



Instituto Militar de Engenharia

Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho-1792

Capítulo 6

Frequência Complexa

Circuitos Elétricos 1
1º Semestre 2015



Sumário

- 6.1 Oscilações (crescentes e decrescentes)
- 6.2 Impedância e Admitância
- 6.3 Polos e Zeros
- 6.4 Vetores no Plano s
- 6.5 Diagrama de Bode
- 6.6 Exercícios em sala, lista, VI



Embora neste capítulo se vá estender as técnicas do Cap. 5 para incluir algumas outras entradas, esta não é a sua finalidade principal. Uma finalidade principal é a de esclarecer melhor a questão importante de como a resposta em estado permanente de corrente alternada varia quando a frequência angular da entrada é alterada. Esta questão será considerada, demoradamente, nas Seções 6.4 e 6.5. Uma meta ainda mais importante do capítulo é a de idealizar métodos para calcular a resposta completa a qualquer entrada sem ter que resolver explicitamente uma equação diferencial, ou que calcular um conjunto de constantes arbitrárias de integração. Algum progresso em direção a esta meta é feito na Seção 6.3, mas ela não será totalmente alcançada antes do Cap. 10. O presente capítulo ajuda a construir uma ponte ligando os três capítulos anteriores às técnicas de transformadas que serão desenvolvidas nos Caps. 9 e 10, no Vol. 2. (Circuitos Elétricos II)



6.1 Oscilações

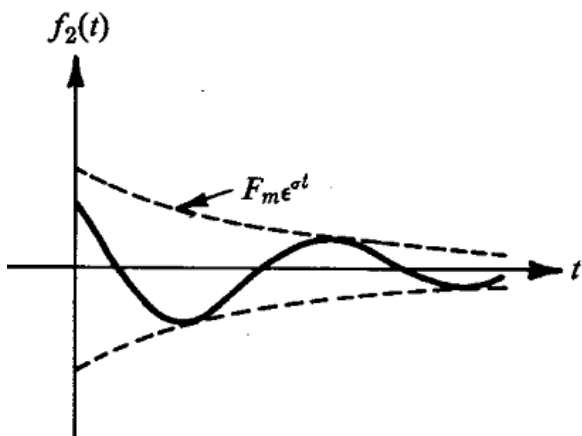
Lembre-se que uma função senoidal de amplitude constante pode ser escrita

$$f_1(t) = F_m \cos(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}(F_m e^{j\phi} e^{j\omega t} + F_m e^{-j\phi} e^{-j\omega t})$$

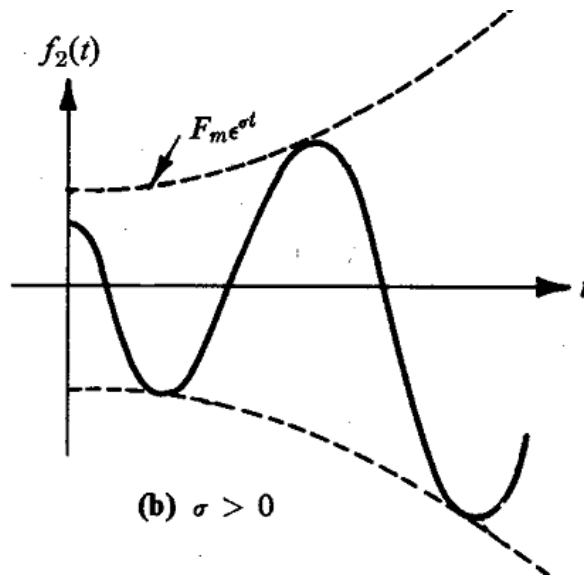
Considere a função

$$f_2(t) = F_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}(F_m e^{j\phi} e^{(\sigma+j\omega)t} + F_m e^{-j\phi} e^{(\sigma-j\omega)t})$$

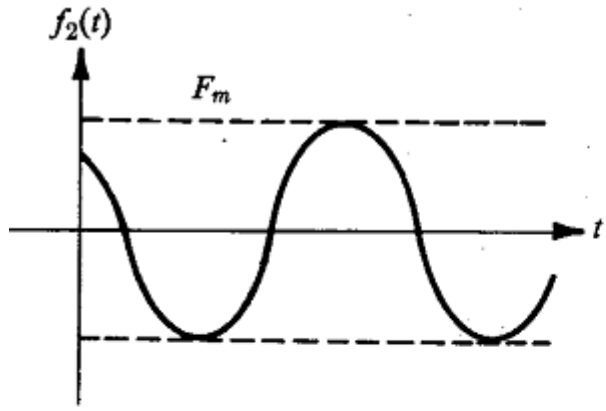
que se reduz a $f_1(t)$ quando o parâmetro σ (que pode assumir qualquer valor real) for zero. A função $f_2(t)$ é esboçada para vários valores diferentes de σ e ω .



