Capítulo 3
Circuitos com Capacitância e Indutância

Sumário

- Respostas: Livre e ao Degrau
- Funções Singulares
- Resposta às Funções Singulares
- Representação de Sinais como Soma de Funções Singulares
- O Teorema da Convolução
- Interpretação Gráfica da Convolução

Introdução

- No capítulo anterior, entrada e saída são proporcionais e a saída, em qualquer instante, depende somente da entrada naquele instante.
- Capacitância e indutância são elementos com memória e portanto a resposta num dado instante t_o dependerá de valores de entrada para $t \leq t_o$.
- Circuitos com tais elementos são descritos por equações diferenciais (veremos aqui de primeira e segunda ordem).
- Consideraremos aqui, como entrada: o degrau unitário $u(t)$, $t\ u(t)$ e o pulso $u(t) - u(t-\Delta)$.

3.1 Respostas: Livre e ao Degrau

Tensão nos terminais de um capacitor e corrente passando por uma indutância não podem se alterar instantaneamente.

- $w(t) = Ce^2(t)/2$ (capacitor)

  ou $Li^2(t)/2$ (indutor)
- A energia, $w(t)$, se armazena ou se descarrega (de modo não instantâneo)
- $p(t) = e(t)\, i(t) = dw/dt$

  => $e(t)$ no capacitor e $i(t)$ no indutor não podem se alterar instantaneamente

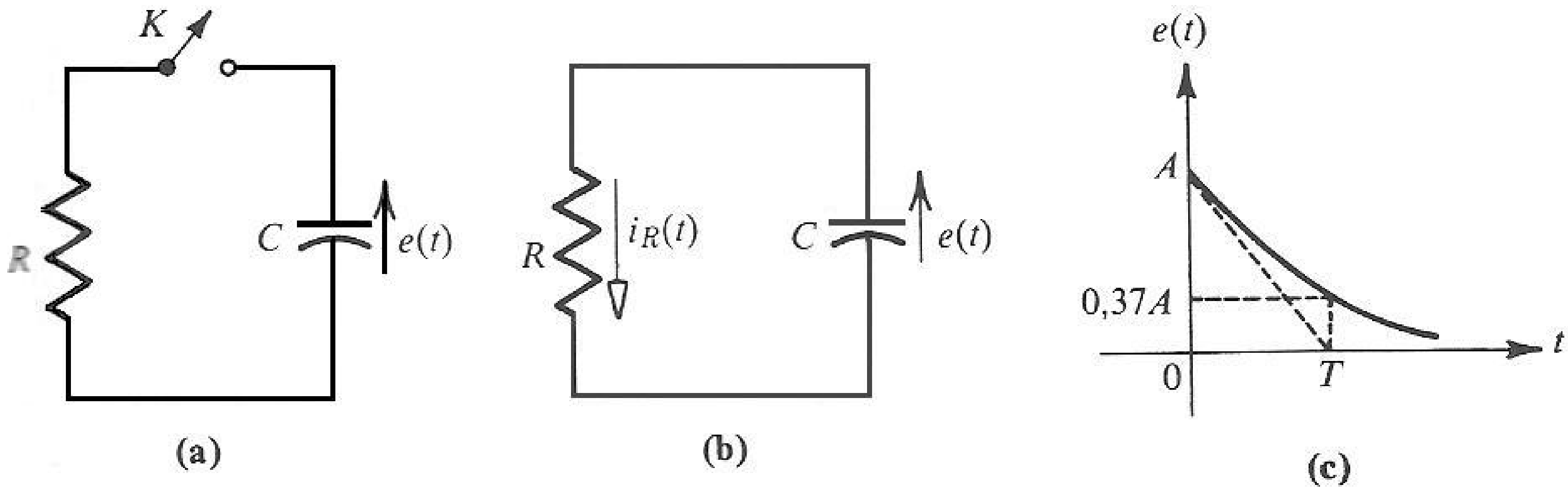


Fig. 3.1-2

Exemplo 3.1.1: $e(0_-)=A$ e K fecha em t=0; determine e(t).

- Como o circuito visto na figura é excitado pela energia armazenada na capacitância (e não por uma fonte externa), a resposta é denominada resposta livre ou comportamento natural.
- Para alguns circuitos, a resposta livre tem a forma $Ke^{-t/T}$, onde T é chamado constante de tempo.
- T corresponde ao tempo para a resposta se reduzir a Ke-1, aproximadamente 37%.
- É também o tempo de uma reta partindo de t=0 e com declividade igual à tangente da curva e(t) em t=0 se reduziria a zero (ver figura, letra c).

- Abaixo está o exemplo de um circuito com uma fonte externa; a corrente i(t), devido à existência de um "degrau" ou descontinuidade no gráfico de e(t), é frequentemente chamada de resposta ao degrau.

