# Capítulo 5
# Teoria dos Circuitos de Corrente Alternada em Estado Permanente

# Sumário

- Álgebra dos Números Complexos
- Representação de Funções Senoidais do Tempo
- Impedância e Admitância
- Diagramas Fasoriais
- Problemas

- Foi visto que $y(t)=y_H(t)+y_P(t)$

- Com o passar do tempo, a solução complementar (resposta livre) se anula e a solução em regime permanente (SS) fica igual à solução particular (forçada).

- Neste capítulo, trabalharemos com fontes senoidais (AC) em estado permanente.

# 5.1 Álgebra dos Números Complexos

- Francamente!

- Façamos dois exercícios:

1. Ache $\sum_{i=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi i}{N}}$

2. Ache todos os valores de z para os quais

$$z^5 = 1 - j$$

# 5.2 Representação das funções senoidais no tempo

# A função $f(t) = F_m\cos(\omega t+\phi)$ é mostrada abaixo.

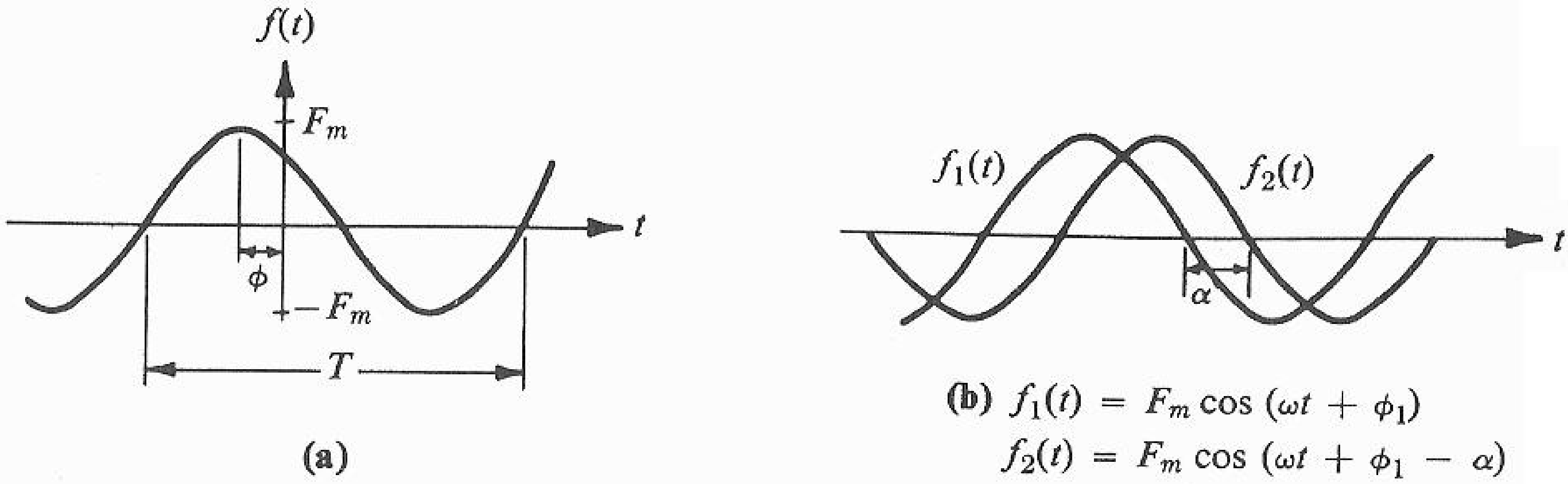



*Fig. 5.2-1*

- $f_2(t)$ está atrasada com relação à $f_1(t)$ do ângulo $\alpha$

- A resposta SS de um sinal senoidal pelo método visto no capítulo anterior é trabalhoso.
- Exemplo: ache i(t) no circuito abaixo.

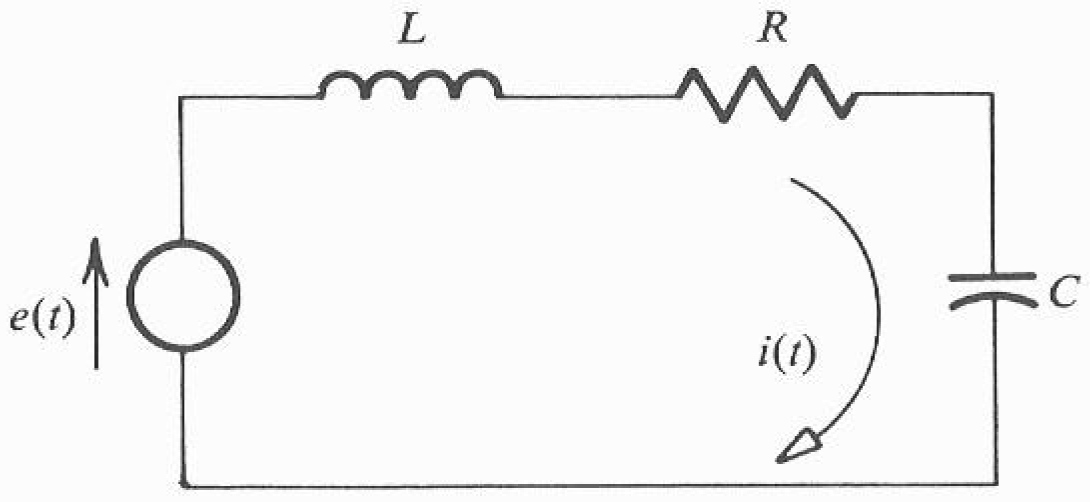



Fig. 5.2-2

- Seja $f(t) = F_m \cos(\omega t+\phi)$
- Lembrem-se que $\cos(\theta) = (e^{j\theta}+e^{-j\theta})/2$
- Logo: $f(t) = F_m(e^{j(\omega t+\phi)}+e^{-j(\omega t+\phi)})/2$

$$= (F_m e^{j\phi} e^{j\omega t}+F_m e^{-j\phi} e^{-j\omega t})/2$$

$$= (1/2)(\mathbf{F} e^{j\omega t}+\mathbf{F}^* e^{-j\omega t})$$

onde $\mathbf{F} = F_m e^{j\phi}$

- $\mathbf{F}e^{j\omega t}+\mathbf{F}^*e^{-j\omega t}$ podem ser representados por vetores orientados num plano complexo, girando em sentidos opostos (FASORES GIRANTES)