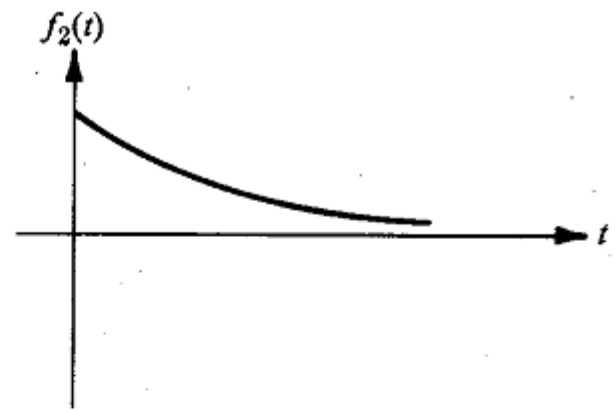
(a) $\sigma < 0$



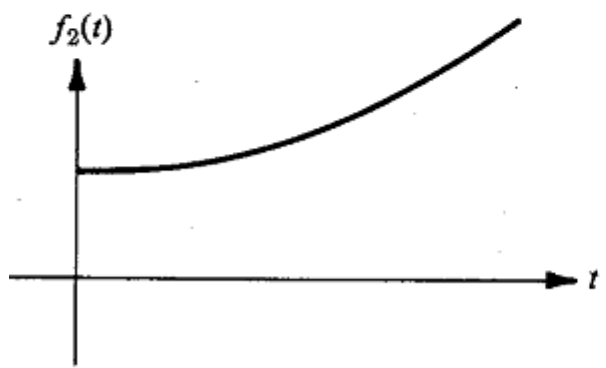
(b) $\sigma > 0$



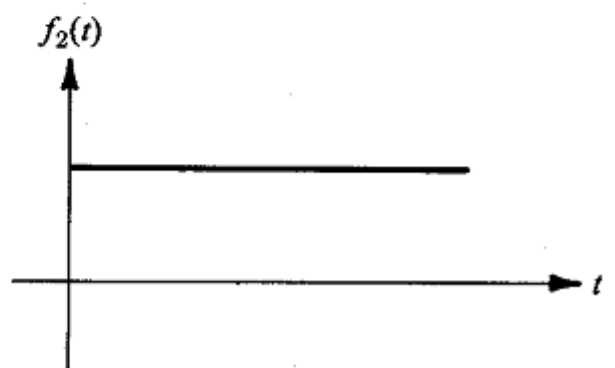
(c) $\sigma = 0$



(d) $\sigma < 0, \omega = 0$



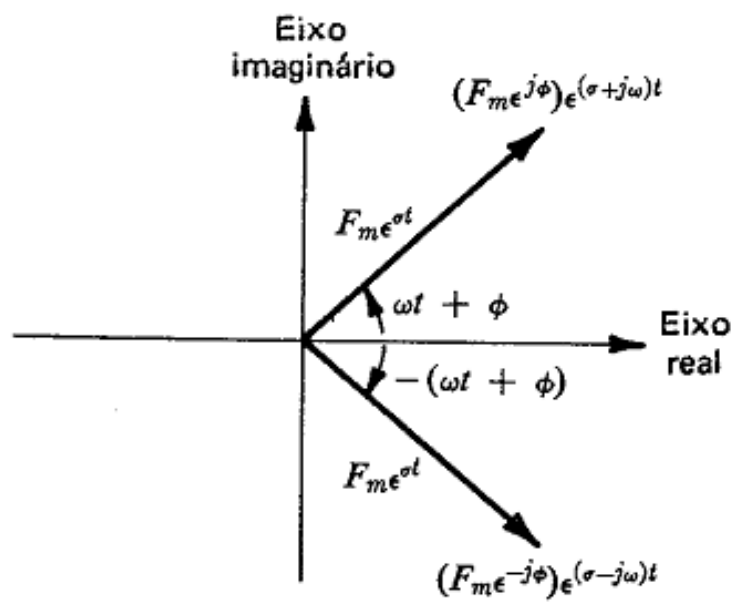
(e) $\sigma > 0, \omega = 0$



(f) $\sigma = 0, \omega = 0$

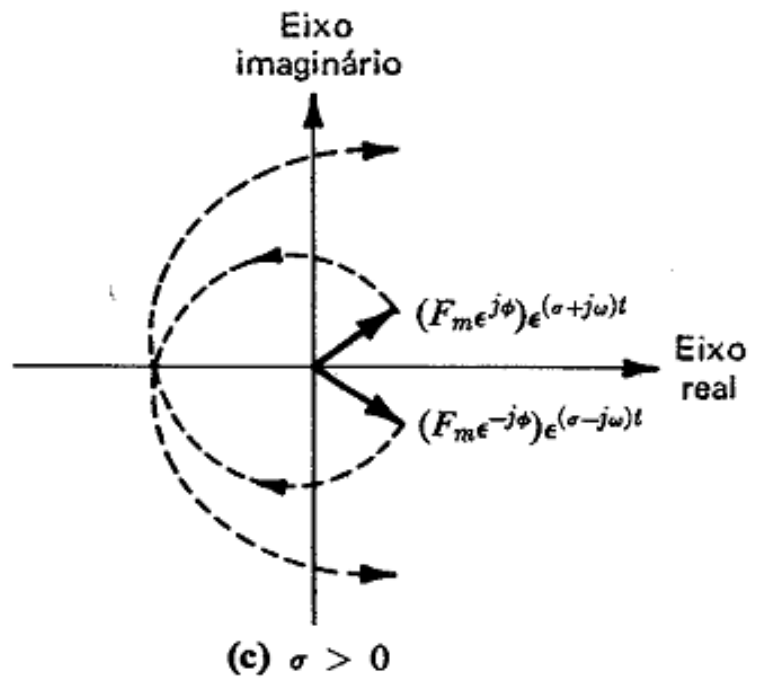
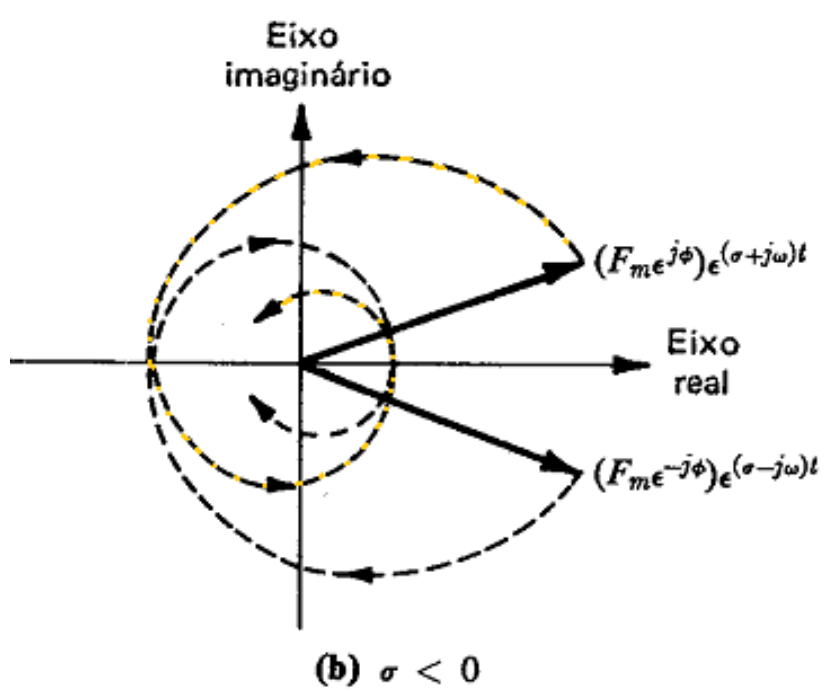


A função senoidal $f_1(t)$, conforme foi visto, é a metade da soma dos dois fasores girantes em sentidos contrários $(F_m e^{j\phi})e^{j\omega t}$ e $(F_m e^{-j\phi})e^{-j\omega t}$, que se movem com uma frequência angular ω . De maneira equivalente, $f_1(t)$ é a projeção no eixo real do fasor em sentido anti-horário.





A função mais geral $f_2(t)$ também pode ser expressa como metade da soma dos fasores girantes em sentidos contrários $(F_m e^{j\phi})e^{(\sigma+j\omega)t}$ e $(F_m e^{-j\phi})e^{(\sigma-j\omega)t}$ da Fig. 6.1-2a, ou como a projeção no eixo real do vetor que gira em sentido anti-horário. Os fasores girantes movem-se novamente com uma velocidade angular ω , mas a menos que $\sigma = 0$, o seu comprimento também se alterará com o tempo. Se $\sigma < 0$, os fasores giram e decrescem com o aumento de t , como sugerido pelas linhas tracejadas que espiralam em direção à origem na Fig. 6.1-2b. Se $\sigma > 0$, os fasores girantes traçam uma espiral crescente, como na Fig. 6.1-2c. (Para o caso especial de $\omega = 0$, eles não giram, mas somente diminuem ou aumentam de tamanho.)





No fasor girante em sentido anti-horário $F_m e^{j\phi} e^{(\sigma + j\omega)t}$, ω é a velocidade angular (ou seja, a taxa de variação do ângulo) medida na unidade de radianos por segundo, enquanto que σ é a taxa logarítmica de redução ou de crescimento em tamanho, medida na unidade de neper/s.* Tanto dB como radianos são grandezas adimensionais, de maneira que a unidade tanto de σ e como de ω é o recíproco de segundos. Os valores de σ e ω determinam a natureza do fasor girante em sentido anti-horário e a natureza da função real $f_2(t)$ da Eq. 6.1-2. Assim, definimos a frequência complexa s como sendo

$$s = \sigma + j\omega \quad (6.1-3)$$

O nome “frequência complexa” enfatiza que s é uma grandeza complexa e que a discussão presente é uma generalização da resposta em estado permanente de corrente alternada considerada anteriormente.

* N. do T. – Apesar de não ser unidade brasileira, o neper será usado por ser bastante conveniente na execução das operações matemáticas conforme poderá ser visto daqui em diante. 1 neper é igual a 0,434 bel.

$$[.]dB = 10 * \log_{10}(.) \quad e \quad [.]neper = \log_e(.)$$

$$1 \text{ neper} = \log_e(e) \implies 10 * \log_{10}(\exp(1)) = 4.3429dB \text{ ou } 0.434 \text{ Bel}$$



$$F = F_m e^{j\phi} = F_m \underline{\phi} \quad \Rightarrow \quad F_m e^{j\phi} e^{(\sigma+j\omega)t} = F e^{st}$$



$$Y = H(s)X$$

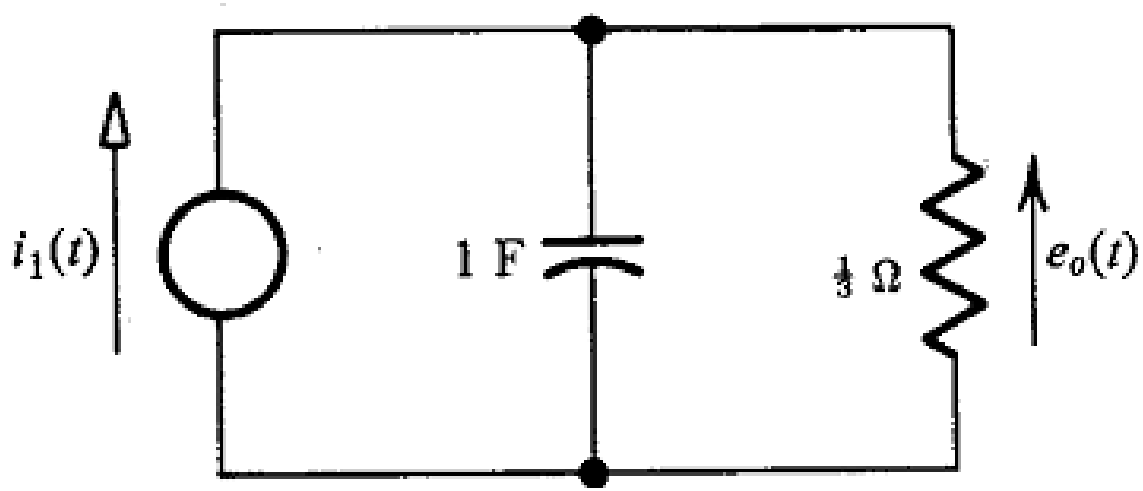
$$X = X_m e^{j\phi_1}, \quad H(s) = |H(s)| e^{j\theta}, \quad Y = Y_m e^{j\phi_2}$$

Portanto o módulo e o ângulo do fasor de saída Y são dados por

$$Y_m = |H(s)| X_m, \quad \phi_2 = \theta + \phi_1$$

$$x(t) = X_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi_1) = \text{Re}(X e^{st})$$

$$y_P(t) = Y_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi_2) = \text{Re}(Y e^{st})$$



Determine a resposta forçada do circuito à entrada $i_1(t) = e^{-t} \cos t$.

O circuito é descrito pela equação nodal $\frac{de_o}{dt} + 3e_o = i_1$.





6.2 Impedância e Admitância

A *impedância* $Z(s) = \frac{\mathbf{E}(s)}{\mathbf{I}(s)}$

é novamente definida como a relação dos fasores de tensão e de corrente, enquanto que a *admitância* é

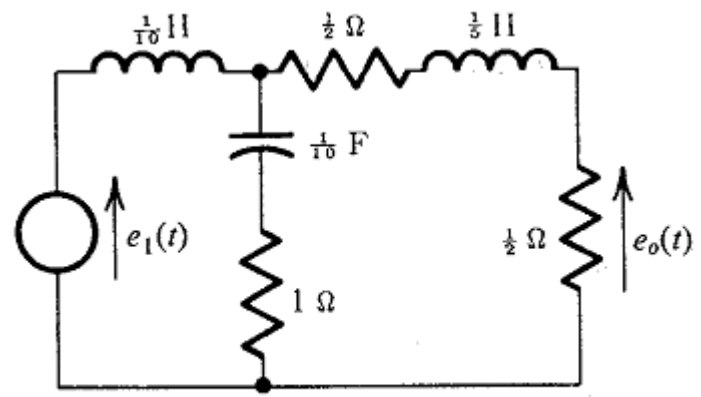
$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{\mathbf{I}(s)}{\mathbf{E}(s)}$$