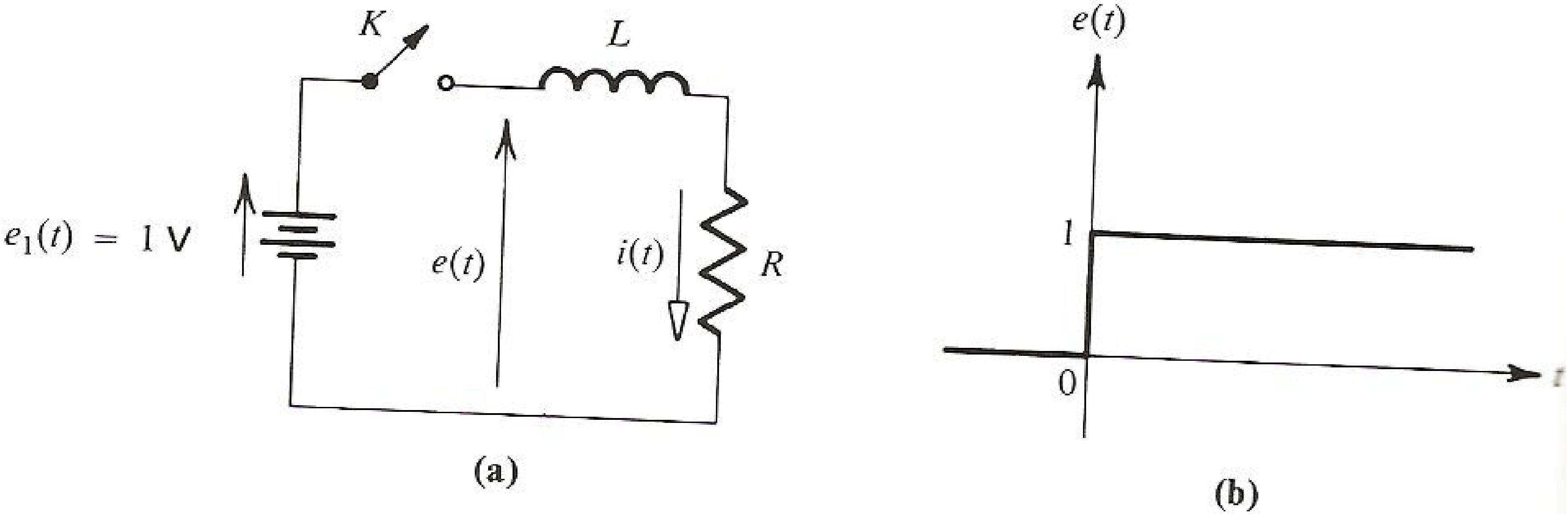


Fig. 3.1-3

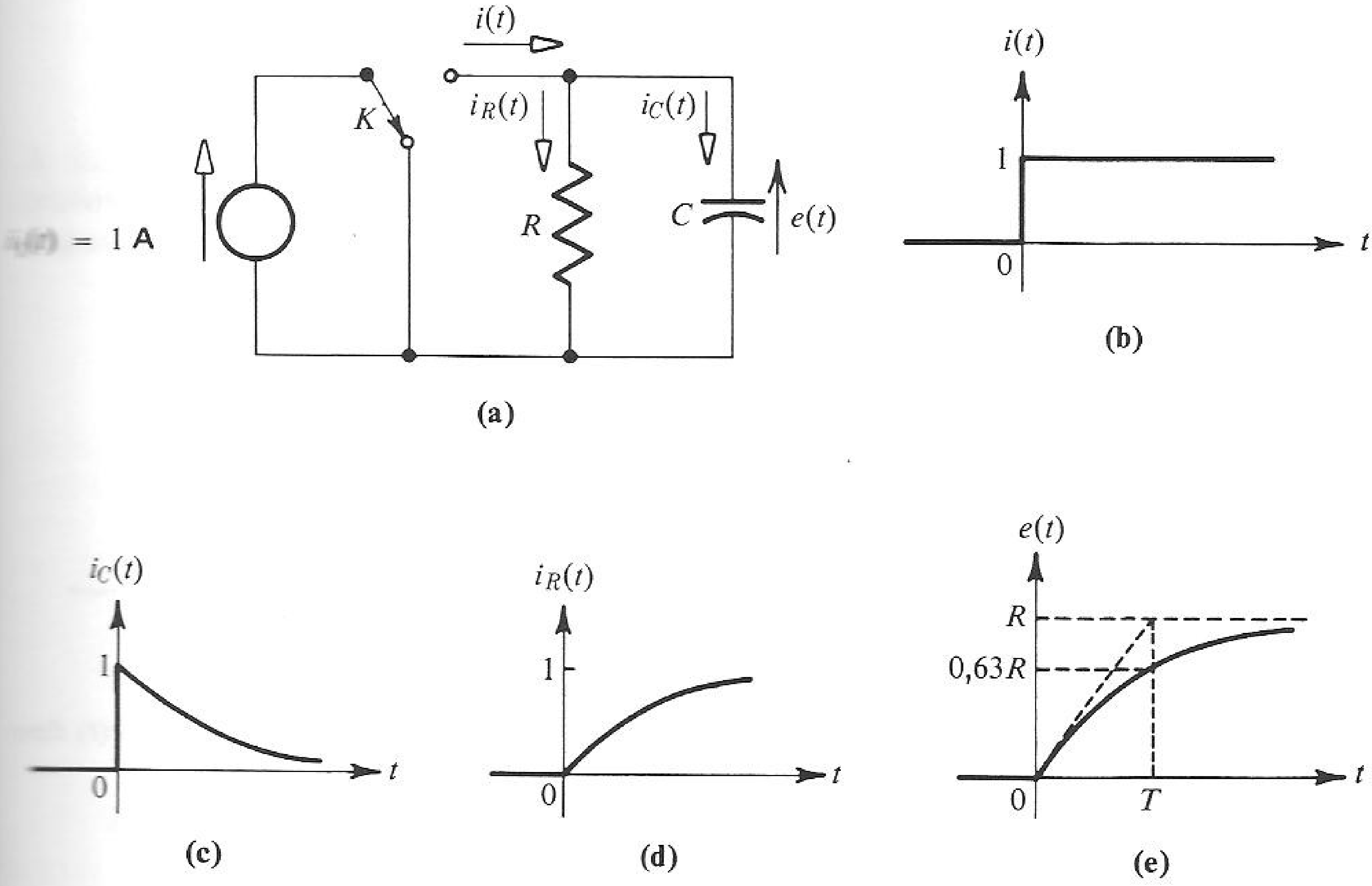


Fig. 3.1-4

Fig. 3.1-4: em t<0, K está na posição inferior e e(t)=0. Em t=0, K sobe, determine e(t).

3.1 Funções Singulares

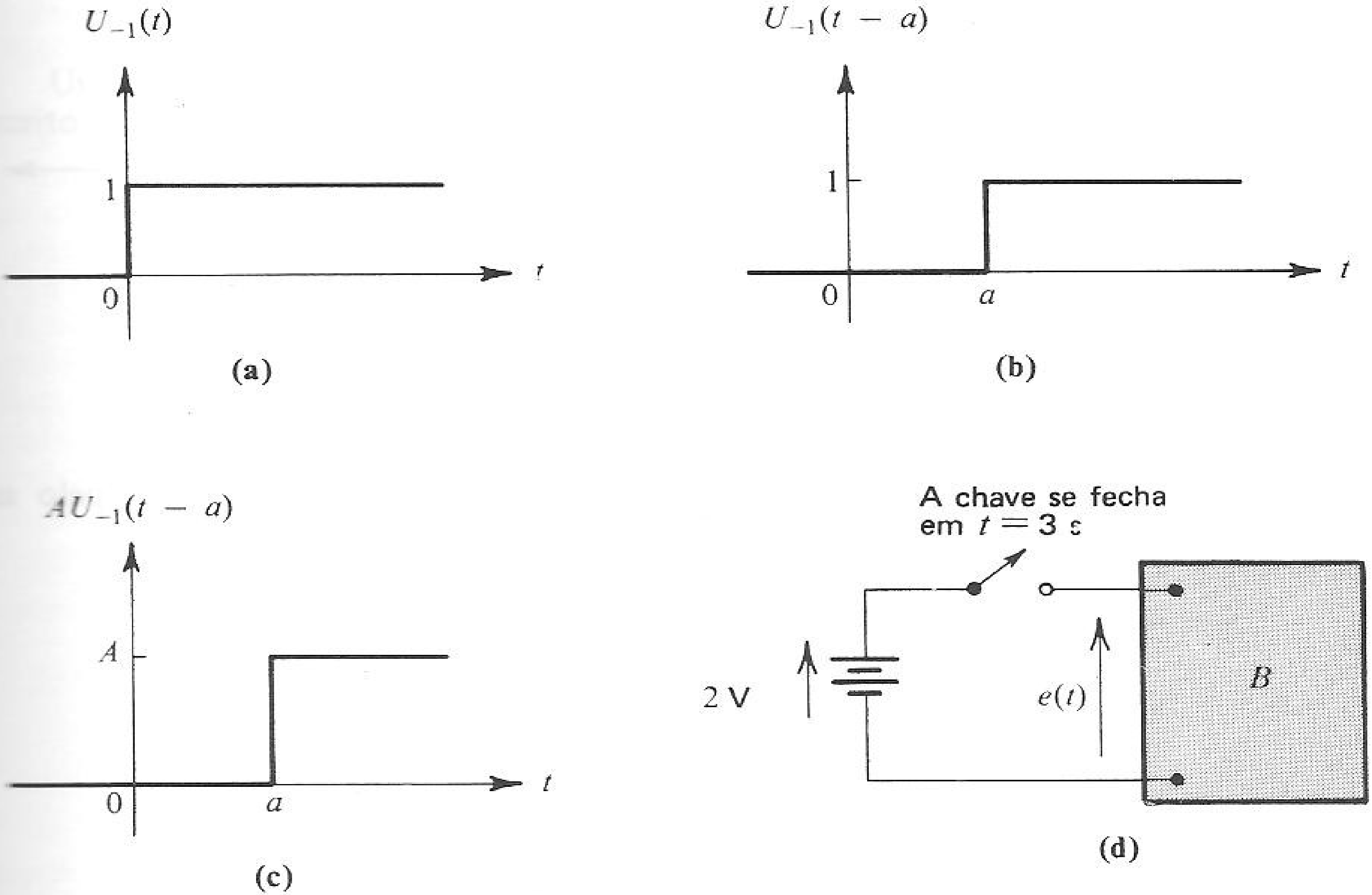
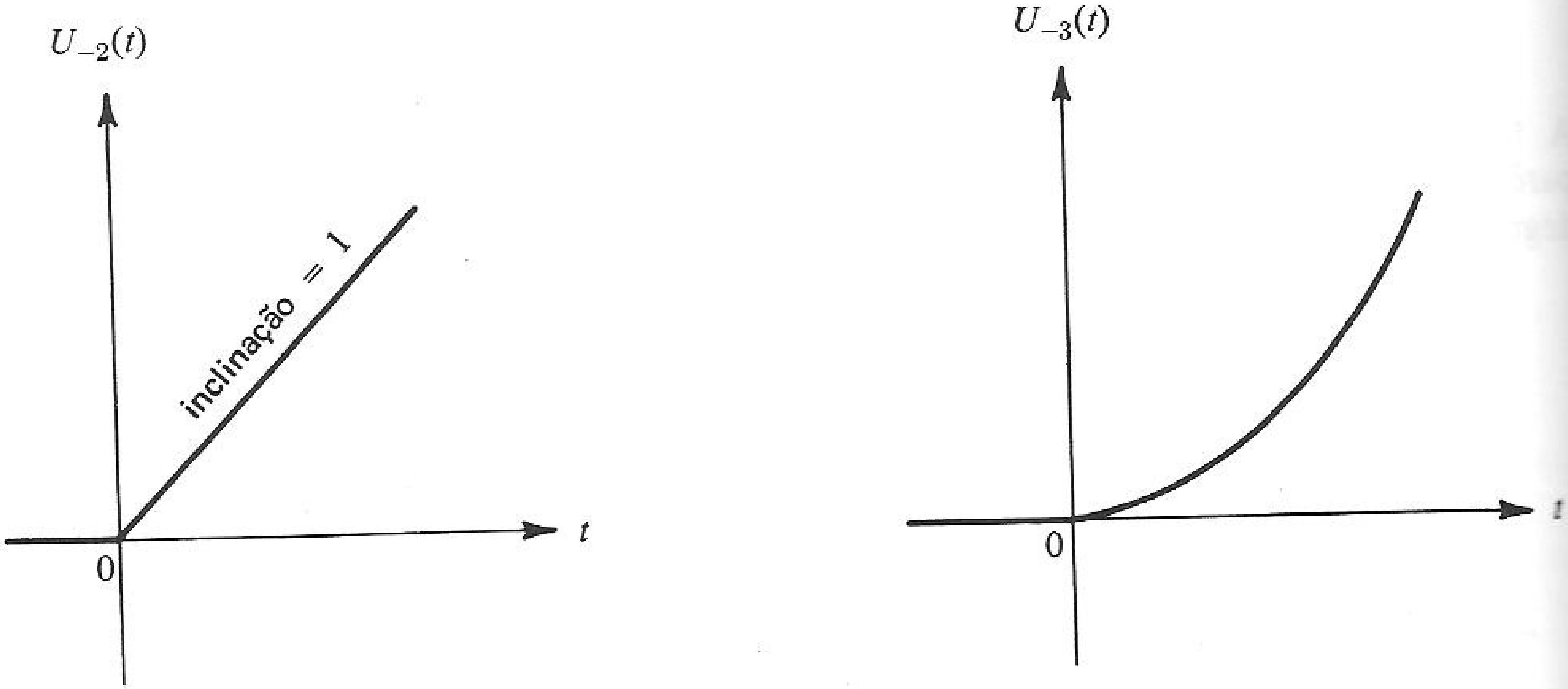


Fig. 3.2-1

Degrau unitário



(a)

(b)