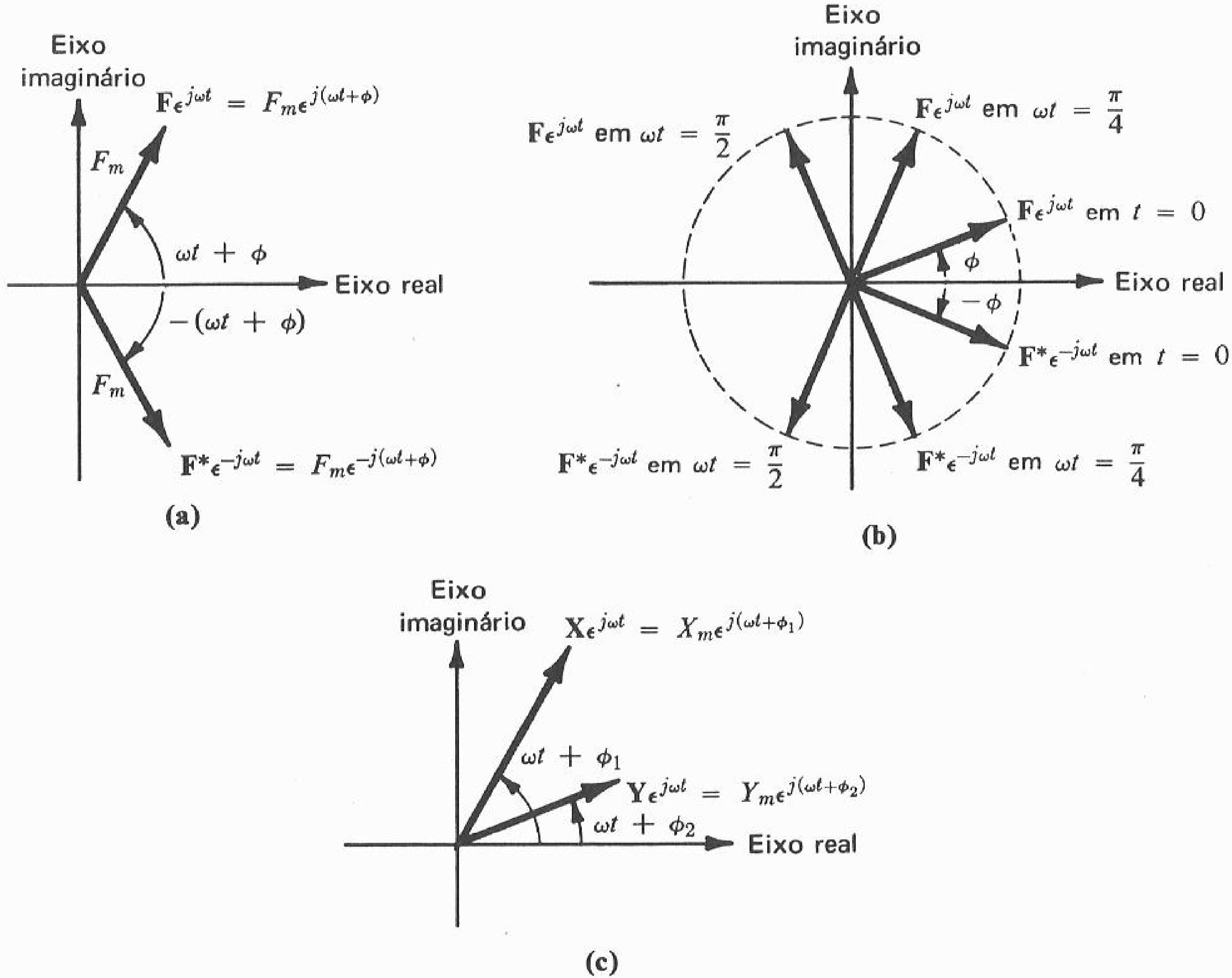

Eixo imaginário
$\mathbf{F}\epsilon^{j\omega t} = F_m\epsilon^{j(\omega t+\phi)}$
$F_m$
$\omega t + \phi$
Eixo real
$-(\omega t + \phi)$
$F_m$
$\mathbf{F}^*\epsilon^{-j\omega t} = F_m\epsilon^{-j(\omega t+\phi)}$
(a)
Eixo imaginário
$\mathbf{F}\epsilon^{j\omega t}$ em $\omega t = \frac{\pi}{2}$
$\mathbf{F}\epsilon^{j\omega t}$ em $\omega t = \frac{\pi}{4}$
$\mathbf{F}\epsilon^{j\omega t}$ em $t = 0$
$\phi$
Eixo real
$-\phi$
$\mathbf{F}^*\epsilon^{-j\omega t}$ em $t = 0$
$\mathbf{F}^*\epsilon^{-j\omega t}$ em $\omega t = \frac{\pi}{2}$
$\mathbf{F}^*\epsilon^{-j\omega t}$ em $\omega t = \frac{\pi}{4}$
(b)
Eixo imaginário
$\mathbf{X}\epsilon^{j\omega t} = X_m\epsilon^{j(\omega t+\phi_1)}$
$\omega t + \phi_1$
$\mathbf{Y}\epsilon^{j\omega t} = Y_m\epsilon^{j(\omega t+\phi_2)}$
$\omega t + \phi_2$
Eixo real
(c)

*Fig. 5.2-3*

# Definição: FASOR

- Observe que $f(t)$ = Real$\{\mathbf{F}e^{j\omega t}\}$ não havendo a necessidade dos dois fasores girantes para representar $f(t)$
- O termo fasor é entendido como o fasor girante no sentido anti-horário no instante $t=0$
- Logo, em SS senoidal, representamos $f(t)=F_m\cos(\omega t+\phi)$ pelo fasor $\mathbf{F}=F_m e^{j\phi}$ e $x(t)=20\cos(3t-0.5\pi)$ pelo fasor $\mathbf{X}=20e^{-j0.5\pi}$

- A resposta a uma entrada forçada $x(t) = \text{Real}\{\mathbf{X}e^{j\omega t}\}$ será $y(t) = \text{Real}\{\mathbf{Y}e^{j\omega t}\}$
- Sabemos também, do Capítulo 3, que $y(t) = x(t) * h(t)$ (convolução, lembram?)
- ... VER QUADRO NEGRO
- $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\, H(j\omega)$
- $H(j\omega)$ é a resposta em freqüência do circuito (*função do circuito em estado permanente senoidal*)
- Voltando à solução de $$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{de}{dt}$$

# 5.3 Impedância e Admitância

- O livro diz que para uma entrada senoidal todas as correntes e tensões (estado permanente) podem ser determinadas como projeções no eixo real dos fasores girantes (ok!) e por isto ele vai considerar $x(t) = \mathbf{X}\, e^{jwt}$ (not ok, IMHO: uma coisa é uma coisa—tensão ou corrente—e outra coisa é outra coisa—fasor da tensão e fasor da corrente)
- Vejamos as relações entre os fasores para o caso de R, C e L ...

# Definições de IMPEDÂNCIA E ADMITÂNCIA

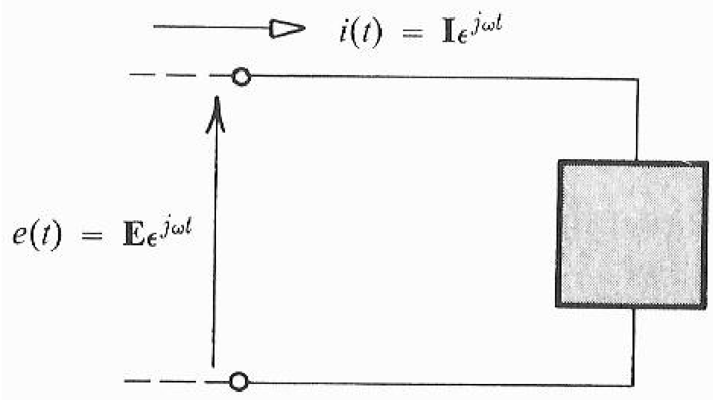



*Fig. 5.3-1*

**TABELA 5.3-1**

| *Elemento* | *Impedância* | *Admitância* |
|---|---|---|
| Resistência | $Z = R$ | $Y = \frac{1}{R} = G$ |
| Capacitância | $Z = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle -90^\circ$ | $Y = j\omega C = \omega C\angle 90^\circ$ |
| Indutância | $Z = j\omega L = \omega L\angle 90^\circ$ | $Y = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L}\angle -90^\circ$ |

**22**

Em aplicações de engenharia, os modelos lineares são largamente utilizados para representar sistemas dinâmicos. Um sistema é dito linear quando atende a propriedade da superposição.

Considere um sistema dinâmico linear cujo comportamento possa ser modelado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + u$$

onde $u(t)$ representa a entrada, $y(t)$, a saída e o parâmetro $t$ foi omitido na equação por simplicidade de notação.

Qual é a resposta em regime permanente desse sistema para a entrada $u(t) = 1 + \cos(2t)$?

(A) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2t)$

(C) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(2t - \frac{\pi}{4})$

(D) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(2t + \frac{\pi}{4})$

(E) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \text{sen}(2t)$

- Continuando: como vimos, os fasores obedecem relação semelhante à lei de Ohm: todas ferramentas aprendidas (KVL, KCL, Thévenin, Norton, Superposição) são válidas!