<i>Elemento</i>	<i>Expressões Gerais</i>		<i>O estado permanente de corrente alternada</i>	<i>O estado permanente de corrente contínua</i>
Resistência	$Z(s) = R$	$Y(s) = \frac{1}{R}$	$Z(j\omega) = R$	$Z(0) = R$
Capacitância	$Z(s) = \frac{1}{sC}$	$Y(s) = sC$	$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$	$Z(0) \rightarrow \infty$ (circuito aberto)
Indutância	$Z(s) = sL$	$Y(s) = \frac{1}{sL}$	$Z(j\omega) = j\omega L$	$Z(0) = 0$ (curto-circuito)

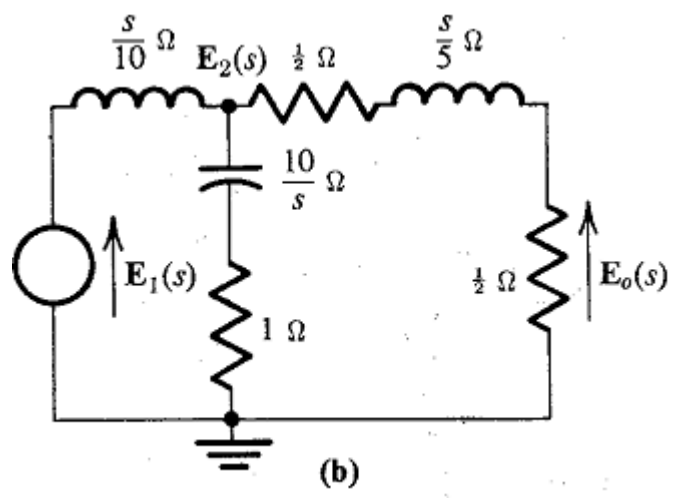


Exemplo 6.2-1. Determine a função de circuito $H(s)$ para o circuito da Fig. 5.3-3a, que é repetida na Fig. 6.2-1a.

Solução. O circuito no domínio da frequência complexa, no qual as tensões e as correntes são caracterizadas por seus fasores e os elementos passivos por suas impedâncias, é dado na Fig. 6.2-1b. Enquanto que qualquer um dos cinco métodos do Ex. 5.3-2 poderia ser usado para determinar o fasor de saída $E_o(s)$, preferimos escrever uma única equação nodal no nó 2.



(a)



$$\frac{E_2(s) - E_1(s)}{s/10} + \frac{E_2(s)}{1 + 10/s} + \frac{E_2(s)}{1 + s/5} = 0$$

Resolvendo algebricamente para $E_2(s)$, obtemos

$$E_2(s) = \left[\frac{10(s + 5)(s + 10)}{s^3 + 20s^2 + 200s + 500} \right] E_1(s)$$

Portanto,

$$E_o(s) = \left(\frac{1/2}{1 + s/5} \right) E_2(s) = \left[\frac{25(s + 10)}{s^3 + 20s^2 + 200s + 500} \right] E_1(s)$$

Pela Eq. 6.2-1, a função de circuito é

$$H(s) = \frac{E_o(s)}{E_1(s)} = \frac{25(s + 10)}{s^3 + 20s^2 + 200s + 500}$$



Exemplo 6.2-2. Determine a resposta forçada da Fig. 6.2-1a a cada uma das entradas seguintes:

$$e_1(t) = 5e^{-3t} \cos(t - 10^\circ)$$

$$e_1(t) = 10 \cos(10t + 20^\circ)$$

$$e_1(t) = 10e^{-t}$$

$$e_1(t) = 10$$

Solução. Todas as quatro entradas dadas são casos especiais da expressão $e_1(t) = E_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi_1)$, como na Eq. 6.1-9. Correspondendo a

$$e_1(t) = 5e^{-3t} \cos(t - 10^\circ)$$

temos $\sigma = -3$ neper/s e $\omega = 1$ rad/s, de maneira que $s = -3 + j1$. Para este valor de s , a função de circuito $H(s)$ se reduz a

$$H(-3 + j1) = \left[\frac{25(s + 10)}{s^3 + 20s^2 + 200s + 500} \right]_{s=-3+j1} = 1,55 / -60,3^\circ$$

Neste caso, será necessária considerável manipulação com números complexos antes da obtenção do resultado dado, de maneira que talvez não seja interessante para o estudante fazer sua verificação. Como o fasor de entrada $\mathbf{E}_1(s)$ é $5 / -10^\circ$,

$$\mathbf{E}_o = (1,55 / -60,3^\circ)(5 / -10^\circ) = 7,75 / -70,3^\circ$$

A resposta forçada, que terá a forma da Eq. 6.1-10, pode então ser escrita:

$$(e_o)_P = 7,75 e^{-3t} \cos(t - 70,3^\circ)$$



Para a entrada $e_1(t) = 10 \cos(10t + 20^\circ)$, $\sigma = 0$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$, $s = j10$ e $E_1(s) = 10/20^\circ$. Portanto,

$$H(j10) = \left[\frac{25(s + 10)}{s^3 + 20s^2 + 200s + 500} \right]_{s=j10} = 0,196 / -101,3^\circ$$

$$E_o = (0,196 / -101,3^\circ)(10/20^\circ) = 1,96 / -81,3^\circ$$

$$(e_o)_P = 1,96 \cos(10t - 81,3^\circ)$$

o que concorda com a resposta do Ex. 5.3-2.

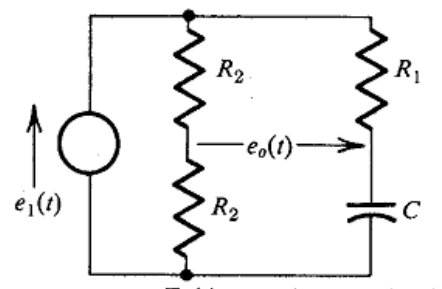
Para $e_1(t) = 10e^{-t}$, $s = -1$ e $E_1(s) = 10$. Então $H(-1) = 0.705$, $E_o = 7.05$, e

$$(e_o)_P = 7,05e^{-t}$$

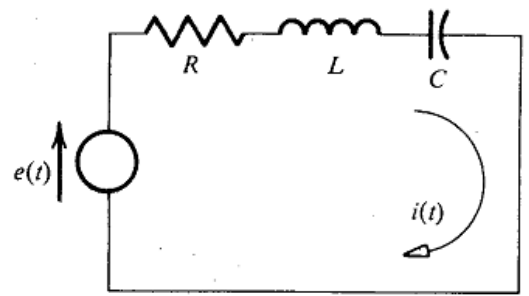
Finalmente, para $e_1(t) = 10$, $s = 0$ e $E_1(s) = 10$. Como $H(0) = 0,5$, $E_o = 5$ e

$$(e_o)_P = 5$$

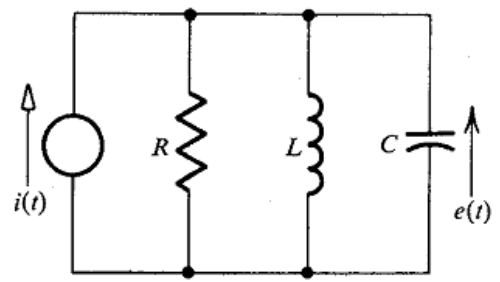
Esta última resposta também poderia ter sido obtida por inspeção do circuito. No estado permanente de corrente contínua, as indutâncias e as capacitâncias se comportam como curto-circuitos e como circuitos abertos, respectivamente. A fonte então verá somente duas resistências de $\frac{1}{2} \Omega$ em série.



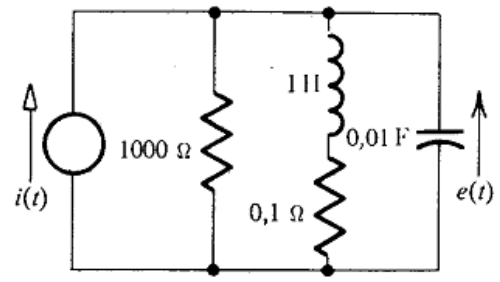
(a) $H(s) = \frac{E_o(s)}{E_1(s)} = -\frac{1}{2} \frac{s - 1/R_1 C}{s + 1/R_1 C}$



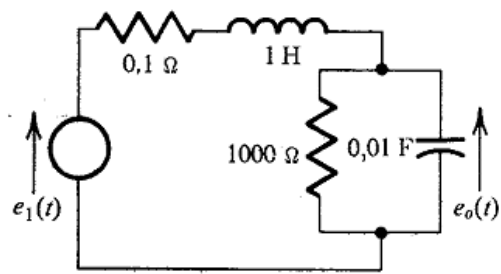
(b) $H(s) = Y(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{L s^2 + (R/L)s + 1/LC}$



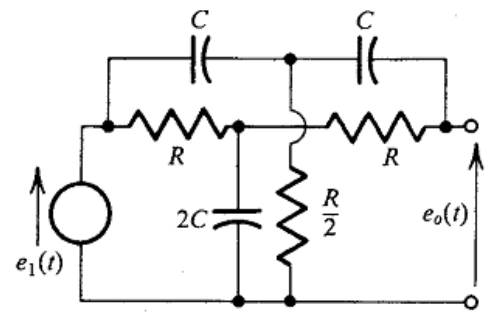
(c) $H(s) = Z(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + (1/RC)s + 1/LC}$



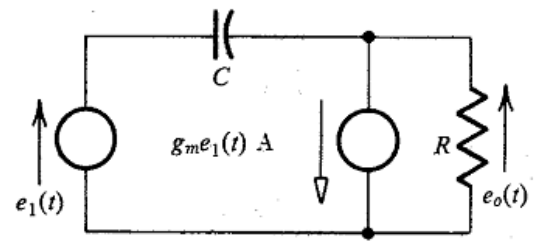
(d) $H(s) = Z(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{100(s + 0,1)}{s^2 + 0,2s + 100}$