Fig. 3.2-2

Rampa unitária

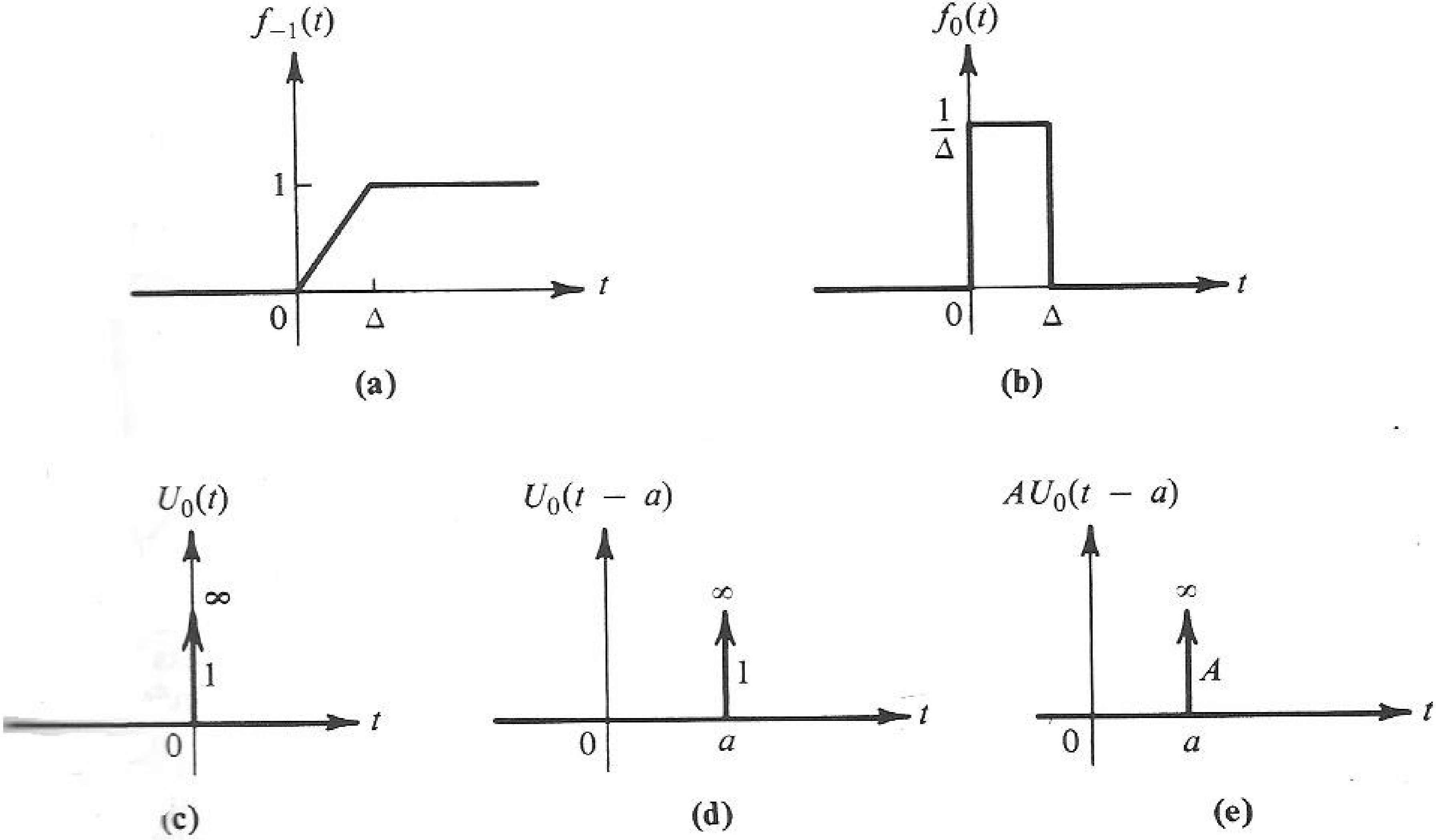


Fig. 3.2-3

Impulso unitário

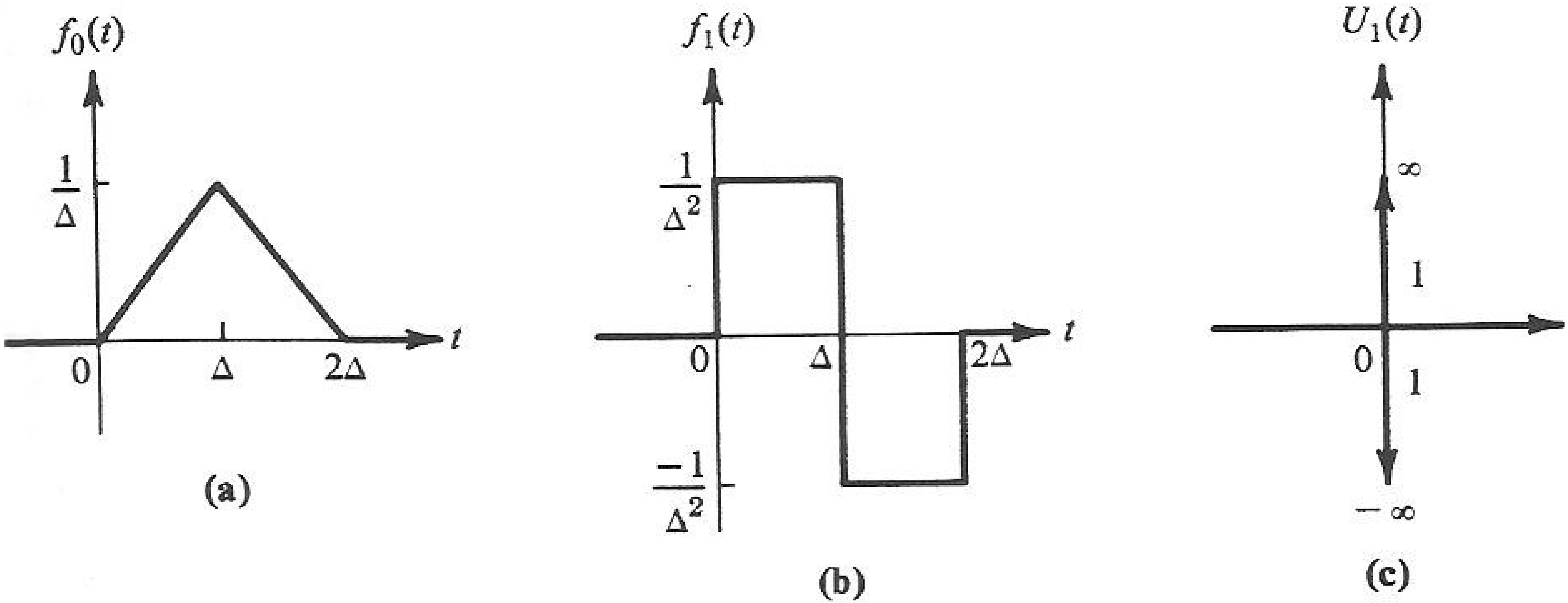


Fig. 3.2-4

Doublet unitário

3.3 Resposta às Funções Singulares

- A resposta de alguns circuitos ao degrau unitário já foi vista.

- Lembre-se que num capacitor:

  $i = C\, de/dt$ $\qquad$ $w(t) = Ce^2/2$

- ... e num indutor:

  $e = L\, di/dt$ $\qquad$ $w(t) = Li^2/2$

Teorema (3.3-1)

- Se todas as tensões e correntes permanecem finitas, a tensão nos terminais de uma capacitância e a corrente passando por uma indutância não poderão alterar instantaneamente.

Teorema (3.3-2)

- Um impulso unitário de corrente entrando em uma capacitância altera sua tensão instantaneamente de 1/C V, enquanto que um impulso unitário de tensão, aplicado nos terminais de uma indutância, altera a corrente que passa por ela, instantaneamente, de 1/L A.

Teorema (3.3-3)

- A tensão nos terminais de uma capacitância e a corrente que passa em uma indutância devem sempre permanecer finitas (a energia armazenada deve ser finita).

  Um circuito que precisar violar este teorema para satisfazer as leis dos elementos, KVL e KCL é considerado insolúvel.

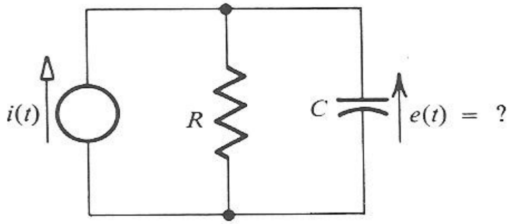
- Resposta ao impulso:

  $h(t) = y(t)$ quando $x(t) = U_0(t)$

- Resposta ao degrau:

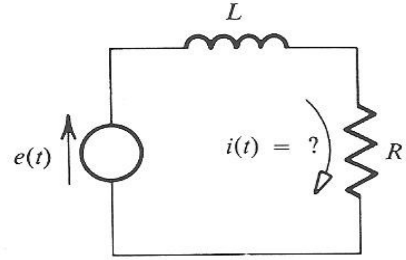
  $r(t) = y(t)$ quando $x(t) = U_{-1}(t)$

- Tais respostas assumem que o circuito não contém energia armazenada anteriormente à aplicação da função singular.