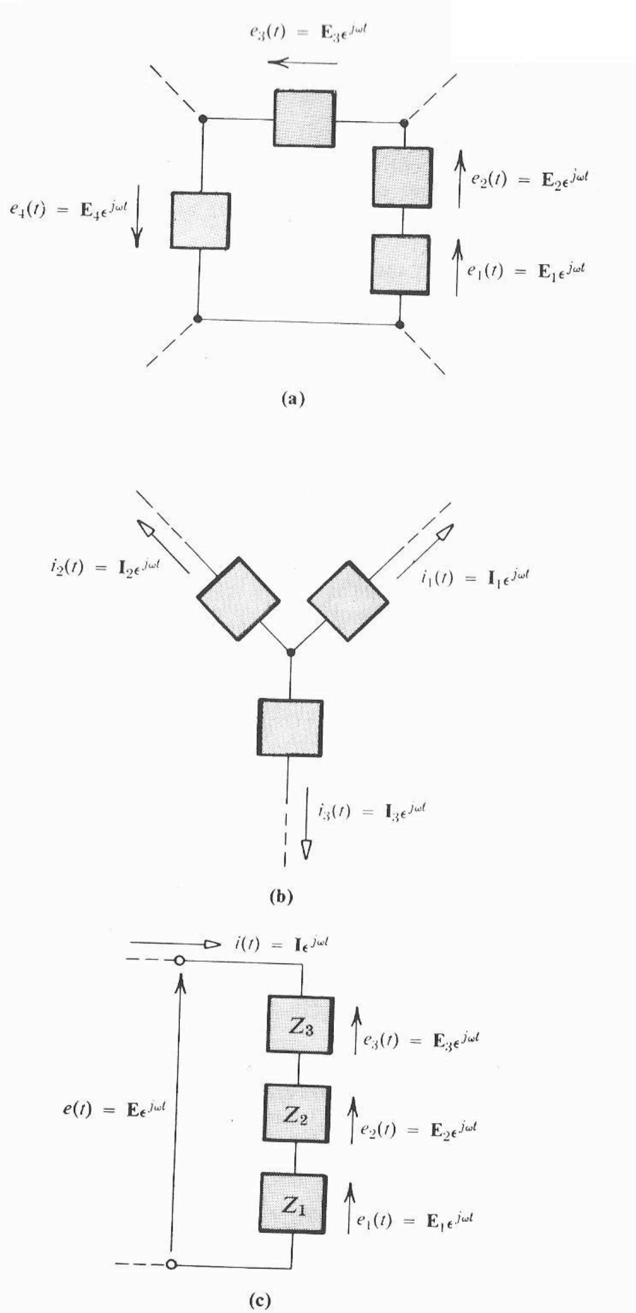



*Fig. 5.3-2*

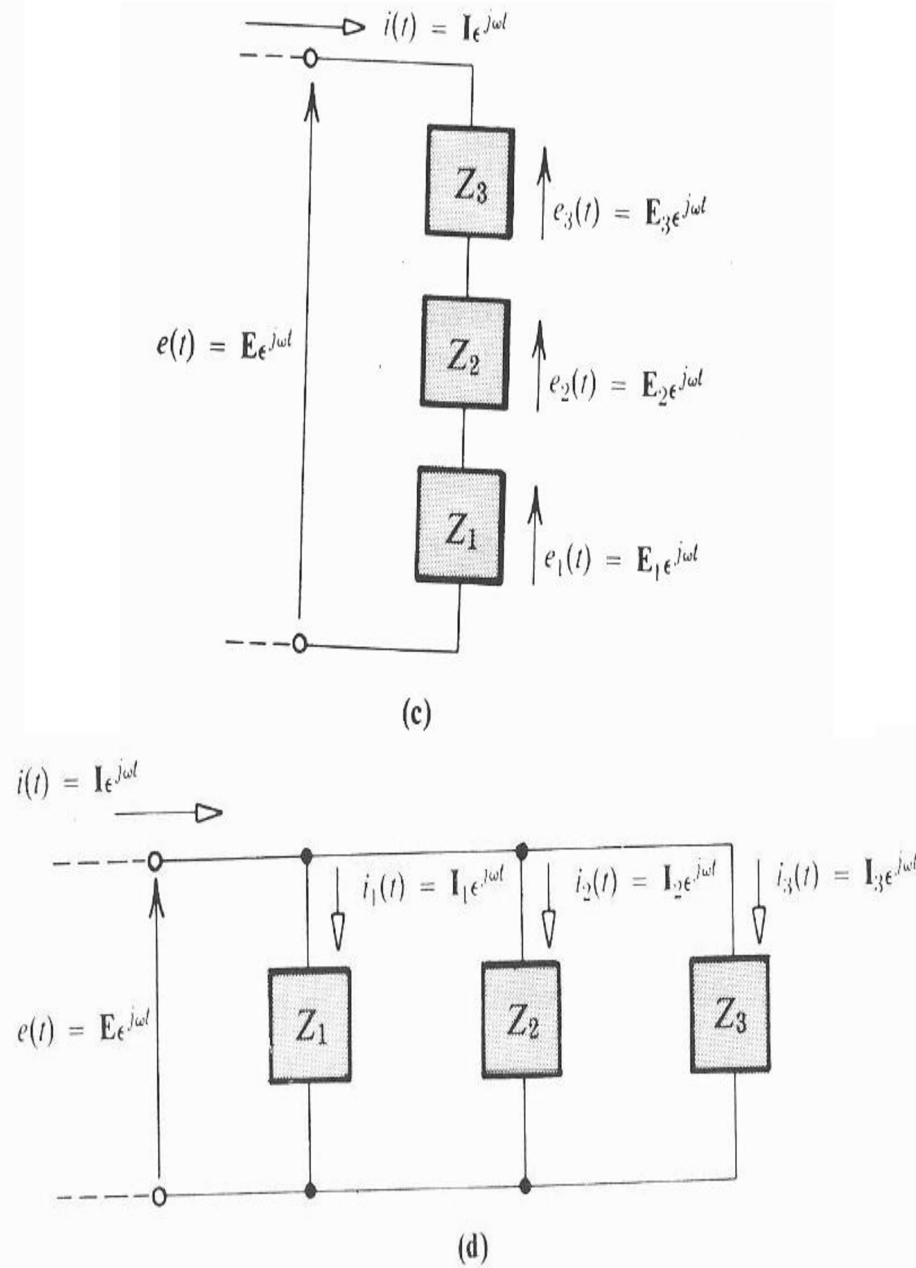



*Fig. 5.3-2*

- Exemplo: para o circuito da letra (a) da figura ao lado, determine a tensão de saída $e_o(t)$ no estado permanente.

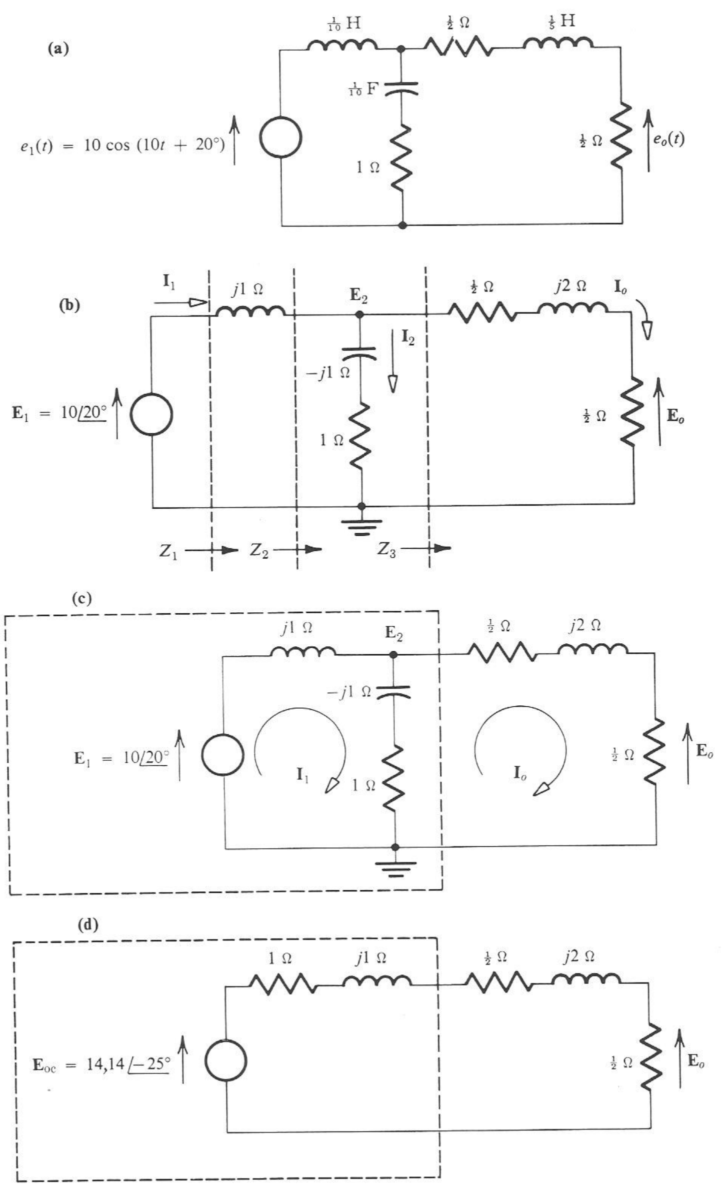



*Fig. 5.3-3*

- Entrem em

http://br.answers.yahoo.com/question/index?qid=20070612160642AAawfNj

E ajudem um tal de Marcelo Silveira.

• Análise em SSS de circuitos com fonte controlada. No circuito abaixo, determine $i_0(t)$ para freqüências muito baixas, para freqüências muito altas e para ω=2rad/s.