(e) $H(s) = \frac{E_o(s)}{E_1(s)} = \frac{100}{s^2 + 0,2s + 100}$



(f) $H(s) = \frac{E_o(s)}{E_1(s)} = \frac{s^2 + (1/RC)^2}{s^2 + (4/RC)s + (1/RC)^2}$



(g) $H(s) = \frac{E_o(s)}{E_1(s)} = \frac{s - g_m/C}{s + 1/RC}$



6.3 Polos e Zeros

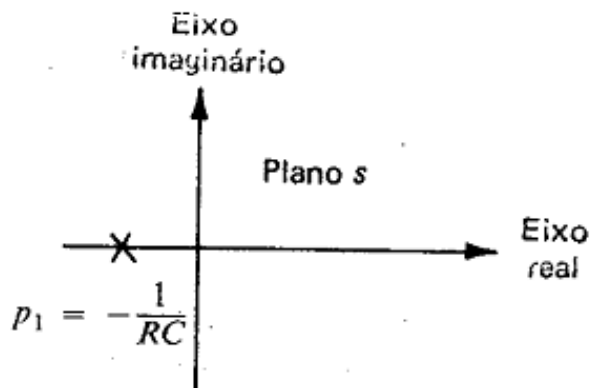
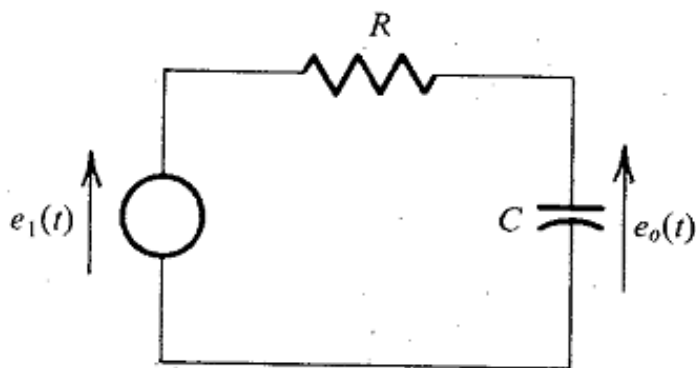
A função de circuito $H(s)$ é o quociente de dois polinômios em s :

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$
$$= K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

onde $K = b_m/a_n$. As grandezas z_1, z_2, \dots, z_m são as raízes da equação $B(s) = 0$, e elas são chamadas zeros da função de circuito. As raízes da equação $A(s) = 0$ são denotadas por p_1, p_2, \dots, p_n e são chamadas pólos da função de circuito.



Diagrama de Polos e Zeros



$$H(s) = \frac{1/sC}{R + 1/sC} = \frac{1}{RCs + 1} = K \frac{1}{s - p_1} \quad \text{onde } K = 1/RC \text{ e } p_1 = -1/RC.$$

Há um único pólo no eixo real negativo do plano s .

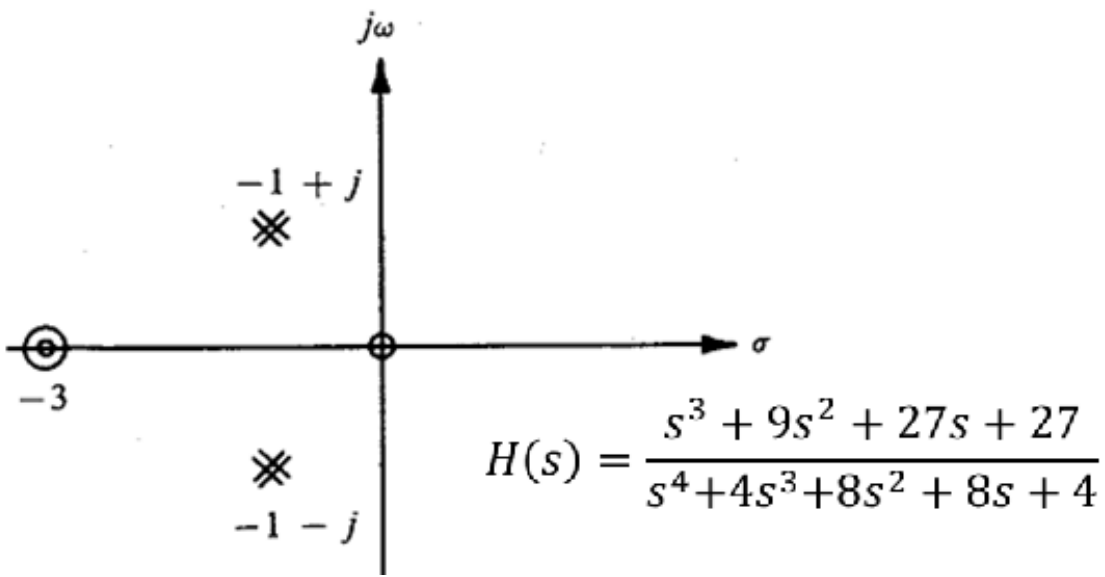
Embora $H(s)$ não seja nula para qualquer valor finito de s , ela tende para zero quando s tende para infinito.

Diz-se, portanto, que a função de circuito tem um zero no infinito.



A função do circuito $H(s) = \frac{2s^2 + 3s + 1}{s + 3}$

tende para $2s$ quando $|s|$ tende para infinito e tem um pólo de primeira ordem no infinito. Se os pólos e zeros no infinito forem incluídos e se cada pólo e zero for contado de acordo com sua ordem, o número de pólos sempre iguala o número de zeros. É claro que, quando a distribuição dos pólos e zeros é desenhada no plano s , somente os pólos e zeros finitos podem ser mostrados explicitamente.

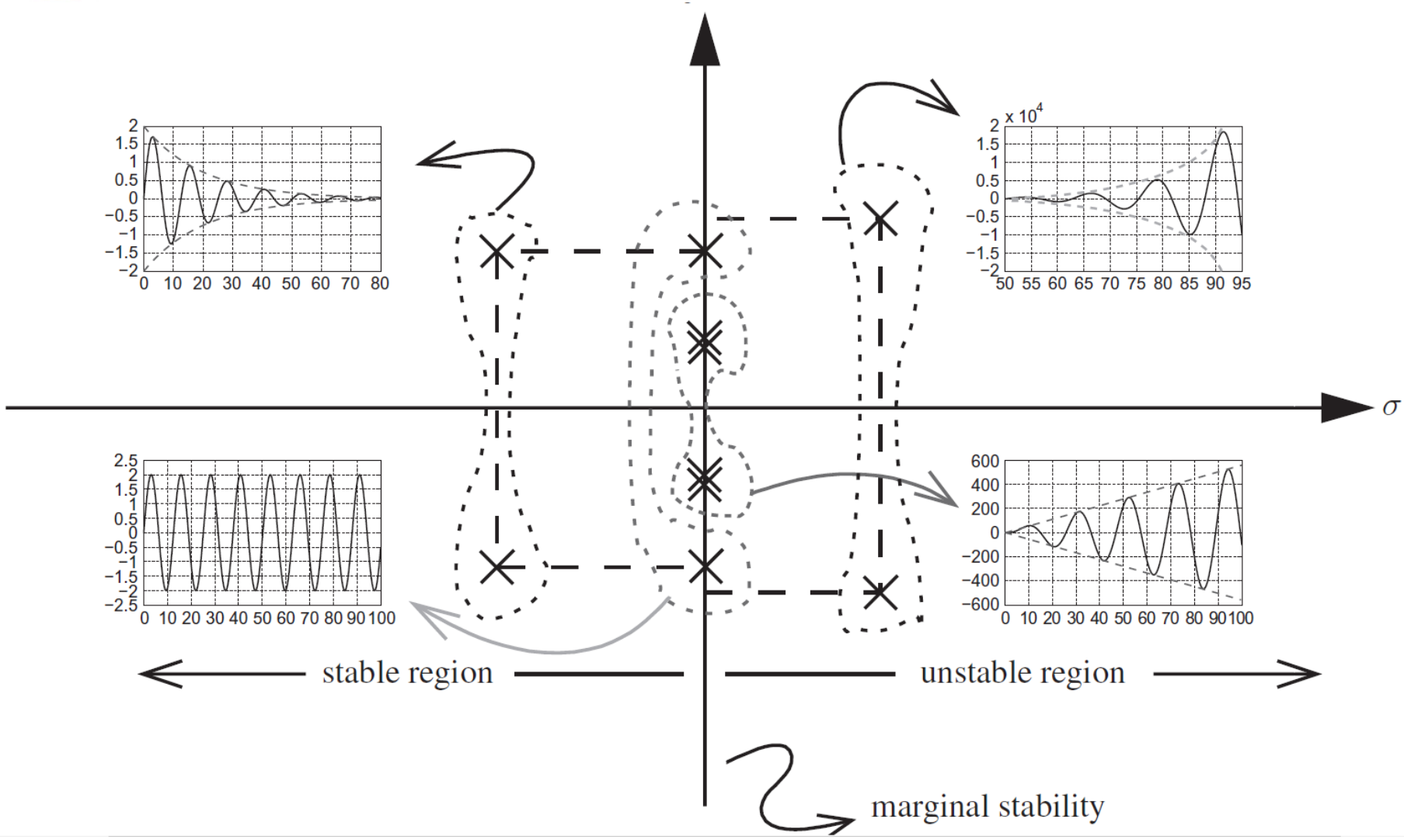


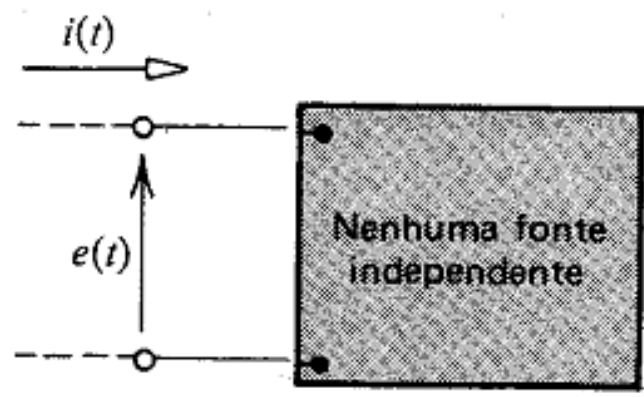
$A(s)$ = polinômio com coeficientes reais \Rightarrow quaisquer raízes complexas de $A(s) = 0$ devem ocorrer em pares complexos conjugados.