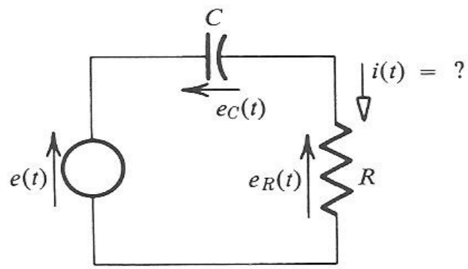
(a) $h(t) = \frac{1}{C}\epsilon^{-t/RC}U_{-1}(t)$

$r(t) = R(1 - \epsilon^{-t/RC})U_{-1}(t)$



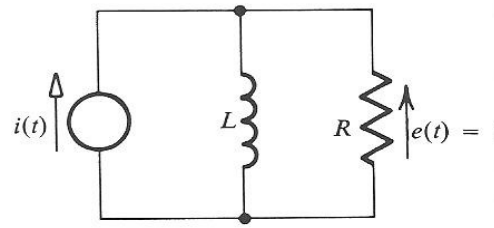
(b) $h(t) = \frac{1}{L}\epsilon^{-(R/L)t}U_{-1}(t)$

$r(t) = \frac{1}{R}(1 - \epsilon^{-(R/L)t})U_{-1}(t)$



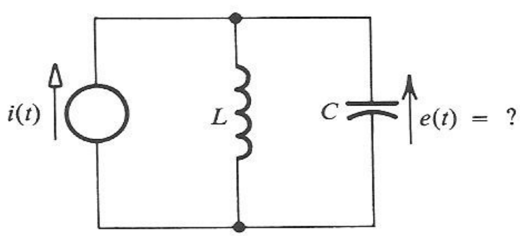
(c) $h(t) = \frac{1}{R}U_0(t) - \frac{1}{R^2C}\epsilon^{-t/RC}U_{-1}(t)$

$r(t) = \frac{1}{R}\epsilon^{-t/RC}U_{-1}(t)$



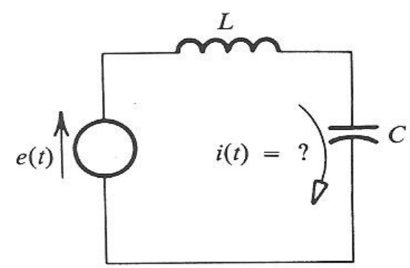
(d) $h(t) = RU_0(t) - \frac{R^2}{L}\epsilon^{-(R/L)t}U_{-1}(t)$

$r(t) = R\epsilon^{-(R/L)t}U_{-1}(t)$



(e) $h(t) = \frac{1}{C}\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}U_{-1}(t)$

$r(t) = \sqrt{\frac{L}{C}}\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{\sqrt{LC}}U_{-1}(t)$



(f) $h(t) = \frac{1}{L}\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}U_{-1}(t)$

$r(t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{\sqrt{LC}}U_{-1}(t)$

Fig. 3.3-1

Respostas ao degrau e ao impulso de vários circuitos simples.

- Se x(t) e y(t) forem a entrada e a saída de um circuito linear SEM ENERGIA INICIALMENTE ARMAZENADA, pode-se mostrar que a resposta à nova entrada dx/dt será dy/dt.
- Se a resposta for derivada (ou integrada), assim também será a resposta:

$$h(t)=d\,r\frac{(t)}{dt}\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)\,d\lambda$$

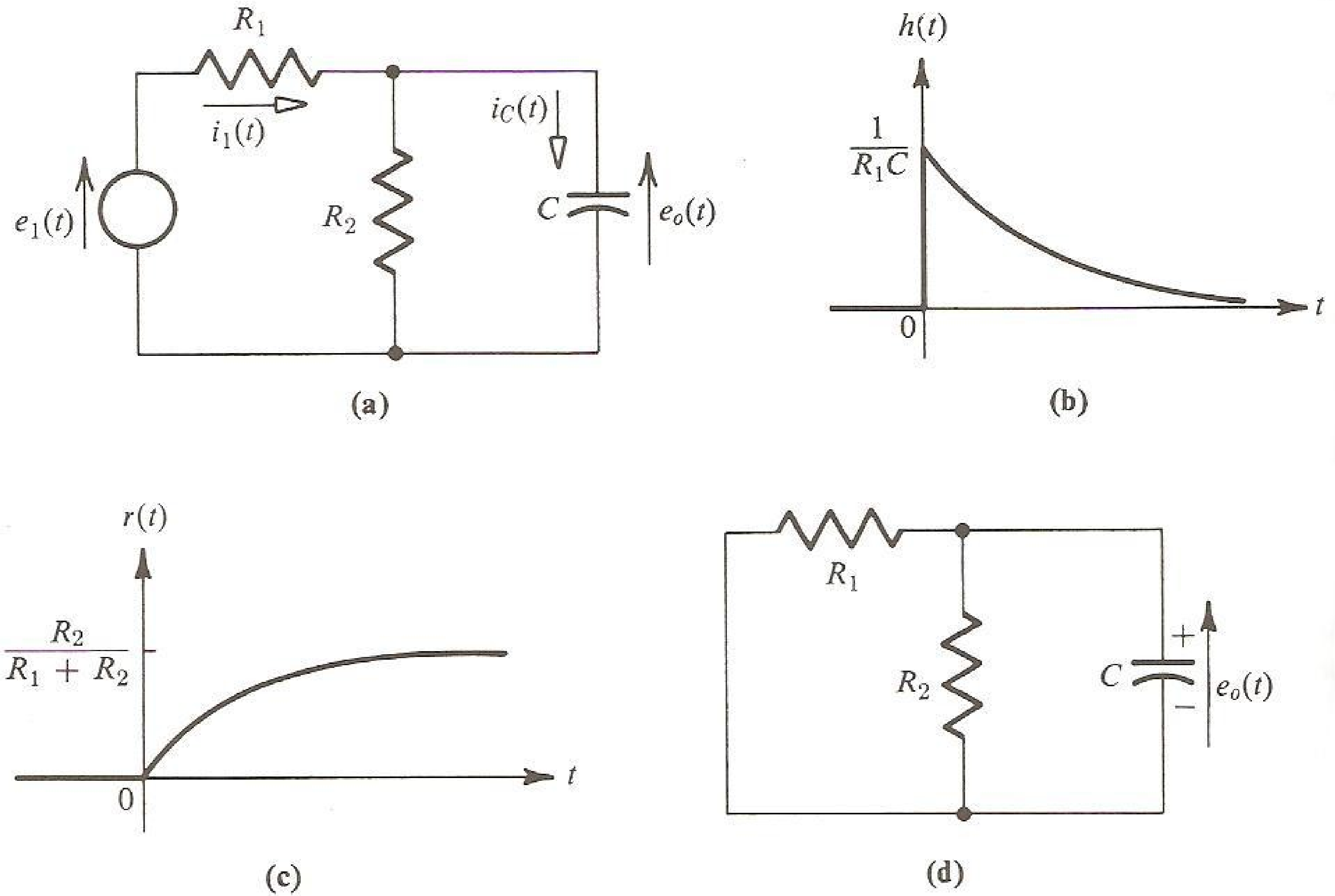


Fig. 3.3-3

Determine e esboce as respostas ao degrau e ao impulso.

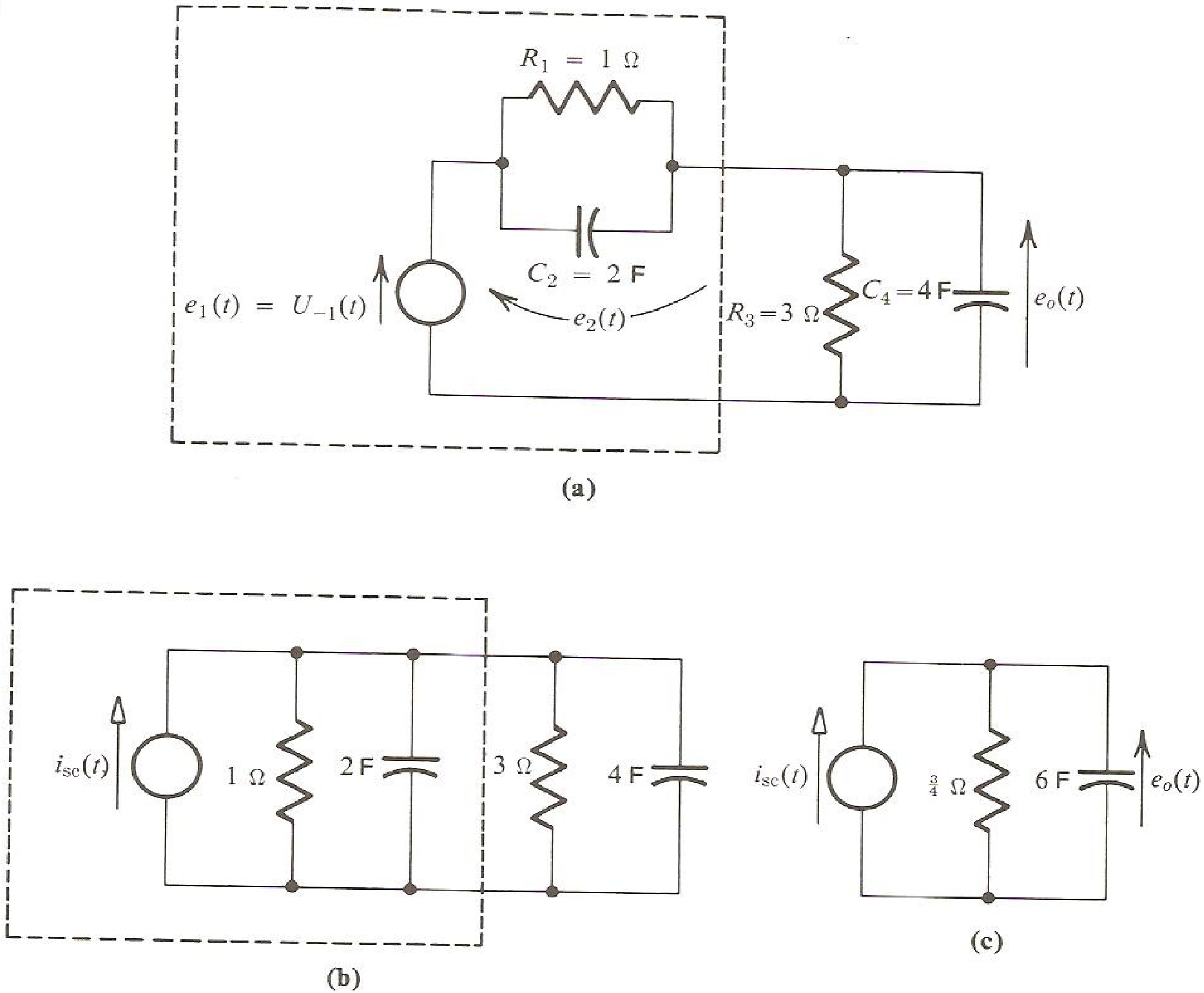


Fig. 3.3-5

Os Teoremas de Thévenin, Norton e da Superposição são válidos e podem facilitar.