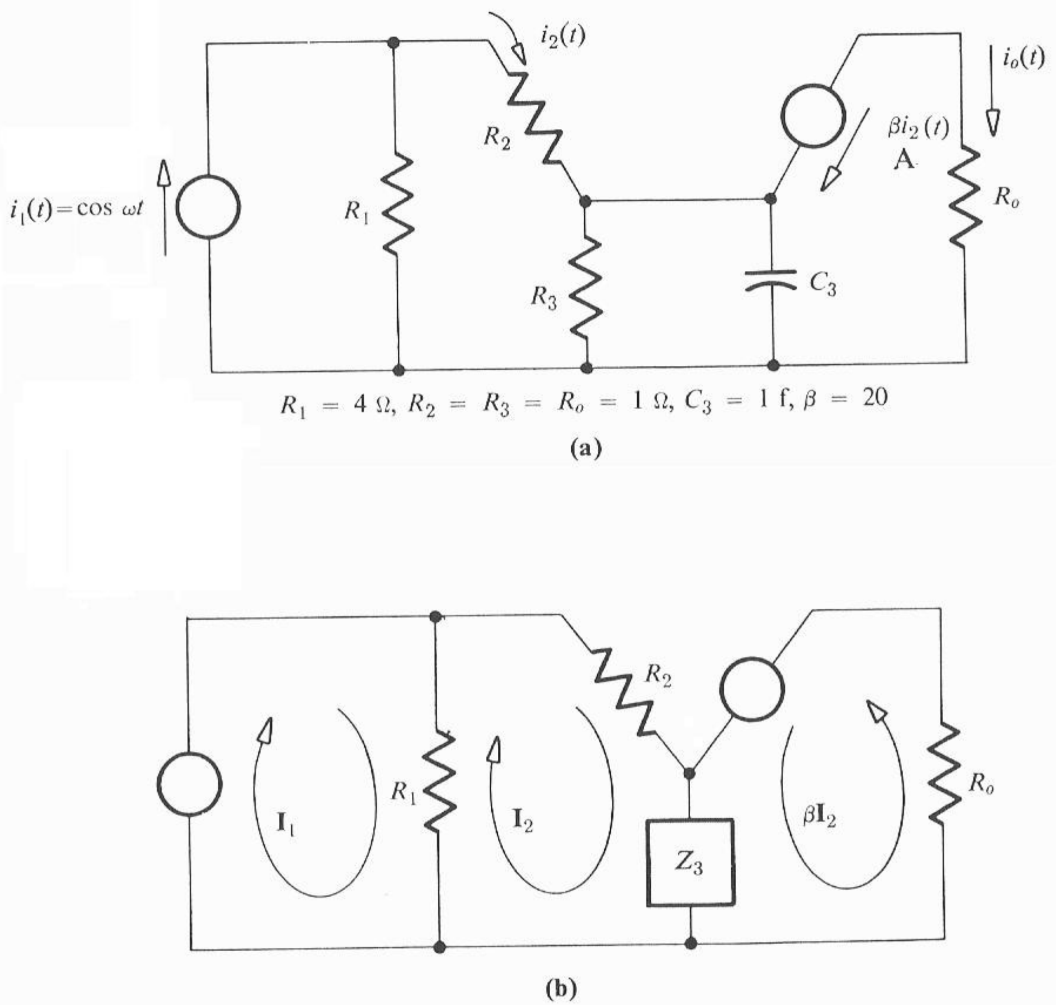
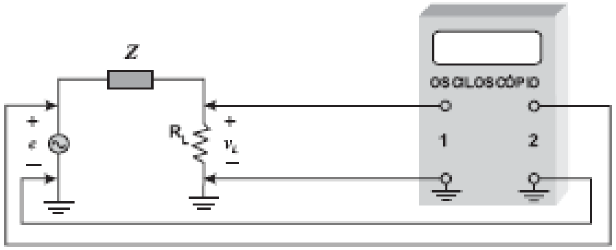
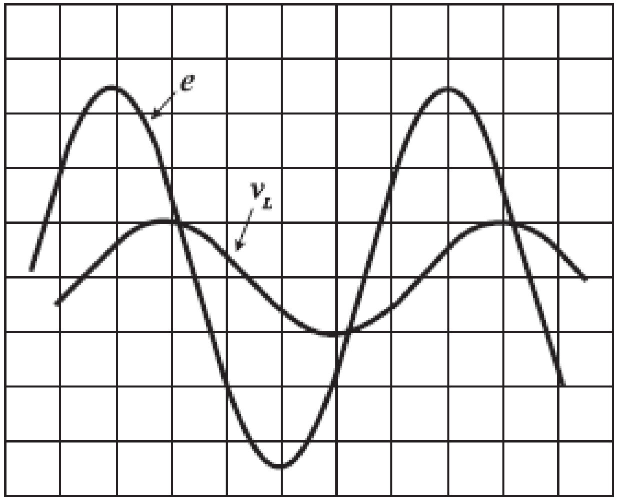



Fig. 5.3-4

- Mais um do ENADE 2005:

24
Observe a figura abaixo, que mostra um esquema de medição de uma impedância $Z$ desconhecida e os sinais observados na tela do osciloscópio.




Com base na figura, tem-se:

A impedância $Z$ tem característica capacitiva.

PORQUE

A corrente do circuito está adiantada em relação à tensão $e$.

Analisando estas afirmações, conclui-se que

(A) as duas afirmações são verdadeiras e a segunda justifica a primeira.
(B) as duas afirmações são verdadeiras e a segunda não justifica a primeira.
(C) a primeira afirmação é verdadeira e a segunda é falsa.
(D) a primeira afirmação é falsa e a segunda é verdadeira.
(E) as duas afirmações são falsas.

- Impedância de entrada:

$Z = R + j X$,

R é resistência e X a reatância

- Admitância de entrada:

$Y = 1/Z = G + j B$,

G é a condutância e B a susceptância

- $Z = R + jX = (R^2+X^2)^{1/2} e^{j\theta}$, $\theta = \mathrm{atan}(X/R)$
  $= |Z|\ e^{j\theta}$ }

- $Y = G + jB = (G^2+B^2)^{1/2} e^{j\phi}$, $\phi = \mathrm{atan}(B/G)$
  $= |Y|\ e^{j\phi}$

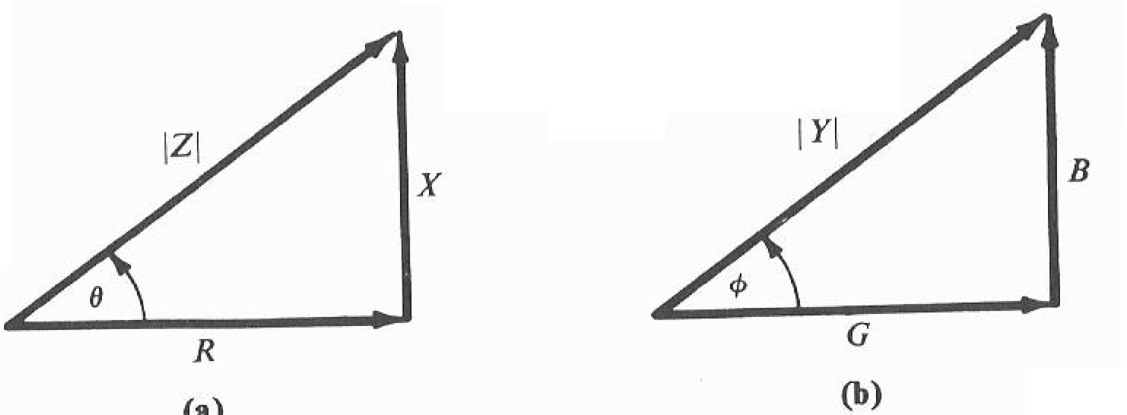


Fig. 5.3-5

- Determine a resistência e a reatância de entrada do circuito abaixo:

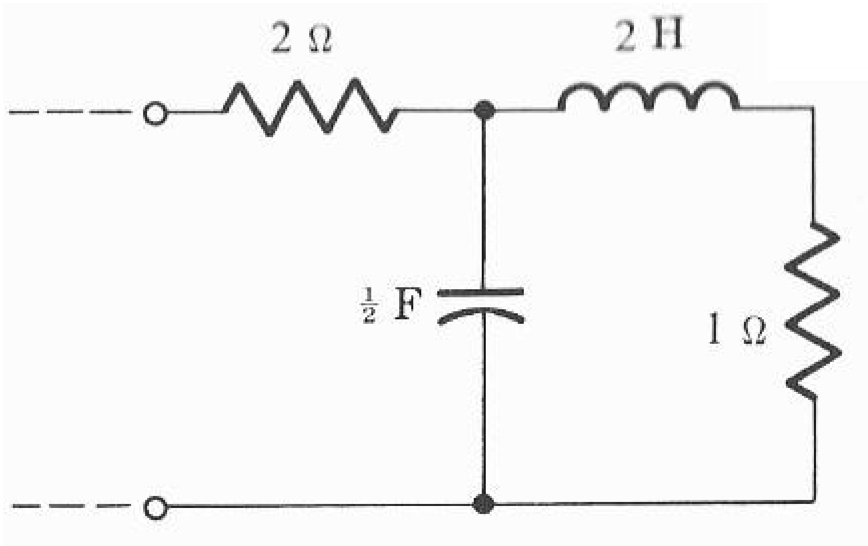
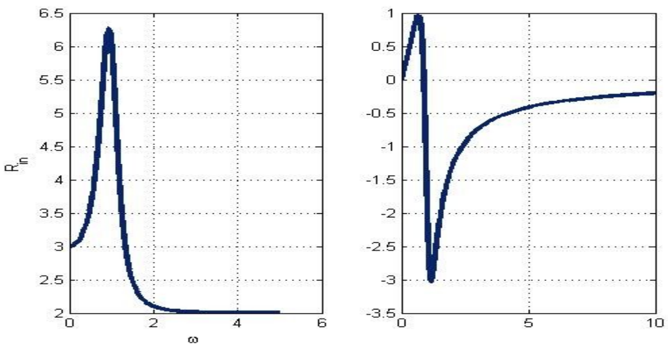



*Fig. 5.3-6*



- Determine $Z_{in}$ para w=2rad/s:

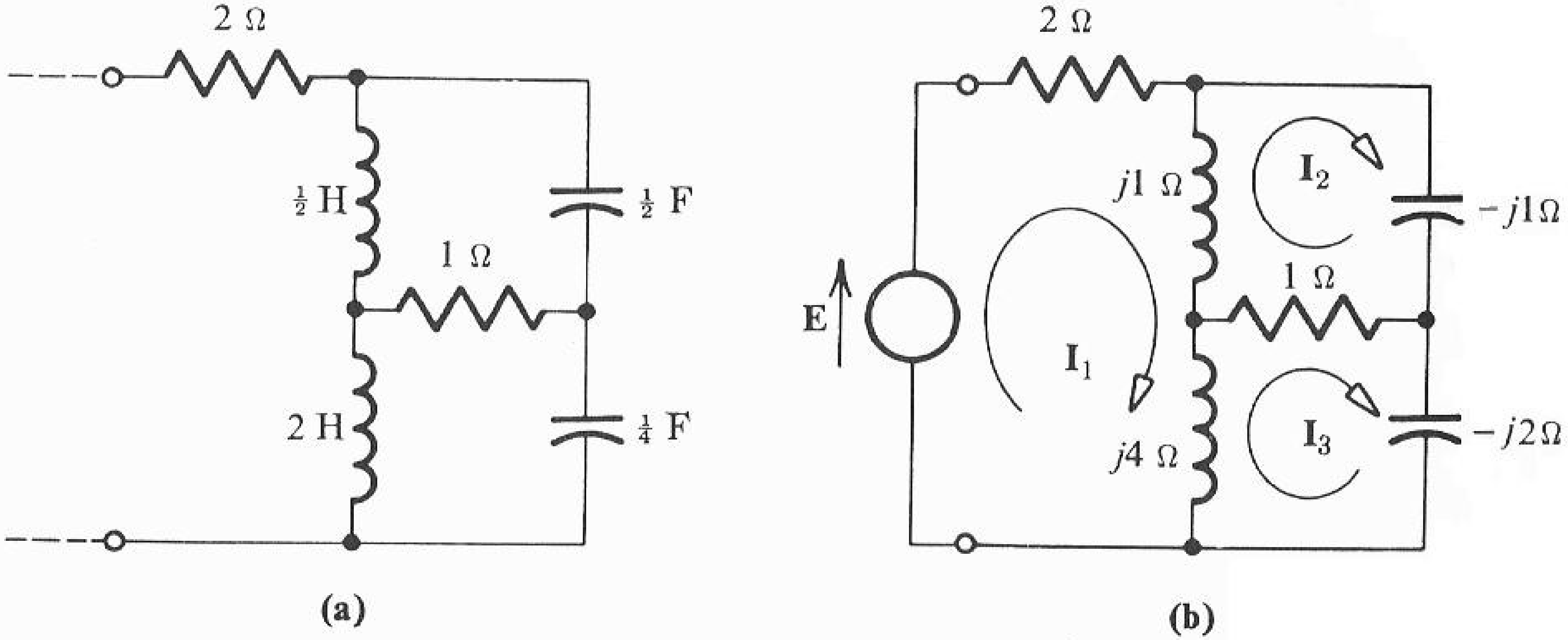
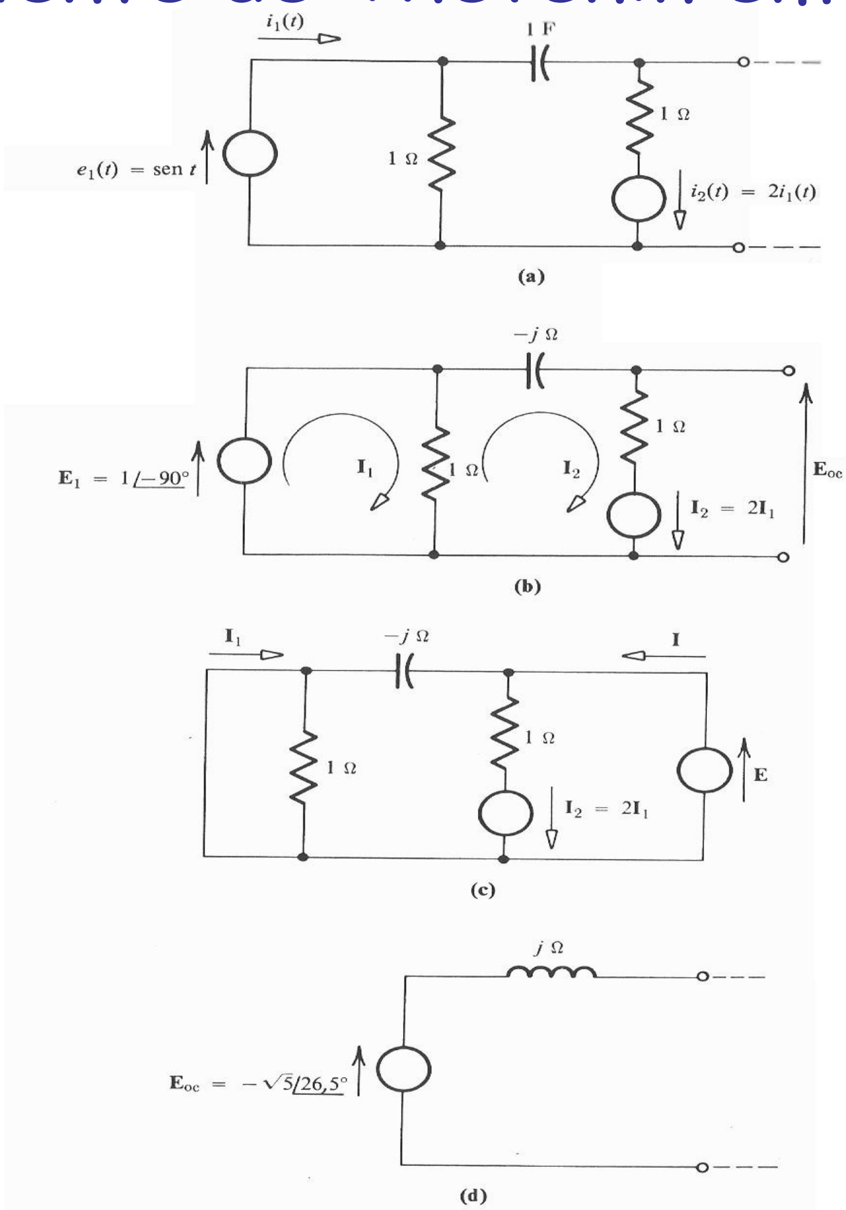



Fig. 5.3-7

- Na figura abaixo, determine o circuito equivalente de Thévenin em SSS:



- Circuitos com fontes de diferentes freqüências: use o teo. superposição!

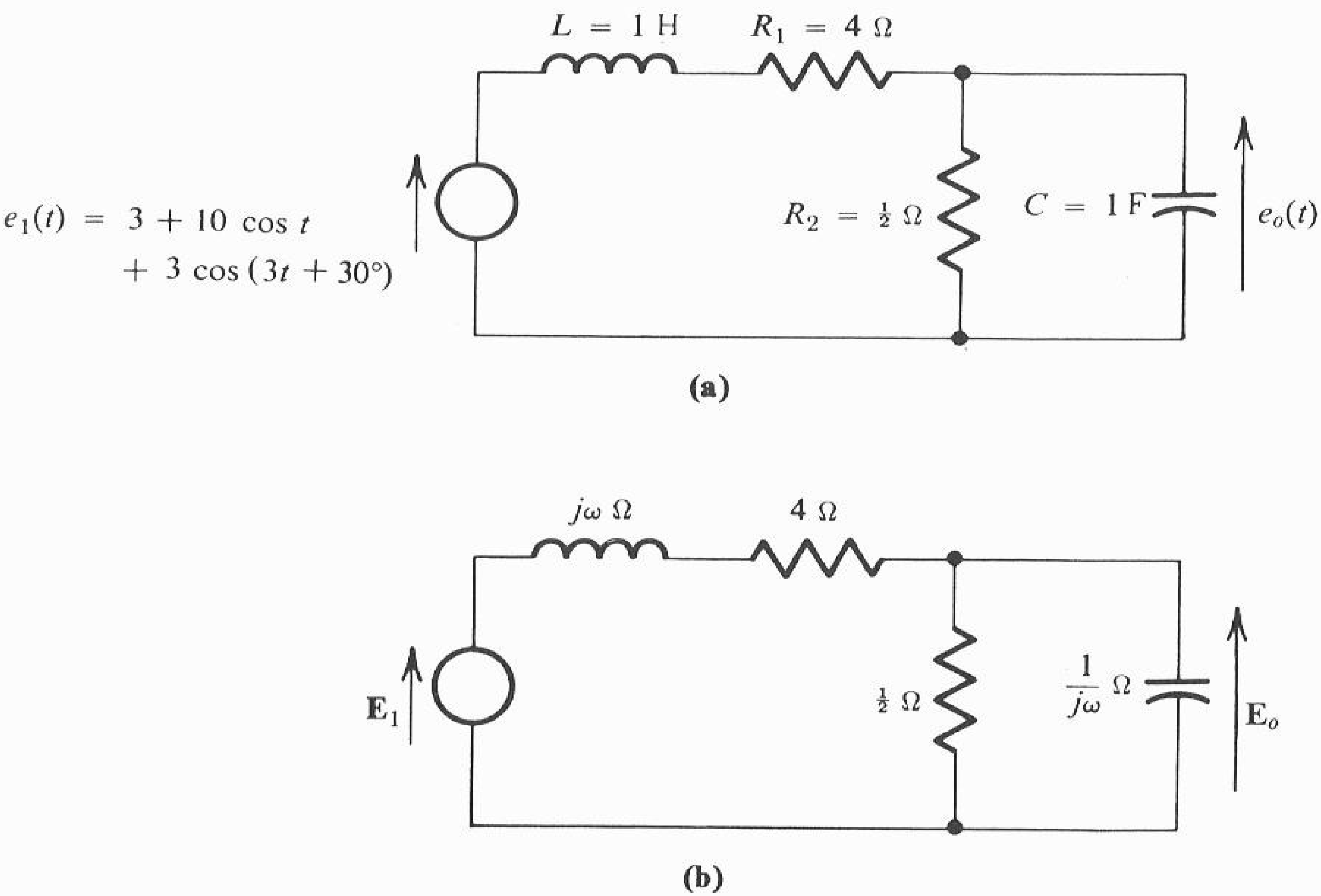
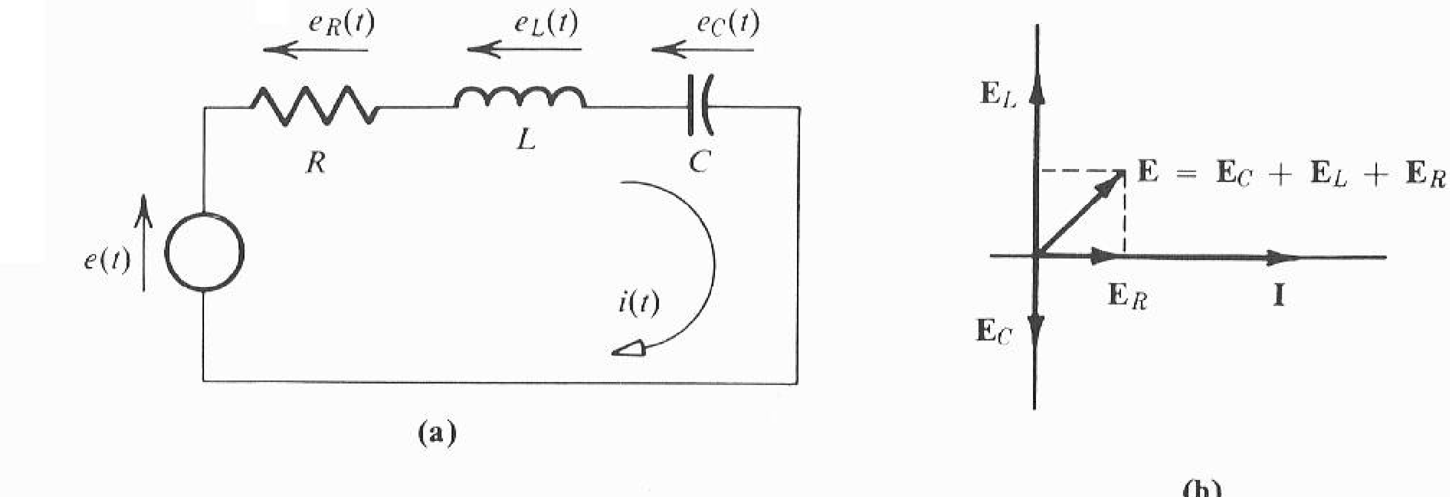