Observações:

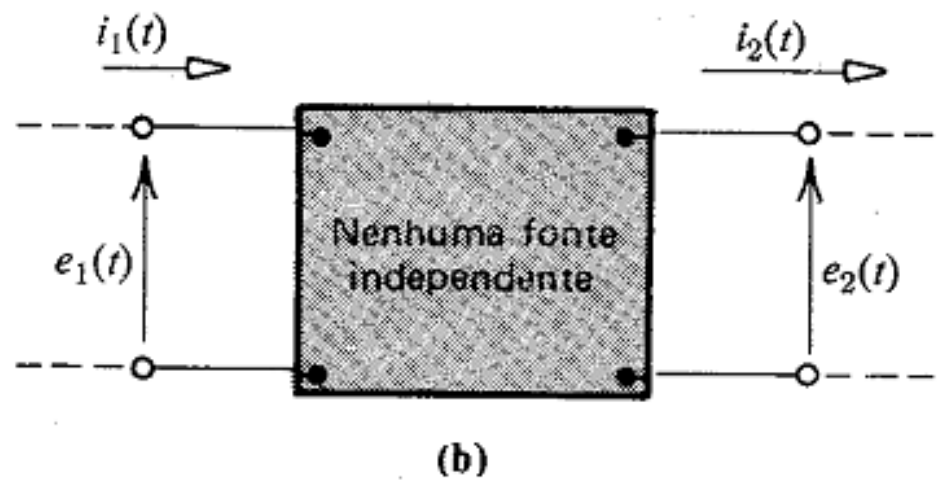
- 1) A equação diferencial de um circuito pode ser reconstituída a partir da função de sistema $H(s)$ → podemos determinar a resposta completa se conhecermos $H(s)$, a entrada e as condições iniciais.
- 2) O polinômio característico é idêntico ao denominador de $H(s)$ → as raízes deste polinômio são os zeros do circuito
- 3) Um circuito será instável se tiver todos seus polos no semi-plano aberto à direita do plano s ou polos de ordem superior no eixo vertical (imaginário)
- 4) Circuitos contendo somente resistências, capacitâncias e indutâncias são sempre estáveis.





(a)

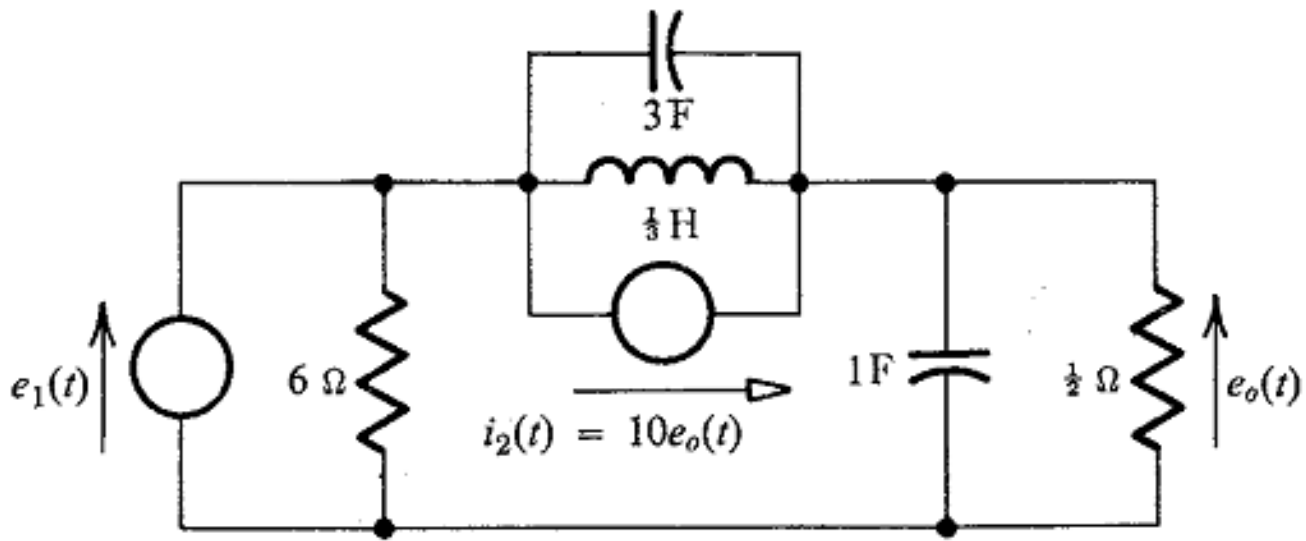
Funções no Ponto* e de Transferência. Um circuito possuindo dois terminais externos e não contendo fontes independentes é mostrado na Fig. 6.3-5a. Se a entrada for uma fonte de corrente $i(t)$, a resposta deve ser a tensão $e(t)$ e a função de circuito será $H(s) = E(s)/I(s) = Z(s)$, a impedância de entrada. Para uma fonte de tensão $e(t)$ e uma resposta $i(t)$, $H(s) = I(s)/E(s) = Y(s)$, a admitância de entrada. Em qualquer um destes casos, a função de circuito relaciona os fasores de corrente e de tensão no mesmo par de terminais e é chamada uma função de entrada ou no ponto. As unidades da função no ponto podem ser tanto ohms como mhos.



A Fig. 6.3-5b, mostra um circuito com dois pares de terminais externos e não contendo fontes independentes. Em muitos casos, uma entrada de tensão ou de corrente é aplicada no par de terminais à esquerda, e uma combinação de elementos passivos, chamada *carga*, é ligada no par à direita. Toma-se para resposta ou a tensão ou a corrente no par à direita. Dependendo da escolha da entrada e da resposta, a função de circuito poderia ser qualquer uma das seguintes grandezas: $E_2(s)/I_1(s)$, $E_2(s)/E_1(s)$, $I_2(s)/I_1(s)$, e $I_2(s)/E_1(s)$. A primeira grandeza tem ohms por unidade, as duas próximas são adimensionais e a última tem mhos por unidade. Em cada caso, a função de circuito relaciona os fasores de tensão e de corrente em diferentes pares de terminais, e é chamada uma função de *transferência*.



6.11 Determine a função de transferência $H(s) = \bar{E}_o(s)/\bar{E}_1(s)$ para o circuito da Fig. P6.11, e desenhe a distribuição de pólos e zeros. Será o circuito estável? Se a fonte controlada fosse mudada de maneira que $i_2(t) = g_m e_o(t)$, qual seria o maior valor de g_m para o qual o circuito seria estável?

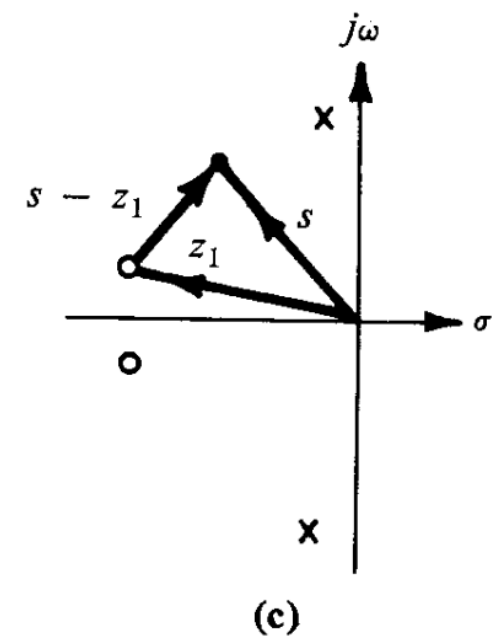
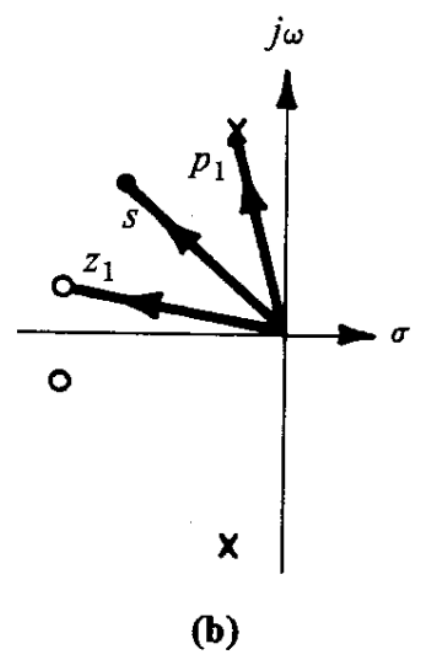
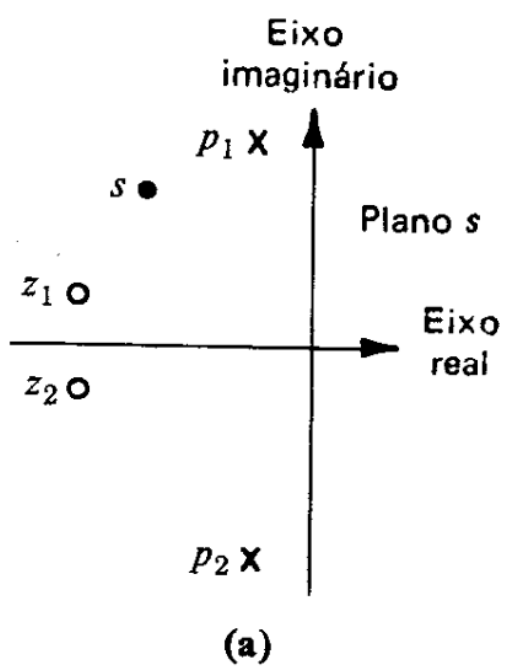