Na aplicação dos teoremas, qualquer energia inicialmente armazenada deve ser tratada como qualquer outra fonte independente de energia. Seja $e_0(0_-)=2V$, determine $e_o(t)$.

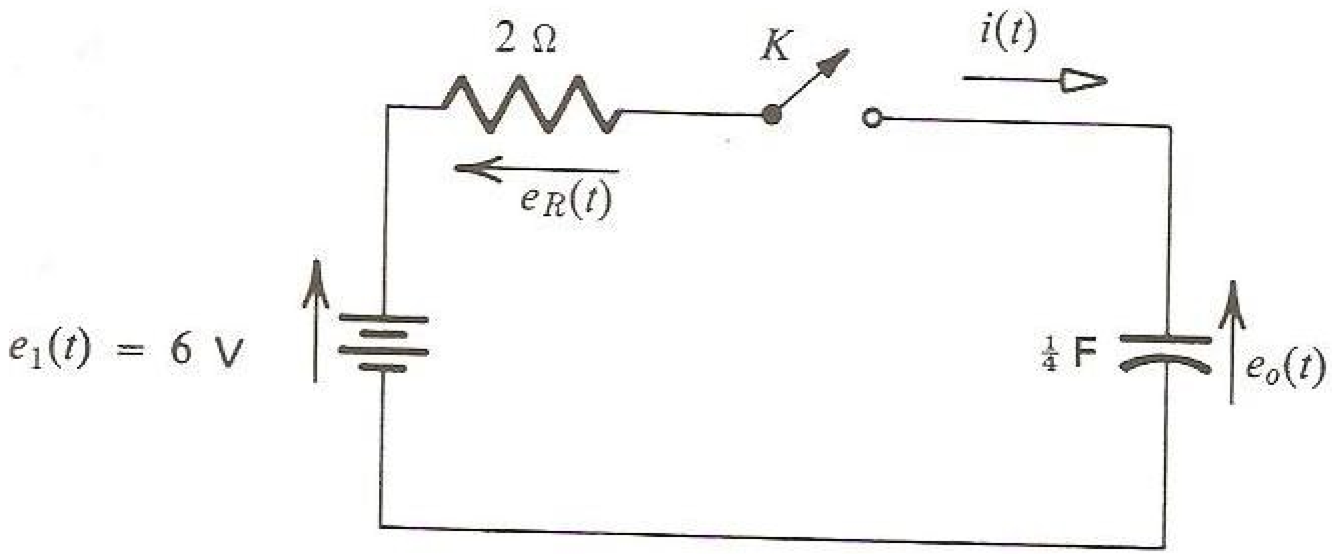


Fig. 3.3-6

Equivalente Thévenin e Norton de um capacitor carregado com e(0+):

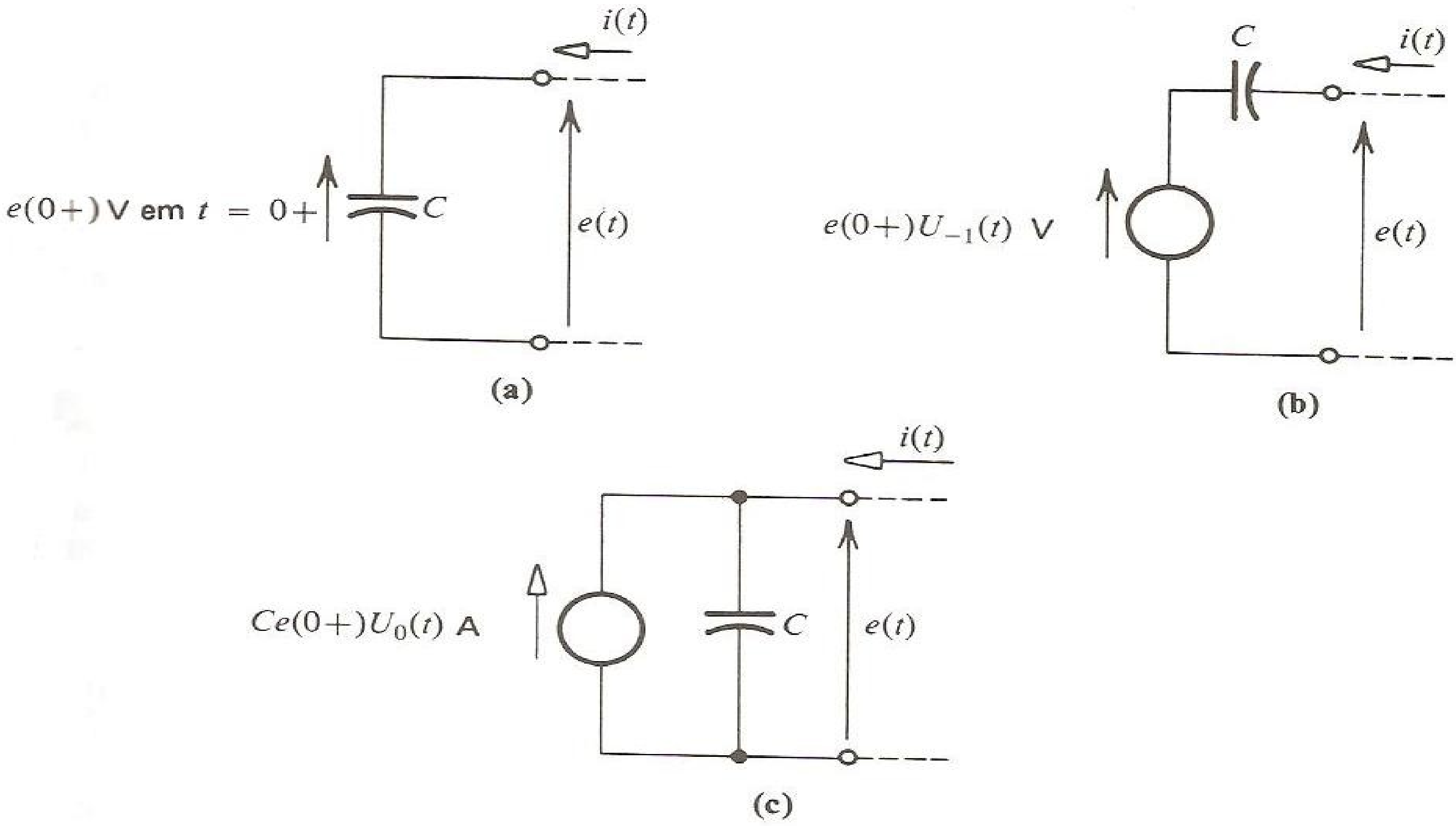


Fig. 3.3-7

Equivalente Thévenin e Norton de um indutor com uma corrente inicial i(o+):

