsch, R. S., Cebeci, T.,1970, “Calculation of Three-Dimensional Boundary Layers with Negative Cross Flow on Bodies of Revolution”. Journal of Fluid Mechanics, v. 43, p. 187-209.
- Krause, E., Hirschel, E. H., Kordulla, W.,1972, “Finite Difference Solutions for Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers”. EUROMECH Colloquium 33, Berlin.
- Matsuno, K.,1981, “A Vector-Oriented Finite Difference Scheme for Calculating Three-Dimensional Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers on Practical Wing Configurations”. AIAA Paper n. 81-1020.
- Patel,V. C., Choi, D. H.,1982, “Calculation of Three-Dimensional Laminar and Turbulent Boundary Layers on Bodies of Revolution at Incidence”. Iowa Institute of Hidraulic Research, The University of Iowa, Report n. 178, p. 15.14-15.23.
- Raetz, G. S.,1957, “A Method of Calculating Three-Dimensional Laminar Boundary Layers of Steady Compressible Flows”. Report n.. NAI-58-73 (BLC-114), Northrop Aircraft, Inc.
- Shevelev, Y. D.,1955, “Numerical Calculation of the Three-Dimensional Boundary-Layer in an Incompressible Fluid”. Izv. NA SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza, v.1, n. 5, p.112-117.
- Tassa, A., Atta, E. H., Lemmerman, L. A.,1982, “A New Three-Dimensional Boundary Layer Calculation Method”. AIAA Paper n. 82-0224.
- Van Den Berg, B., Elsenaar, A.,1972, “Measurements in a Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer Under Infinite Swept Wing Conditions”. EUROMECH Colloquium 33, Berlin.
- Wang, K. C.,1977, “Three-Dimensional Boundary Layer Near the Plane of Symmetry of a Spheroid at Incidence”. Journal of Fluid Mechanics, v. 43, p. 220-236.
- Wie,Y. S., Harris, J. E.,1991, “Numerical Solution of the Boundary-Layer Equations for a General Aviation Fuselage”. J. Aircraft v. 28, n. 12.

## 6. Direitos autorais

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## THREE-DIMENSIONAL, COMPRESSIBLE AND TURBULENT BOUNDARY-LAYER MODELING.

### Mauro Jorge Pisani dos Santos

Severino Sombra University – Av. Exp. Oswaldo A. Ramos s/nº - Centro – Vassouras – RJ  
mauropisani@uss.br

### José Carlos Cesar Amorim

Militar Institute of Engineering – Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha – Rio de Janeiro – RJ  
jcamorim@ime.eb.br

**Abstract.** *The present work consists on a numerical modeling of a three-dimensional, compressible, laminar and turbulent boundary layer, in which the governing equations are solved using the Matsuno finite difference scheme. This scheme is second-order accurate, efficient and characterized by the independence of the crossflow velocity direction. The turbulence model used is the Cebeci-Smith algebraic model of mixture length adjusted to the nonorthogonal coordinate system. The results obtained are checked for the prolate spheroid for several incidences with other numerical calculations and with experiment when available. The inviscid parameters are analytically obtained from the potential flow theory and the grids also analytically generated in the nonorthogonal coordinate system.*

**Keywords.** *Boundary-Layer, Aerodynamics, Turbulence.*