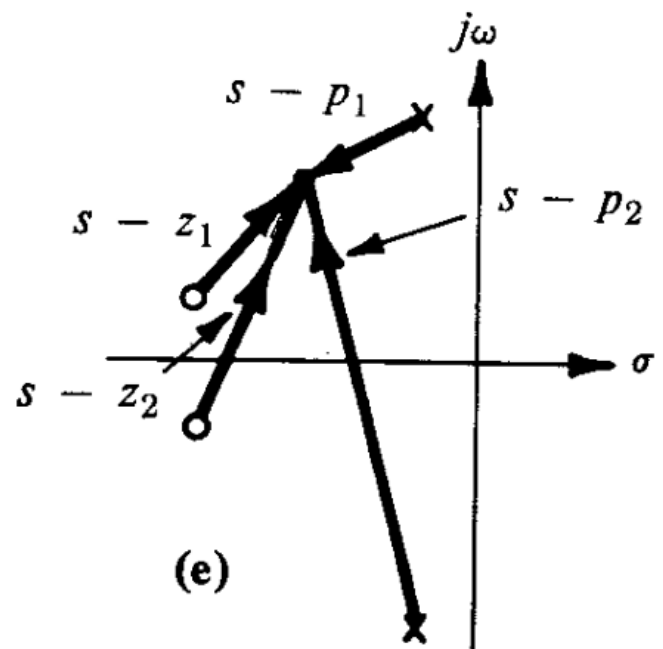
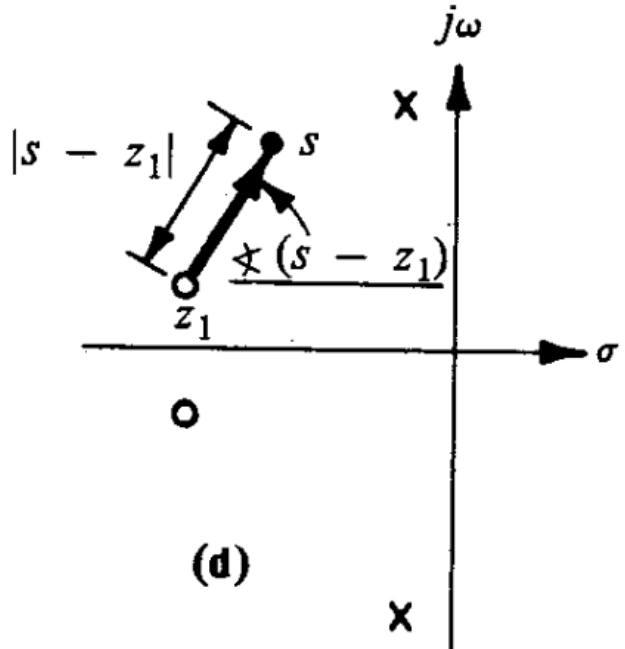


6.4 Vetores no Plano s

Considere uma função de circuito típica em forma fatorada.

$$H(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots}$$





A função de circuito envolve o produto e o quociente de grandezas complexas:

$$|H(s)| = \frac{|K| |s - z_1| |s - z_2| \dots}{|s - p_1| |s - p_2| \dots}$$

$$\angle H(s) = \angle K + [\angle(s - z_1) + \angle(s - z_2) + \dots] - [\angle(s - p_1) + \angle(s - p_2) + \dots]$$

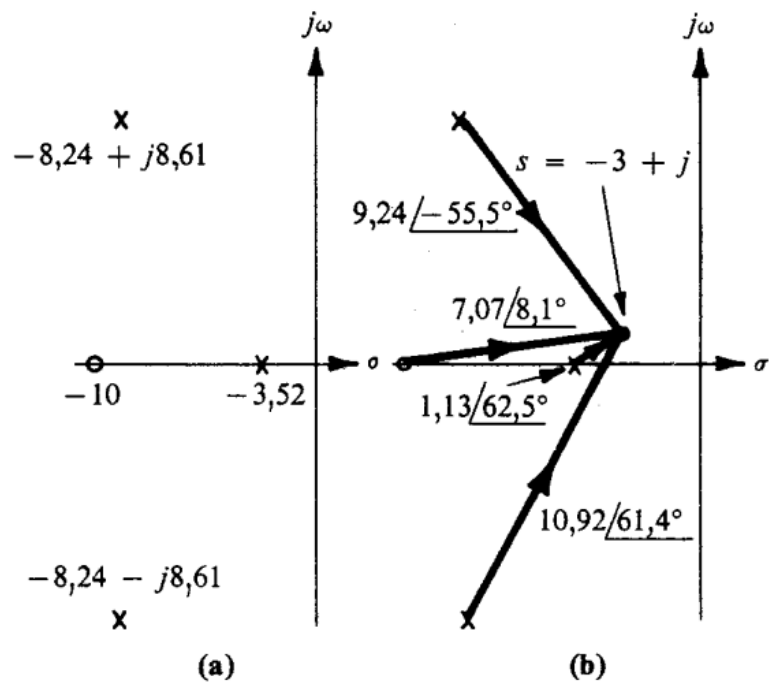
K é uma constante real, de maneira que $\angle K$ será zero se K for positiva e será $\pm 180^\circ$ se K for negativa.

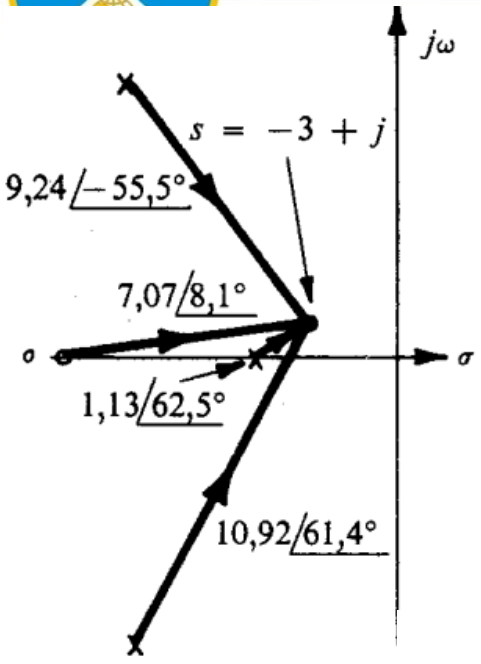


Calcule $H(s)$ graficamente para $s = -3 + j1$ e para $s = j10$.

$$H(s) = \frac{25(s + 10)}{(s + 3,52)(s + 8,24 - j8,61)(s + 8,24 + j8,61)}$$

Solução. A distribuição de pólos e zeros para esta função de transferência está desenhada na Fig. 6.4-2a. Na Fig. 6.4-2b, são desenhados vetores dos pólos e zeros ao ponto $s = -3 + j1$. O módulo e o ângulo de cada vetor, que podem ser determinados com régua e transferidor, estão indicados no esboço.





$$|H(-3 + j1)| = \frac{(25)(7,07)}{(1,13)(9,24)(10,92)} = 1,55$$

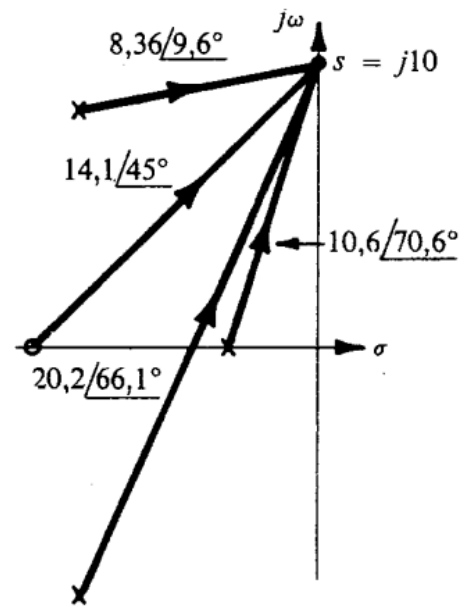
$$\angle H(-3 + j1) = 8,1^\circ - (62,5^\circ - 55,5^\circ + 61,4^\circ) = -60,3^\circ$$

$$H(-3 + j1) = 1,55 \angle -60,3^\circ$$

$$|H(j10)| = \frac{(25)(14,1)}{(10,6)(8,36)(20,2)} = 0,196$$

$$\angle H(j10) = 45^\circ - (70,6^\circ + 9,6^\circ + 66,1^\circ) = -101,3^\circ$$