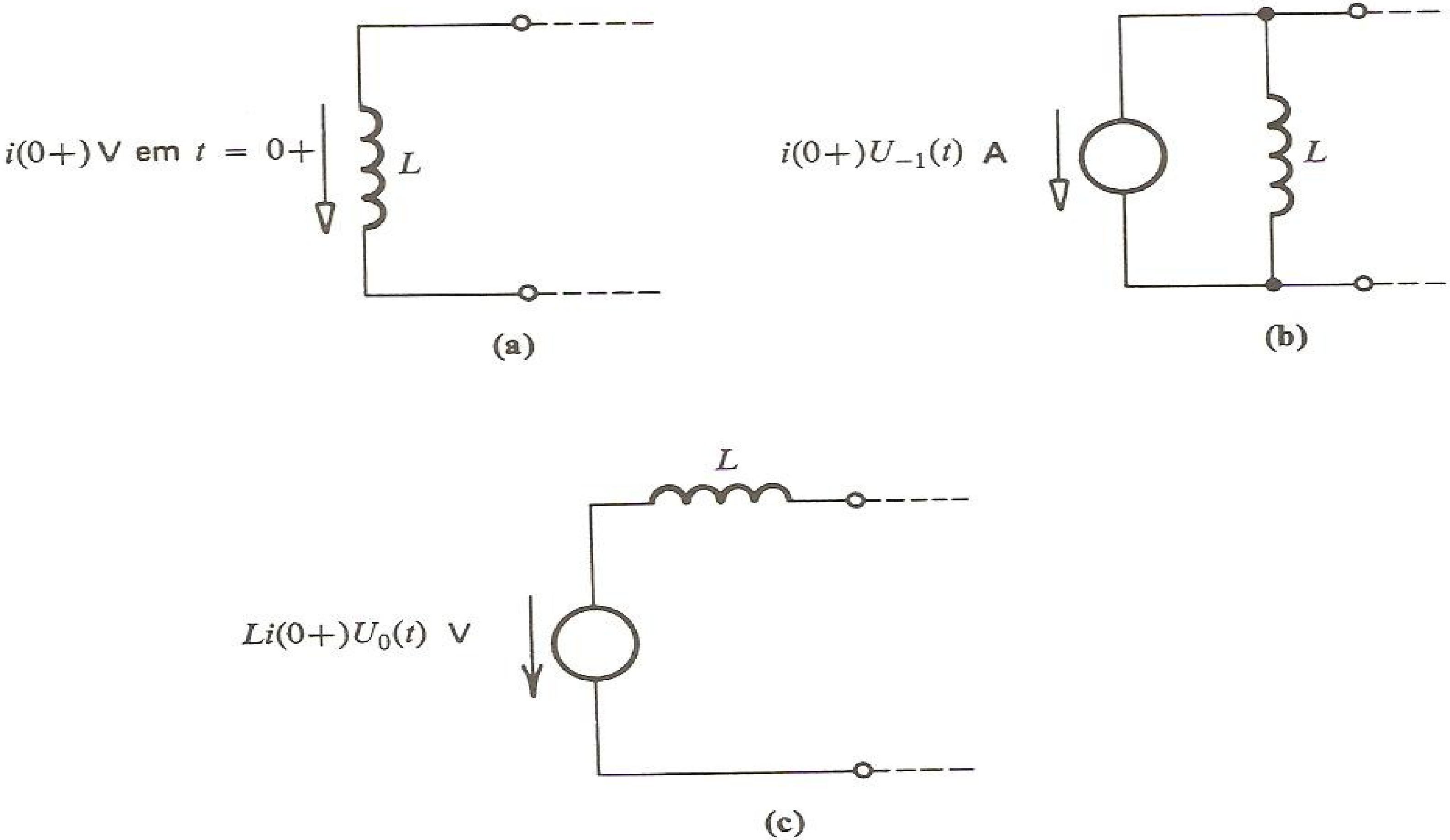


Fig. 3.3-8

3.4 Representação de Sinais como Soma de Funções Singulares

Exemplo: determine a resposta e(t) do circuito

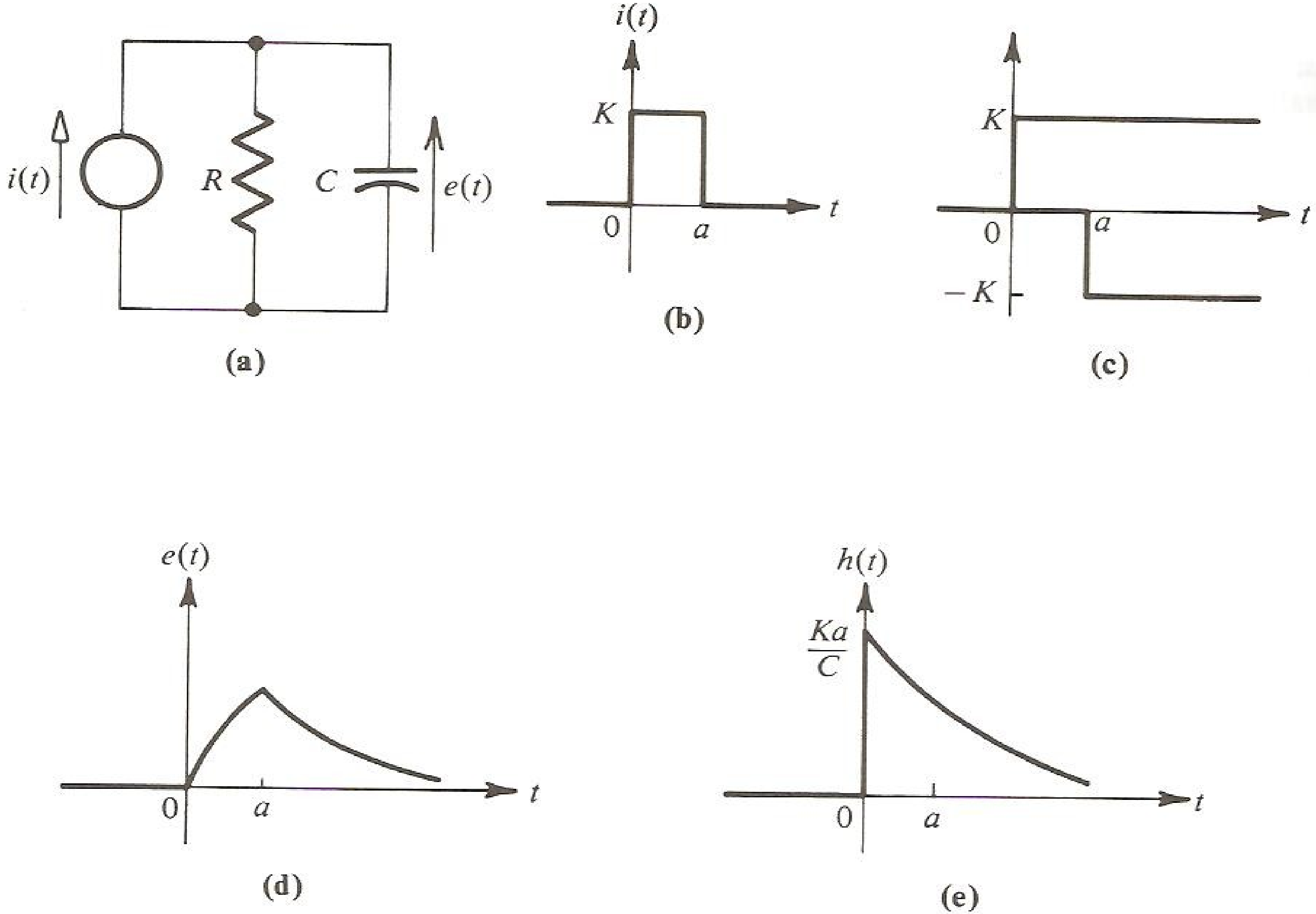


Fig. 3.4-1

•Nem toda forma de onda pode ser representada exatamente por um número finito de funções singulares.

•Duas possíveis aproximações são apresentadas abaixo:

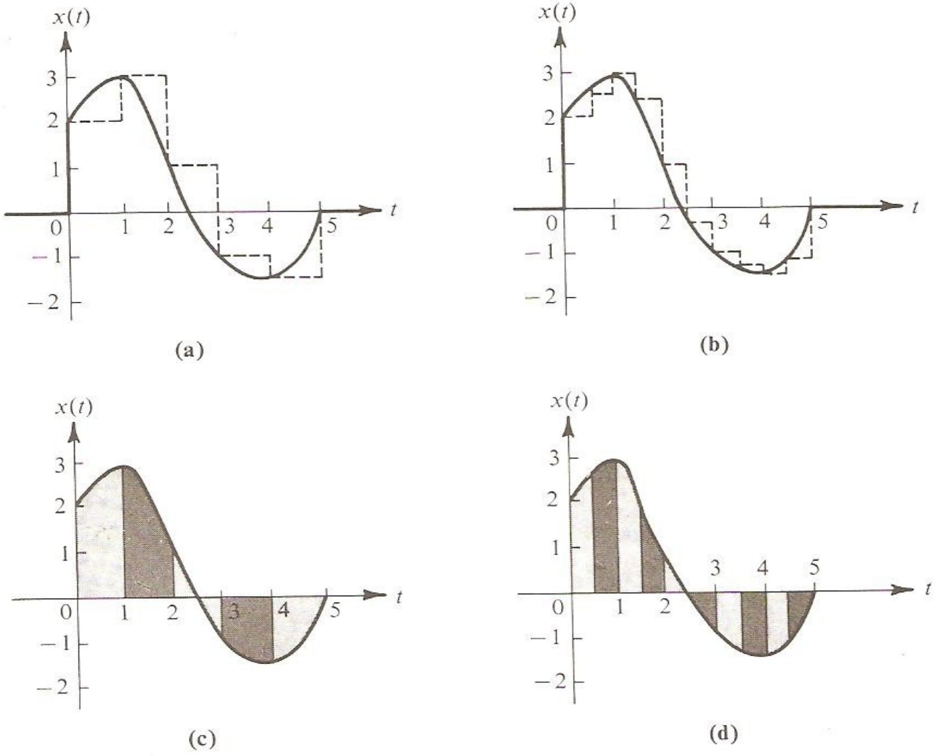


Fig. 3.4-4

3.5 O Teorema da Convolução

- Representemos uma forma de onda pela aproximação vista.