*Fig. 5.3-9*

# 5.4 Diagramas Fasoriais

- $\omega L > 1/\omega C \Rightarrow \omega^2 > 1/LC$




- 
- $\omega^2 < 1/LC$ $\omega^2 = 1/LC$ LG E x ω

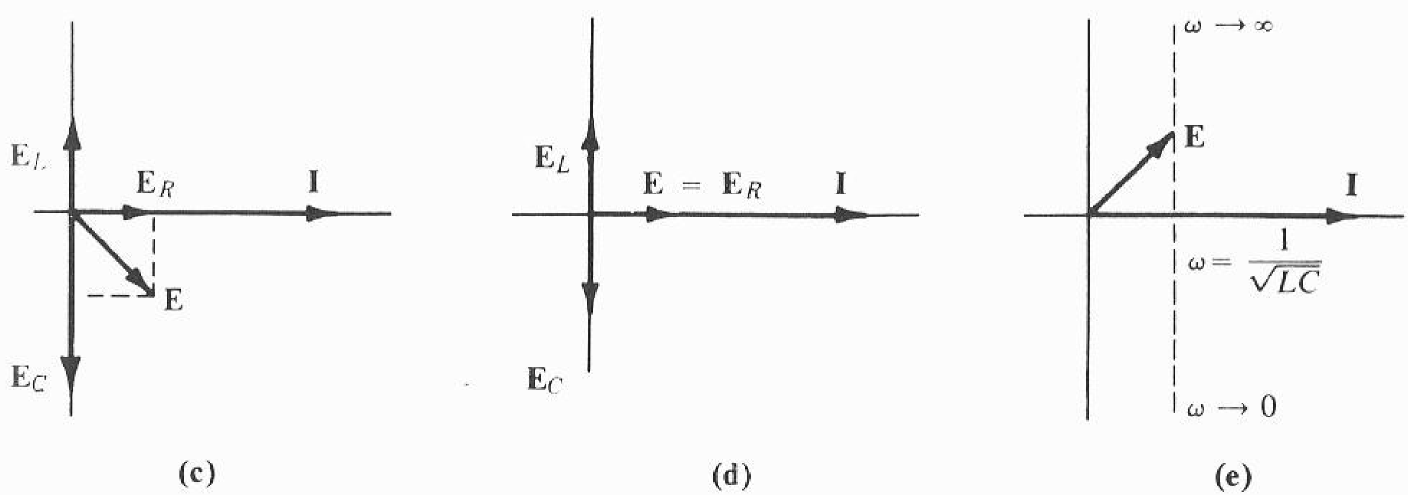



*Fig. 5.4-1*

- Dual da figura anterior:

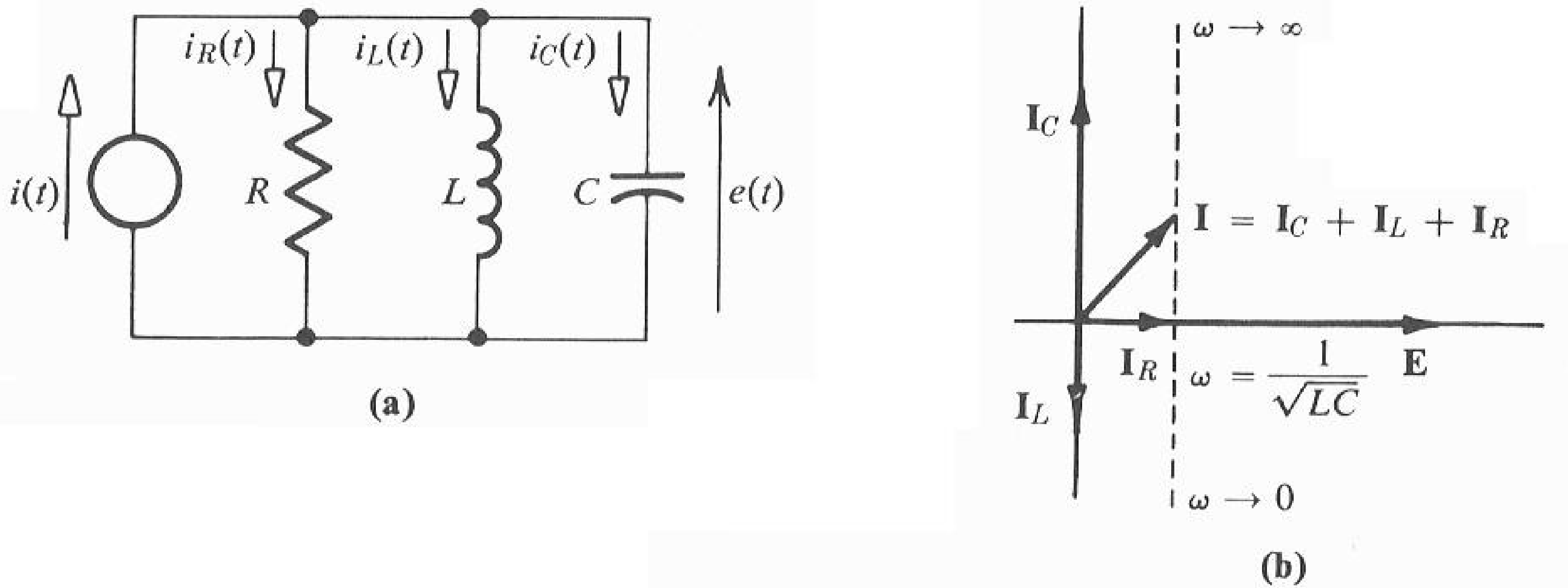



*Fig. 5.4-2*

- Vejamos um exemplo de construção de um diagrama fasorial:

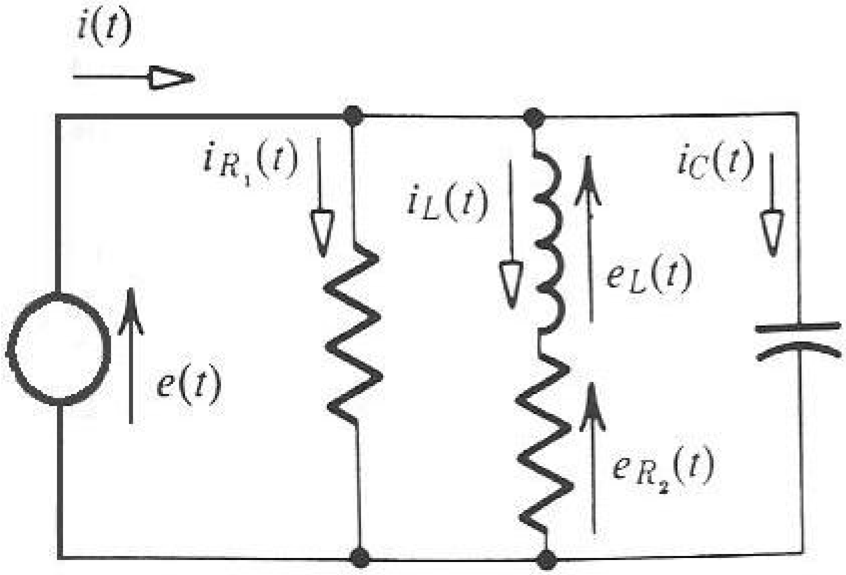



*Fig. 5.4-3* **(a)**

- Vejamos um exemplo de construção de um diagrama fasorial:

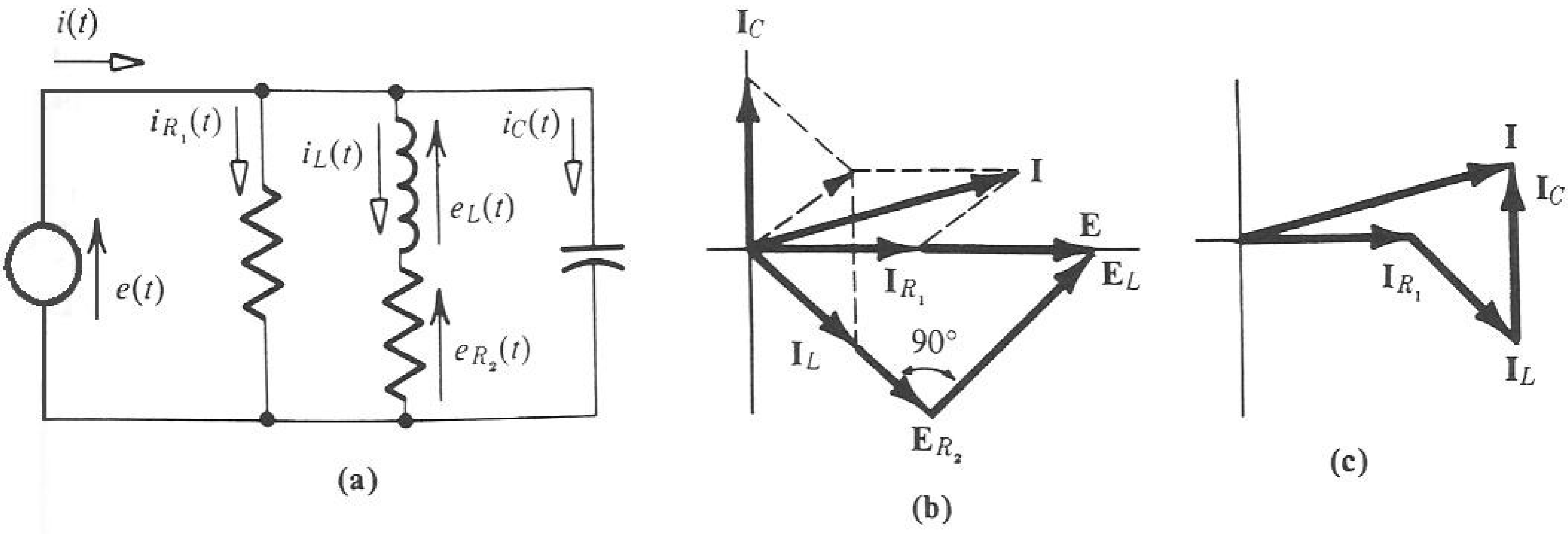



*Fig. 5.4-3*

- Para o circuito da figura abaixo, mostre por meio de um diagrama fasorial que $|E_0| = 1/2|E_1|$, mas que $E_0$ pode ser forçado a ficar atrasado de $E_1$ de um ângulo entre 0 e 180 graus por meio de uma escolha conveniente de $R_1$.

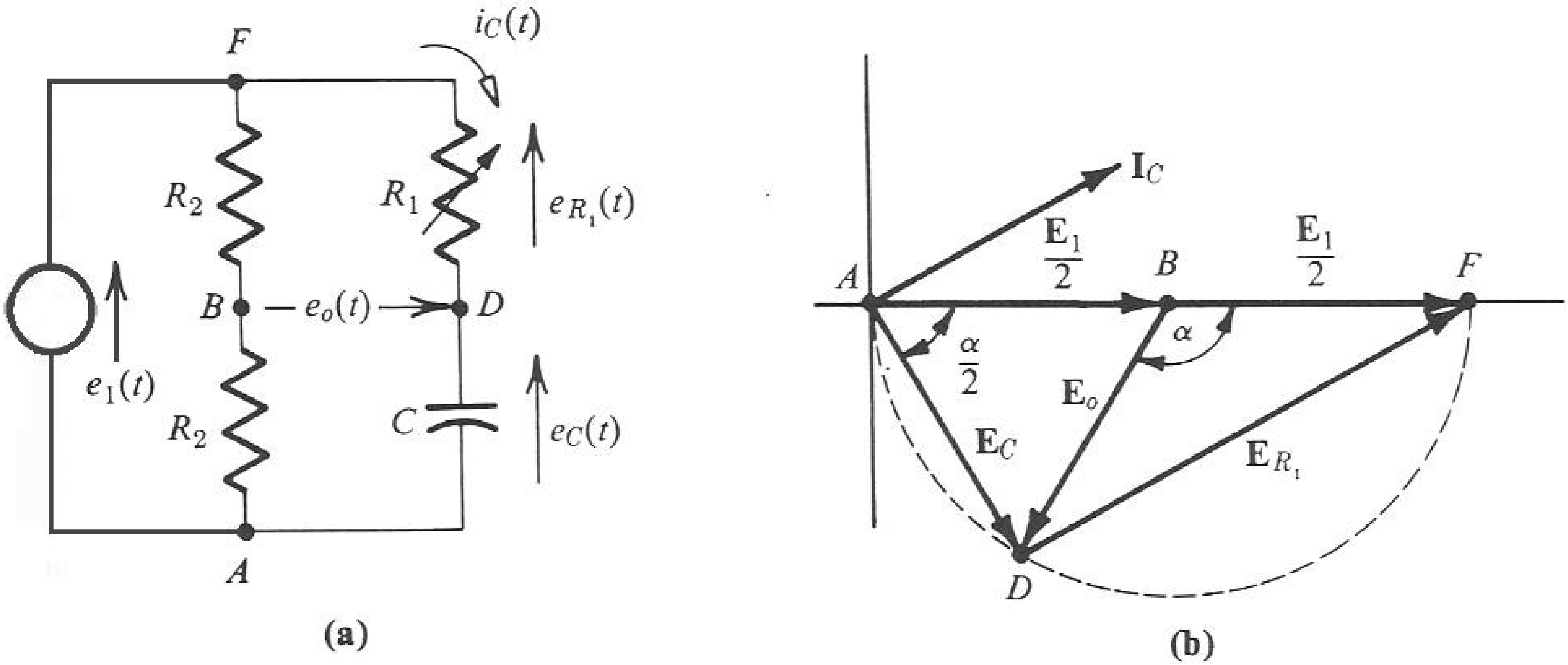



Fig. 5.4-5

Teorema: quando um valor de qualquer elemento passivo é variado, o LG da resposta é sempre circular (you guys go for the proof;-).

- Esboce o LG do fasor de corrente I quando R varia de 0 a ∞:

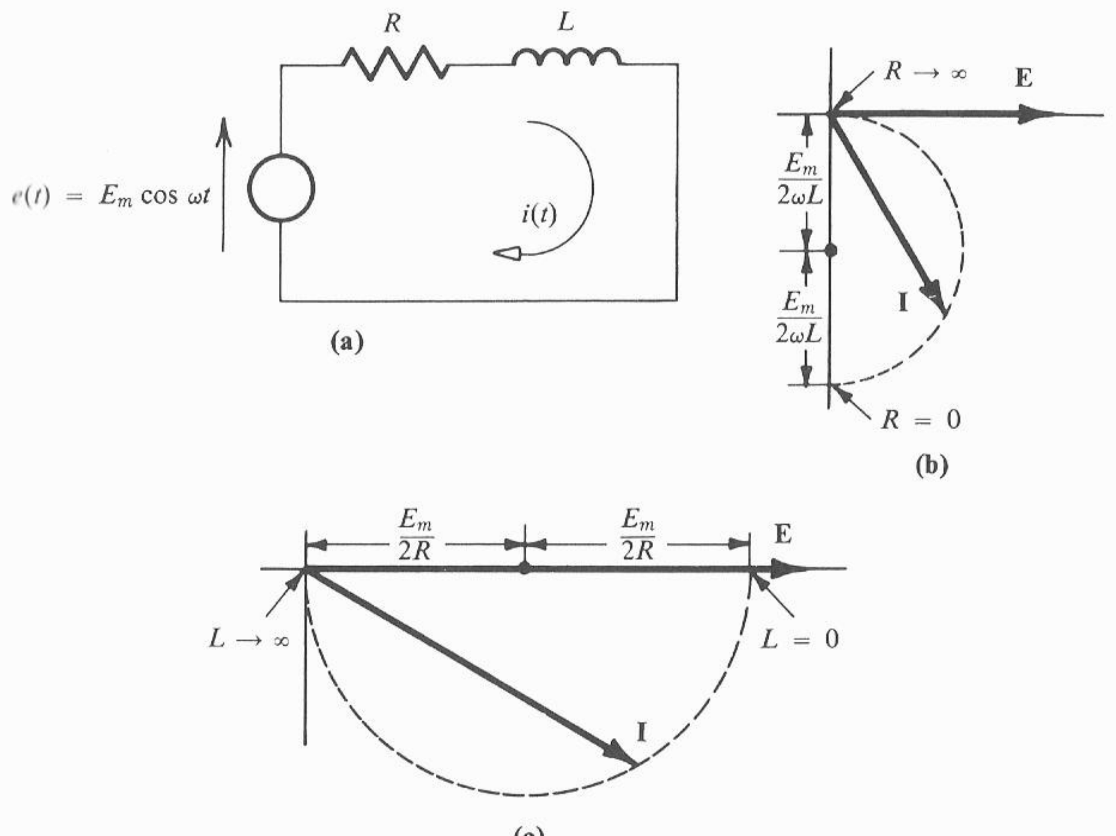



Fig. 5.4-6

- Esboce o LG do fasor de corrente I quando ω varia.