$$H(j10) = 0,196 \angle -101,3^\circ$$



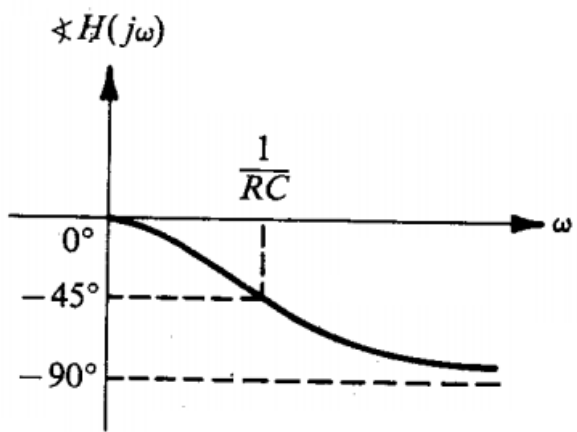
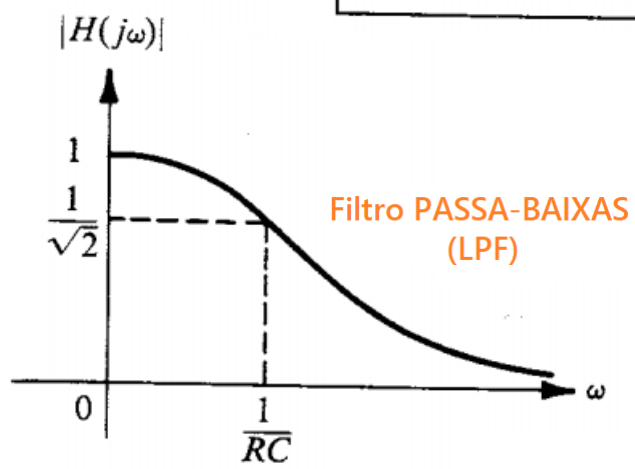
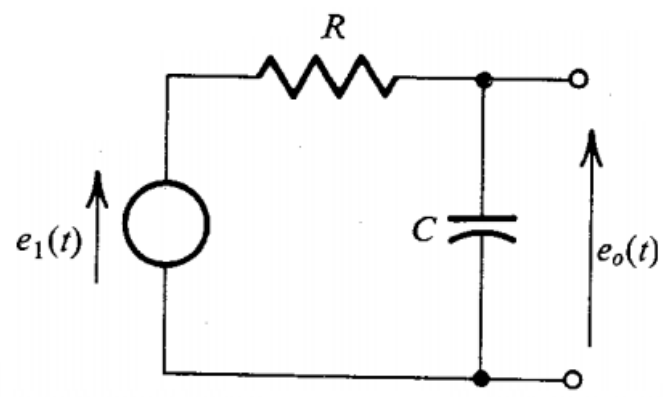
Usar Matlab é mais fácil :-)

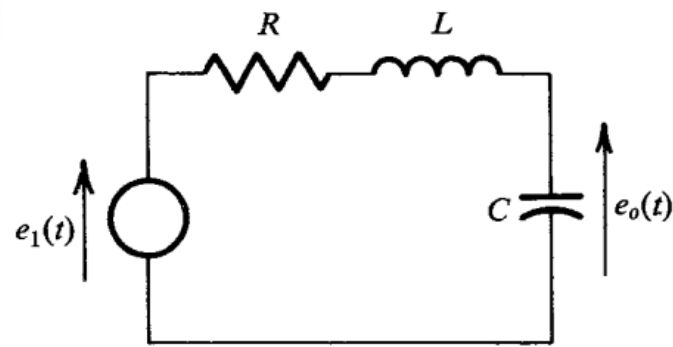


Curvas de Resposta em Freqüência. A resposta em estado permanente a entradas senoidais pode ser determinada substituindo-se s por $j\omega$ na função de circuito. Para os sinais de entrada e saída

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{e} \quad y_P(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi_2)$$

sabemos que $Y_m = |H(j\omega)|X_m$ e $\phi_2 = \angle H(j\omega) + \phi_1$

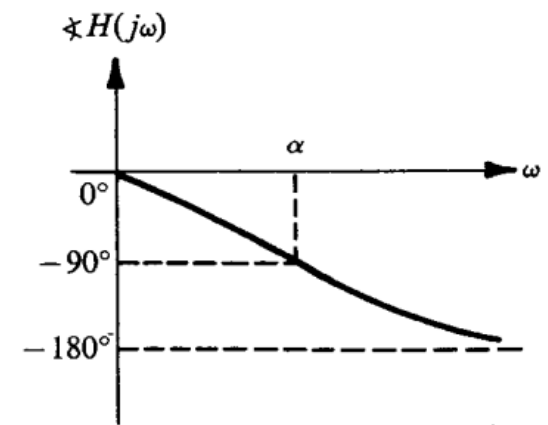
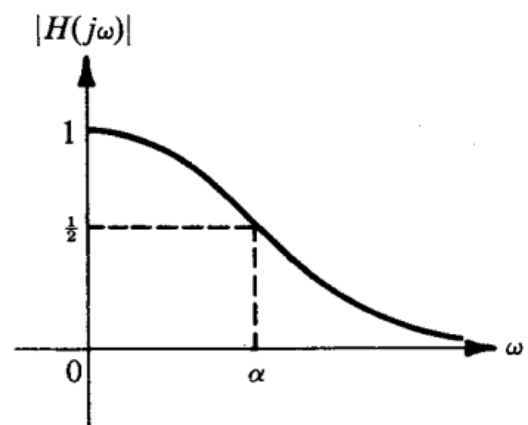
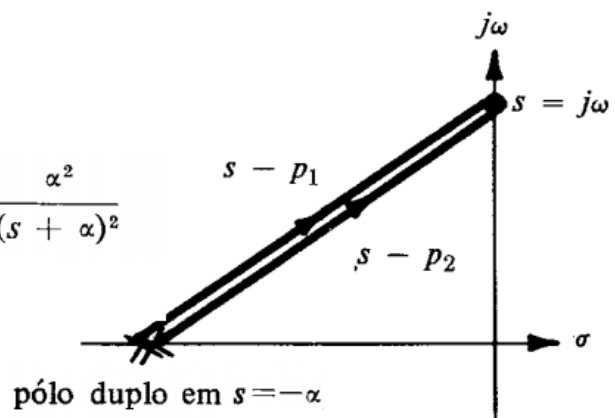


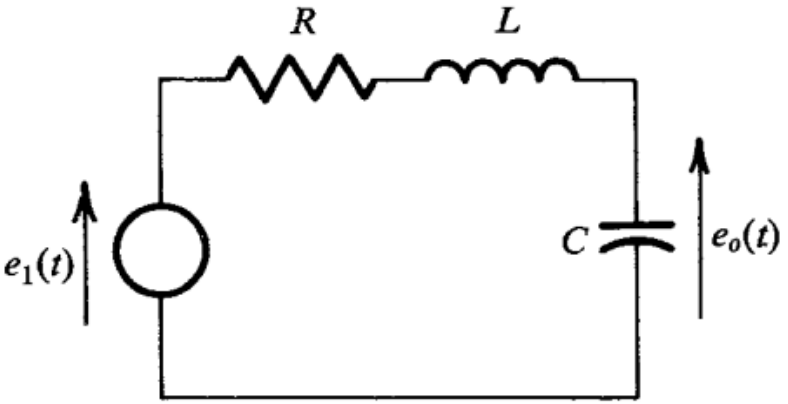


$$H(s) = \frac{1}{LC} \left(\frac{1}{s^2 + (R/L)s + 1/LC} \right) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$

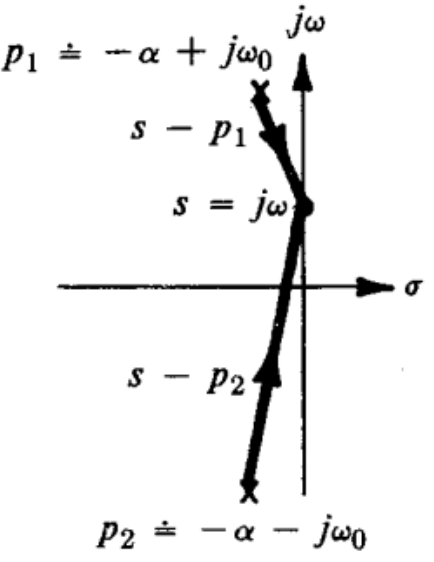
onde $\alpha = R/2L$ e $\omega_0^2 = 1/LC$.

Quando $\alpha = \omega_0$, $H(s) = \frac{\alpha^2}{(s + \alpha)^2}$

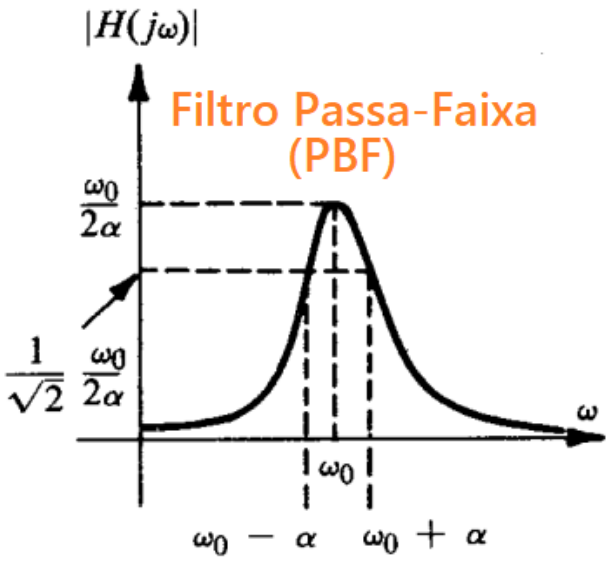




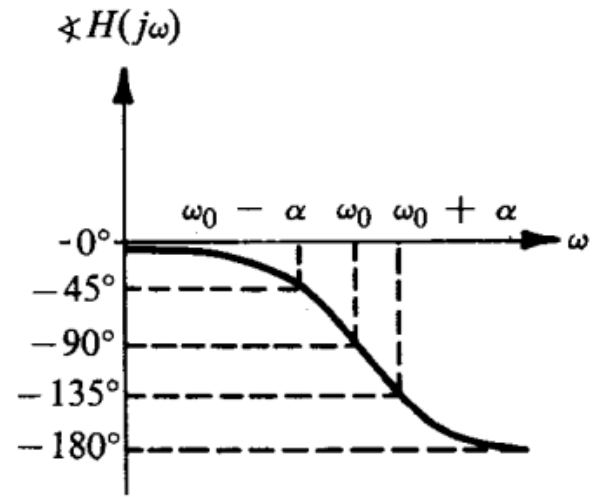
$$H(s) = \frac{1}{LC} \left(\frac{1}{s^2 + (R/L)s + 1/LC} \right) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$



pólos estão localizados em $s = -\alpha \pm j\omega_d$



↑
Freq. ressonância





No último exemplo, a frequência angular de ressonância é aproximadamente ω_0 rad/s. Também no último exemplo, a largura de faixa é aproximadamente 2α rad/s, estendendo de $\omega_0 - \alpha$ a $\omega_0 + \alpha$. Em muitas aplicações, é desejável um pico agudo na curva de $|H(j\omega)|$, de maneira que o circuito somente deixará passar uma gama muito estreita de frequências. Uma medida da agudeza do fenômeno de ressonância é a *seletividade* Q , uma grandeza adimensional definida como

$$Q = \frac{\text{frequência de ressonância}}{\text{largura de faixa}} .$$

Nesta equação, as unidades da frequência de ressonância e da largura de faixa são ambas hertz, ou ambas rad/s. No último exemplo, $Q = \omega_0 / 2\alpha = \omega_0 L / R$.