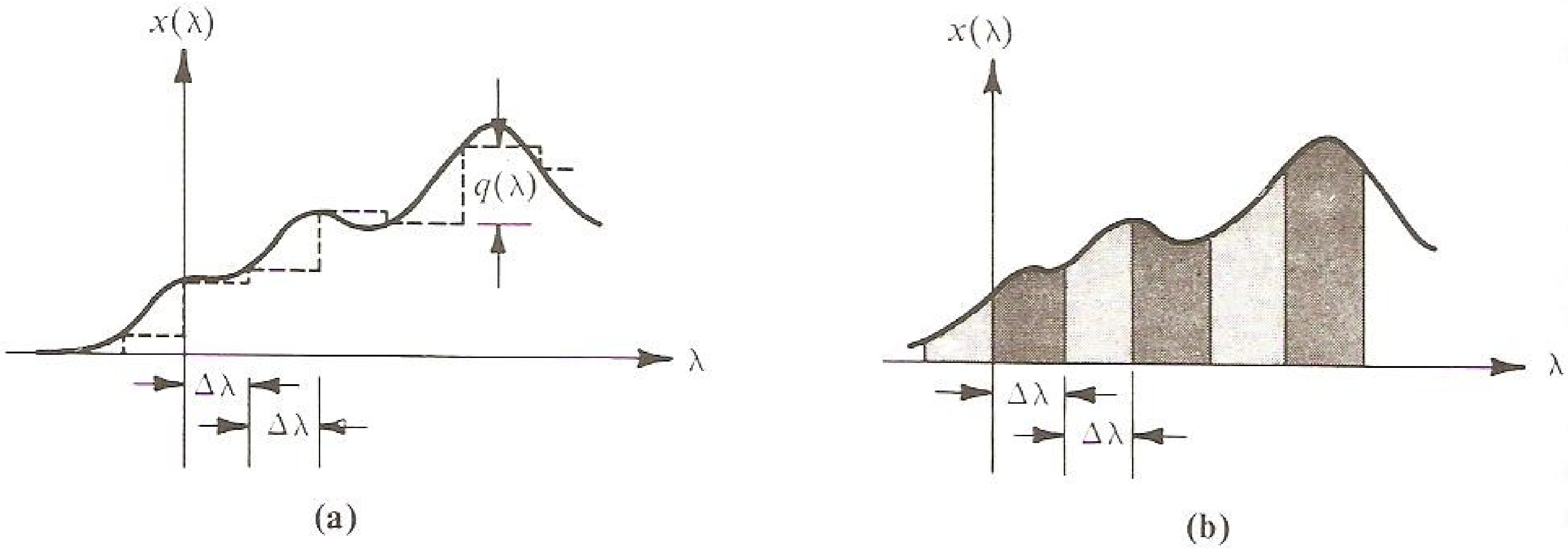


Fig. 3.5-1

Ver deduções no quadro negro; aproximações por δ(t) e u(t).

- Determine a resposta e(t) do circuito quando a entrada i(t) for: $e^{-t}U_{-1}(t)$, quando for o meio-ciclo de senóide de (b) e quando for a forma de onda de (c).

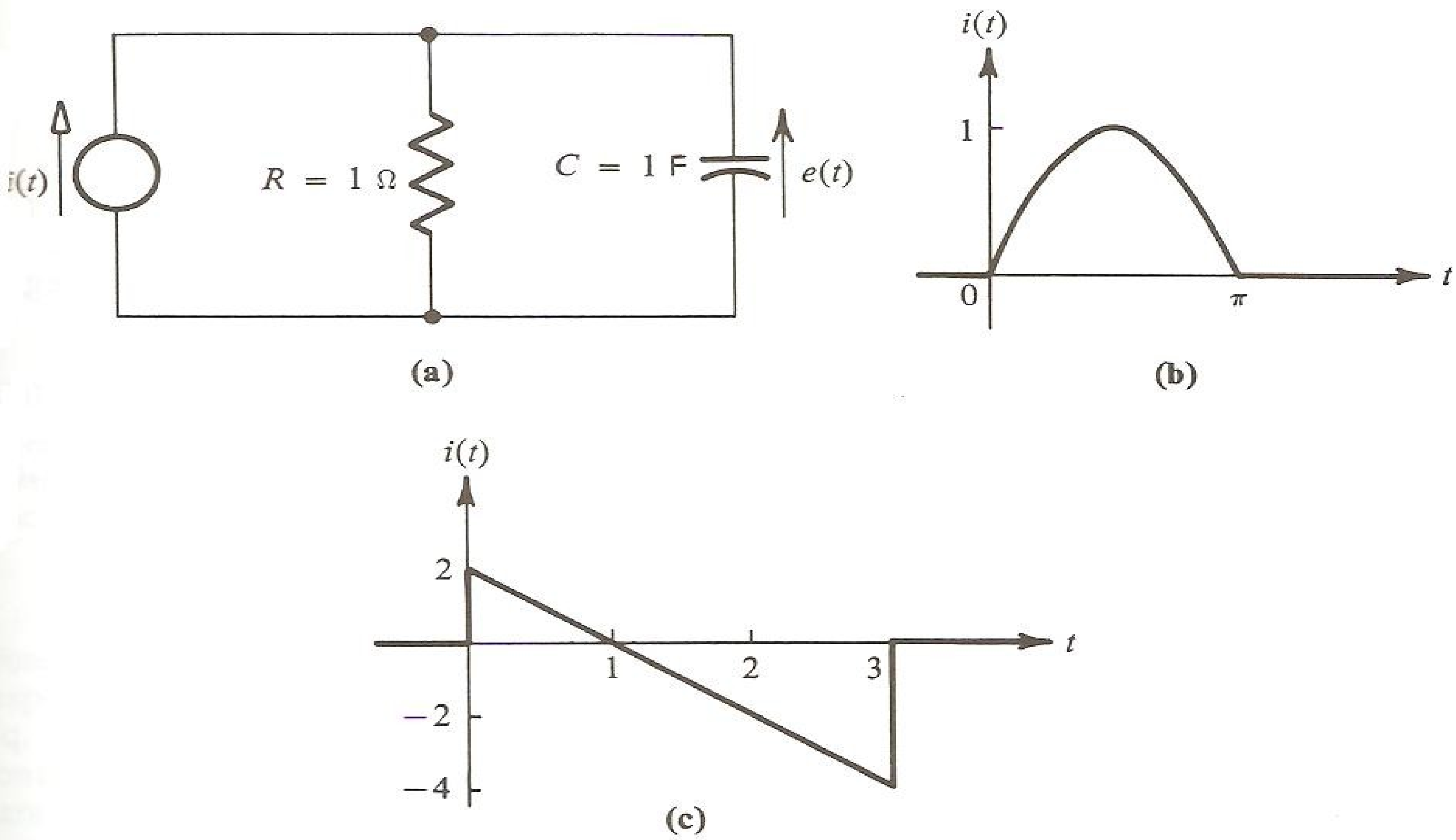


Fig. 3.5-2

Sabemos que $y(t)=x(t)*h(t)$

- Se as respostas aos impulsos de N_1 e N_2 são $h_1(t)$ e $h_2(t)$, respectivamente. Então $y(t)=z(t)*h_2(t)=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$
- Logo $y(t) = x(t) * h(t)$ com $h(t)=h_1(t)*h_2(t)$