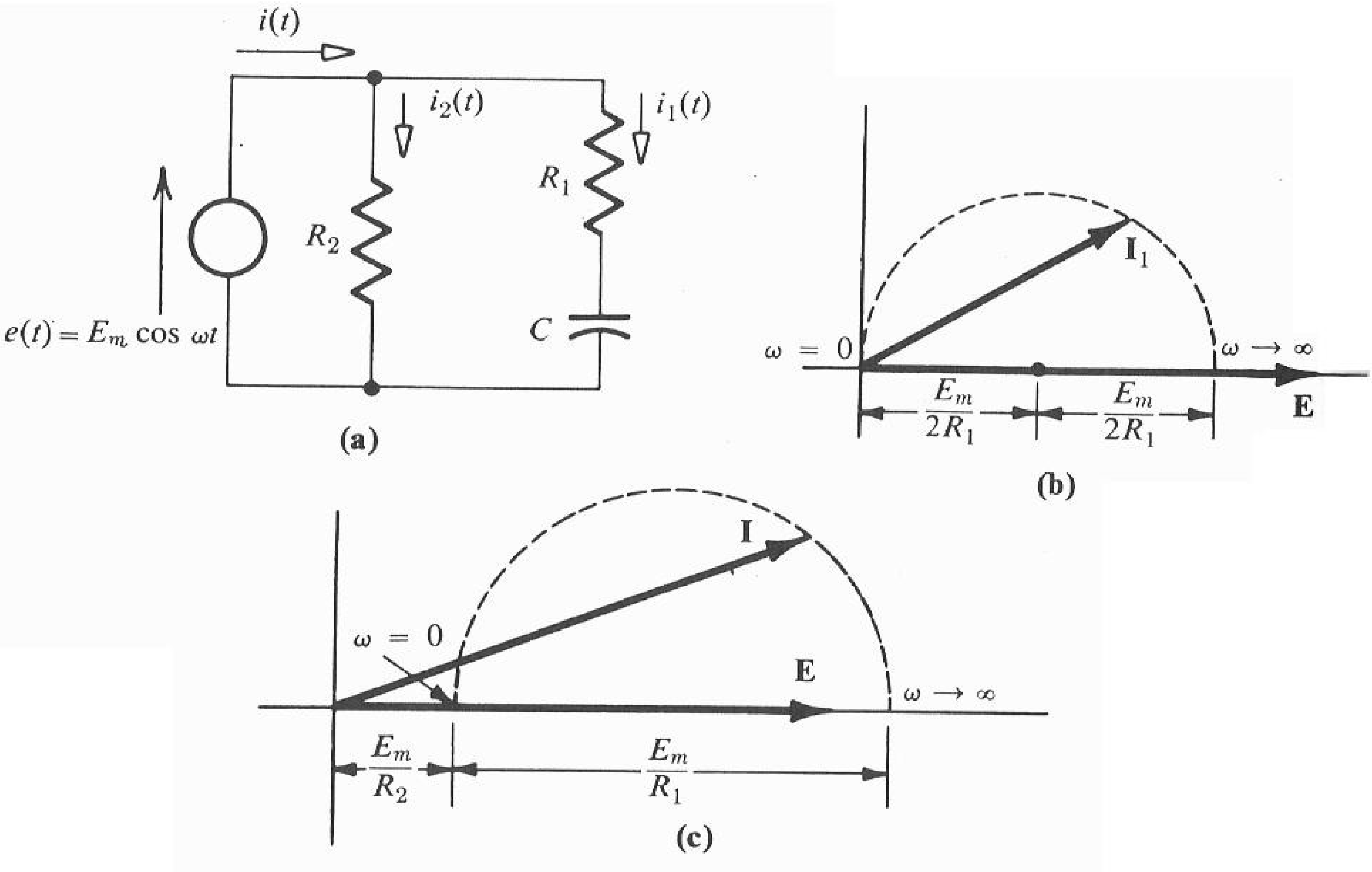



*Fig. 5.4-7*

- Combinação de termos trogonométricos por soma de fasores.

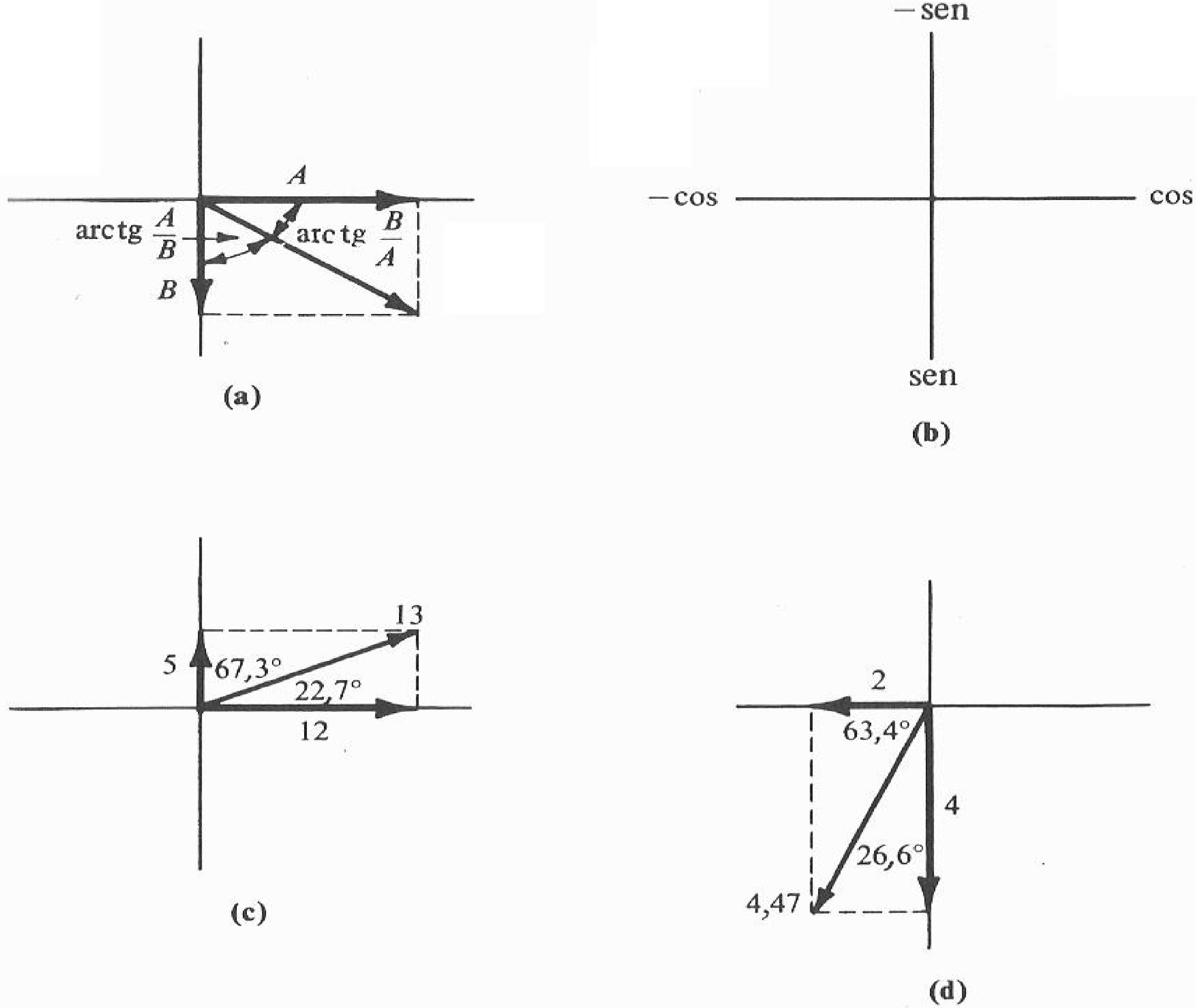



*Fig. 5.4-8*

# Problemas