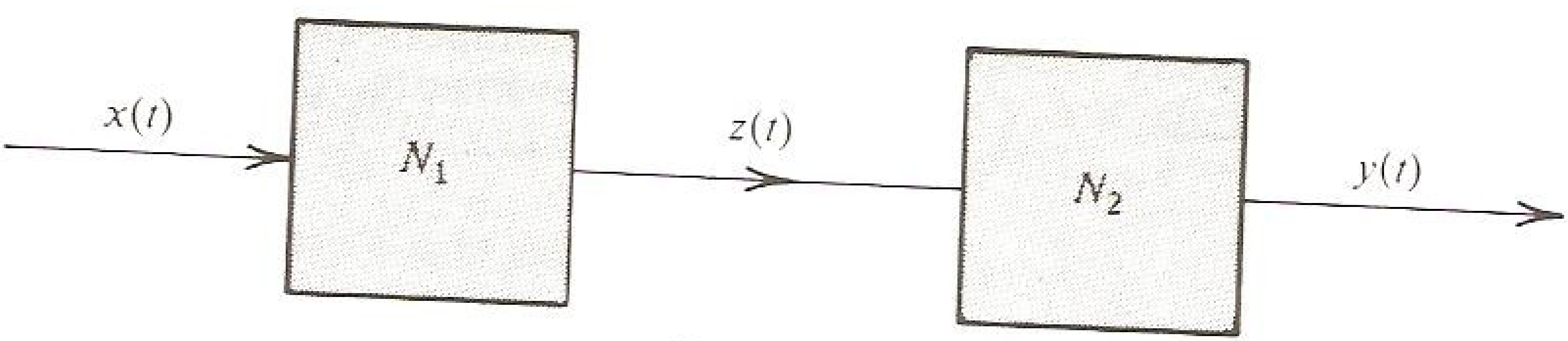


Fig. 3.5-6

3.6 A Interpretação Gráfica da Convolução

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)$$

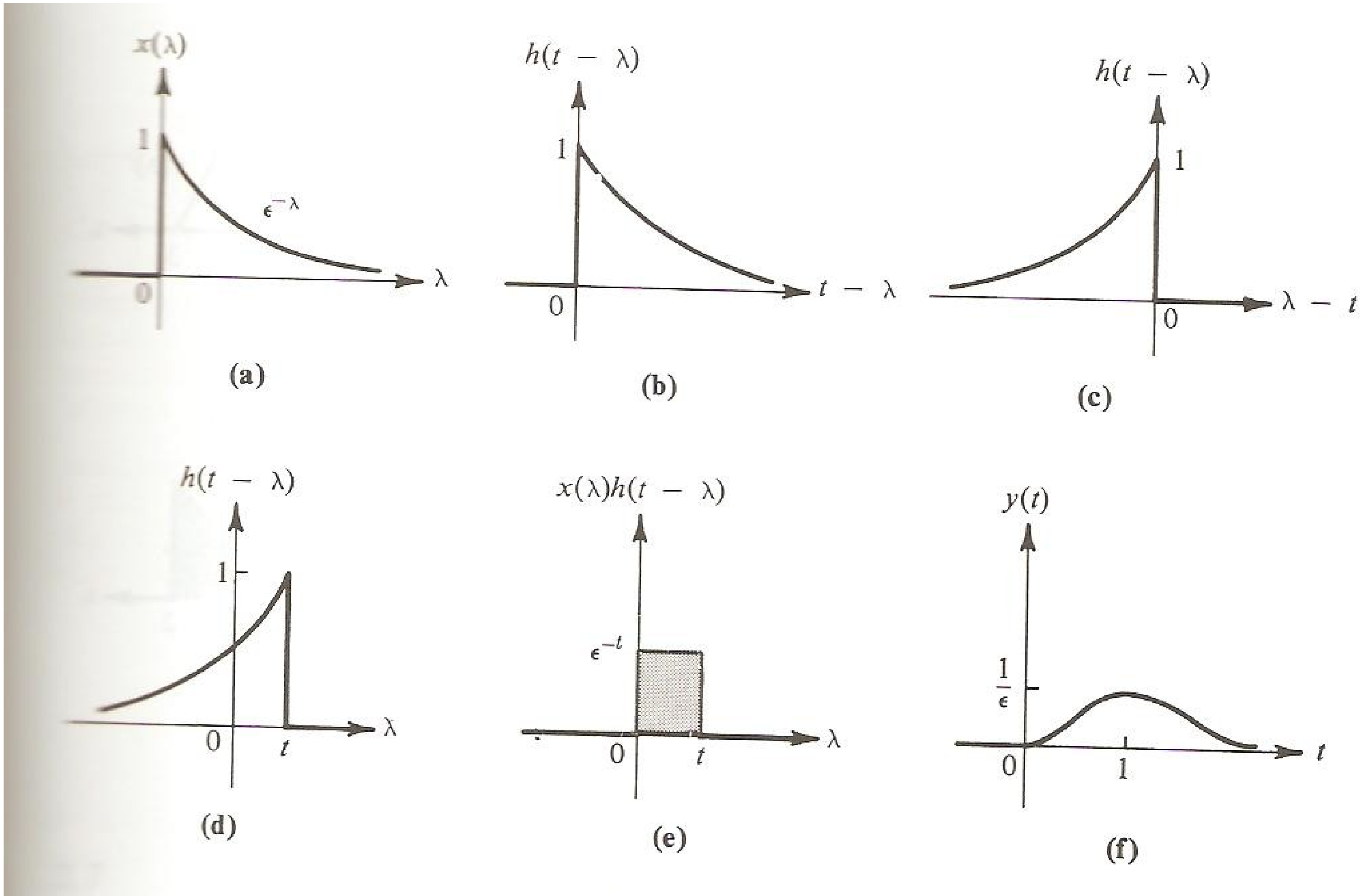


Fig. 3.6-1

Se h(t) tem valores somente entre 0 e 2s, o valor atual da saída depende somente do valor presente e do passado limitado aos últimos dois segundos:

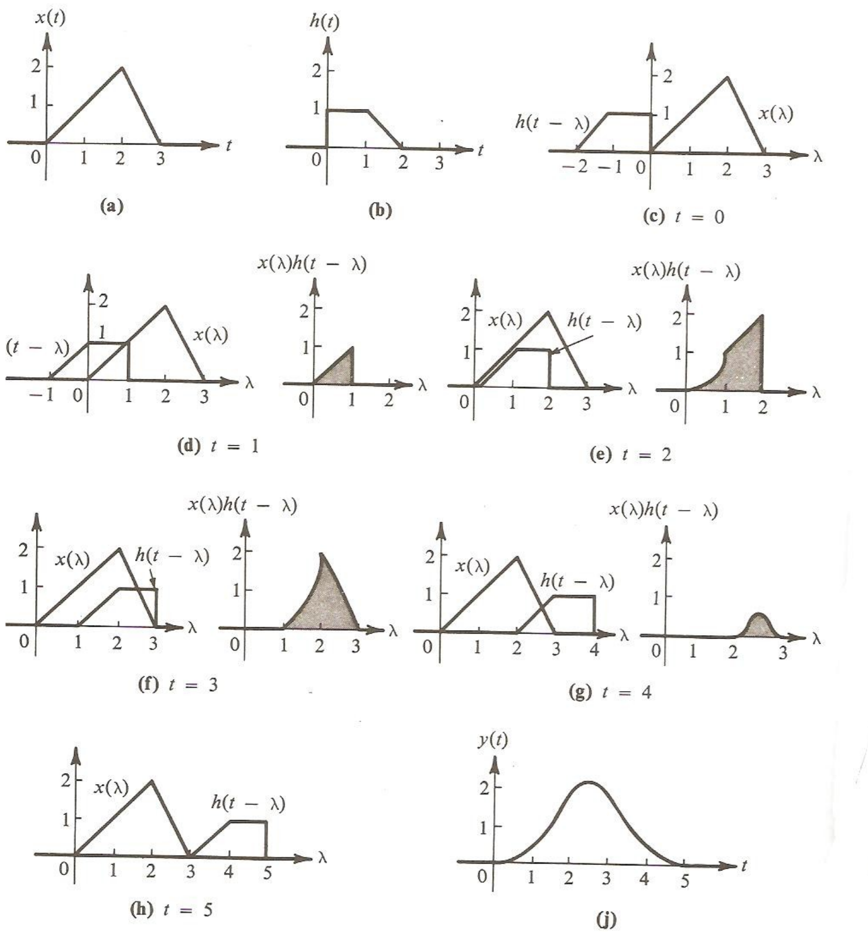
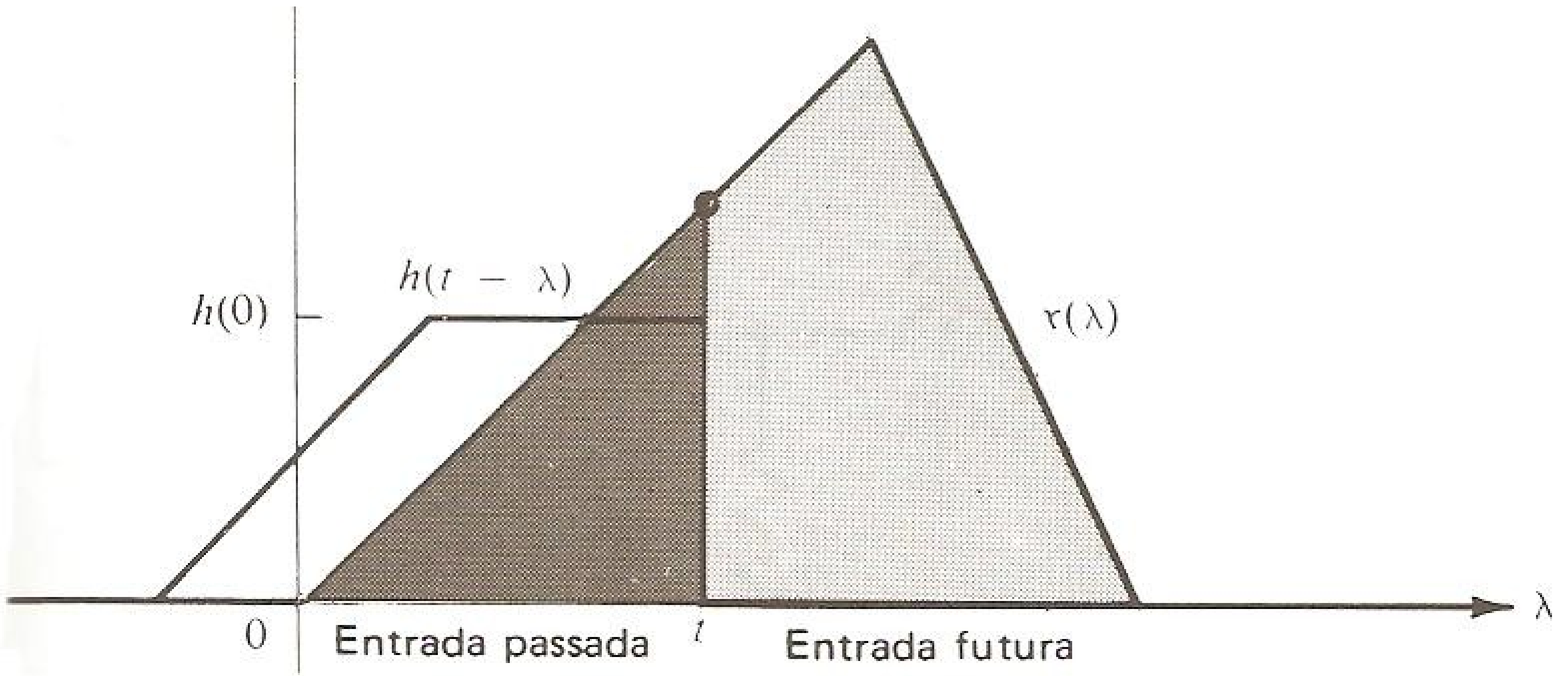


Fig. 3.6-2



$h(t - \lambda)$
$h(0)$
$x(\lambda)$
λ
0
Entrada passada
t
Entrada futura

Fig. 3.6-3

P3.5) A chave K se fecha em t=0 e o circuito não contém energia armazenada para t<0. Esboce $i_1(t)$ e $e_0(t)$ quando:

(a) L=1H e $R_1=1\Omega$

(b) L=2H e $R_1=2\Omega$

(c) L=2H e $R_1=1\Omega$.