Second-Order RLC Filters

FILTER TYPE	CIRCUIT	TRANSFER FUNCTION	DESIGN EQUATIONS
Low-pass		$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ $k = 1$
High-pass		$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ $k = 1$
Band-pass		$H(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ $k = 1$
Band-stop (notch)		$H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ $k = 1$



Sabendo que um filtro maximamente plano (Butterworth) tem sua resposta em frequência dada por $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_c})^{2N}}}$, onde N é a ordem do filtro (número de polos) e que tais polos localizam-se numa circunferência de raio ω_c , igualmente espaçados de um ângulo π/N no semi-plano “s” à esquerda tal que $s = \omega_c e^{\pm(j\pi + \frac{\pi}{2N}k)}$, $k=1:2:N/2$ se N for par ou, no caso de N ímpar, $s = \omega_c e^{(j\pi \pm \frac{\pi}{N}k)}$, k de 0 a $(N-1)/2$, projete um filtro de Butterworth (ache H(s)!) tal que ele atenda as especificações de um filtro passa-baixas com ripple de banda passante igual ao ripple de banda de rejeição igual a 0.1, limite da banda passante $\omega_p=50$ rad/s e limite da banda de rejeição $\omega_p=150$ rad/s. Verifique no Matlab se o seu projeto atende as especificações!





Polinomiais Butterworth normalizados

n	Fatores de polinomiais $B_n(s)$
1	$(s + 1)$
2	$s^2 + 1.414s + 1$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.7654s + 1)(s^2 + 1.8478s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.6180s + 1)(s^2 + 1.6180s + 1)$
6	$(s^2 + 0.5176s + 1)(s^2 + 1.414s + 1)(s^2 + 1.9318s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0.4450s + 1)(s^2 + 1.247s + 1)(s^2 + 1.8022s + 1)$
8	$(s^2 + 0.3986s + 1)(s^2 + 1.111s + 1)(s^2 + 1.6630s + 1)(s^2 + 1.9622s + 1)$



6.5 Diagrama de Bode

O módulo de uma função de transferência em estado permanente de corrente alternada é freqüentemente expresso em *decibéis*, cuja abreviatura é dB, definido como segue.

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

Observe que o ganho em decibéis $|H(j\omega)|_{dB}$ é positivo quando $|H(j\omega)| > 1$, e negativo quando $|H(j\omega)| < 1$.

**A definição só tem significado quando a função for adimensional
(quando sinais de entrada e saída forem ambos tensão, ou ambos correntes)!**

O livro alerta sobre possibilidade de confusão quanto ao dB que historicamente foi definido como uma unidade de ganho de potência e neste caso seria $10 \log (P_{out}/P_{in})$.

Os diagramas de Bode são um método alternativo de se retratar a variação da função de transferência com a frequência angular da entrada. Eles são equivalentes às curvas de resposta em frequência já vistas e consistem de duas curvas: $|H(j\omega)|_{dB}$ em função de ω , e $\angle H(j\omega)$ em função de ω . Em ambos os casos, a frequência angular é desenhada numa escala logarítmica.

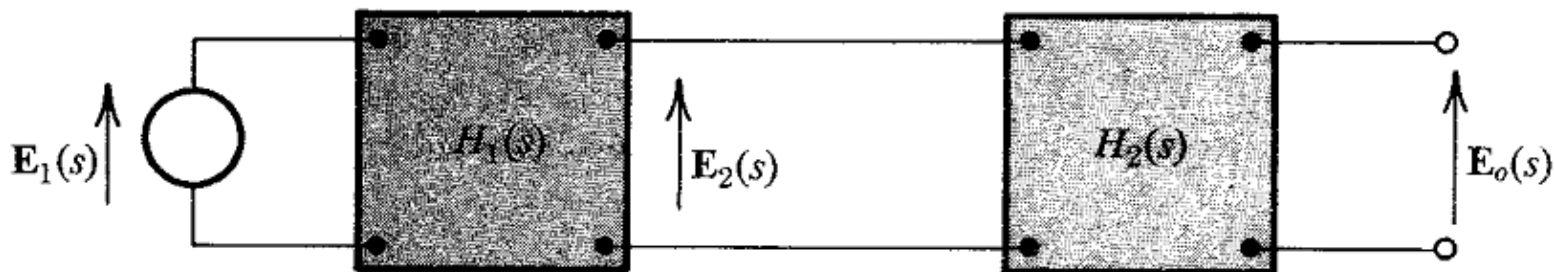


$$H(s) = \frac{E_o(s)}{E_1(s)} = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} \frac{E_o(s)}{E_2(s)} = H_1(s)H_2(s)$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H_1(j\omega)H_2(j\omega)| = |H_1(j\omega)|_{dB} + |H_2(j\omega)|_{dB}$$

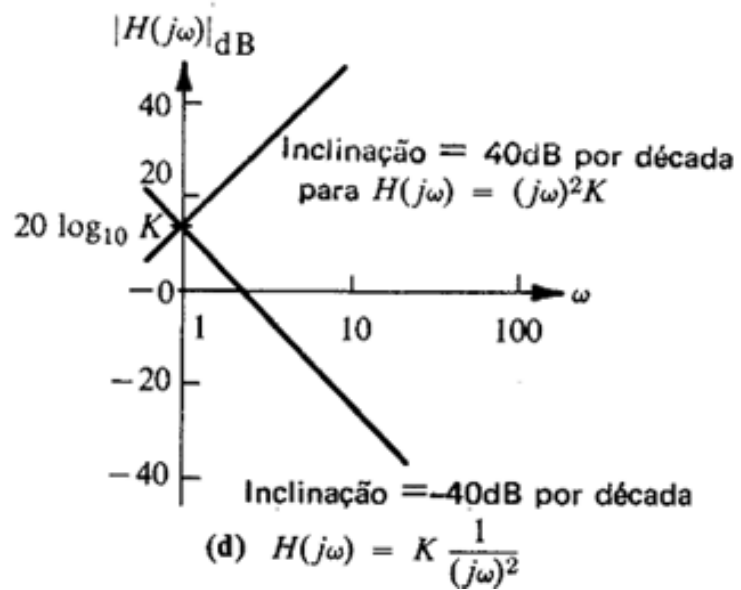
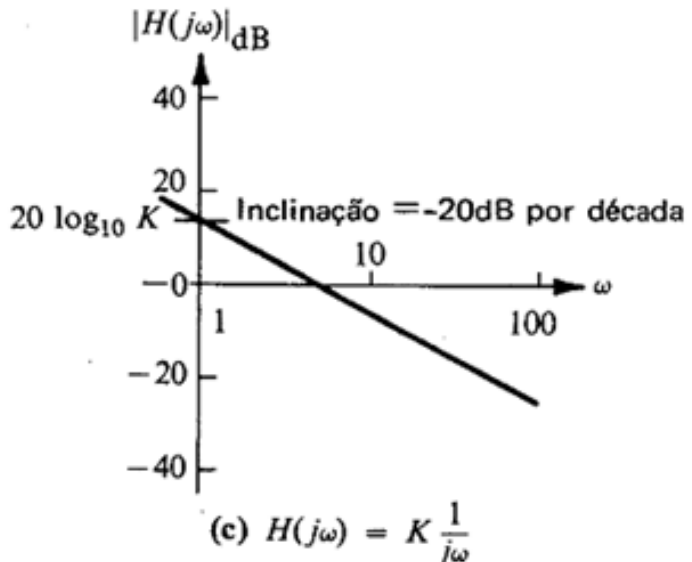
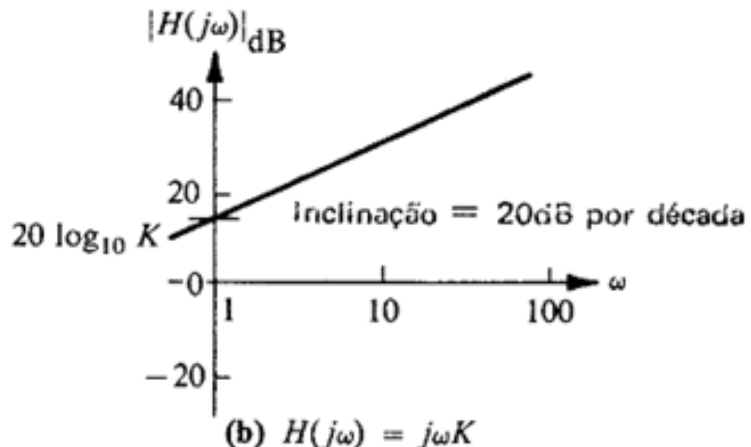
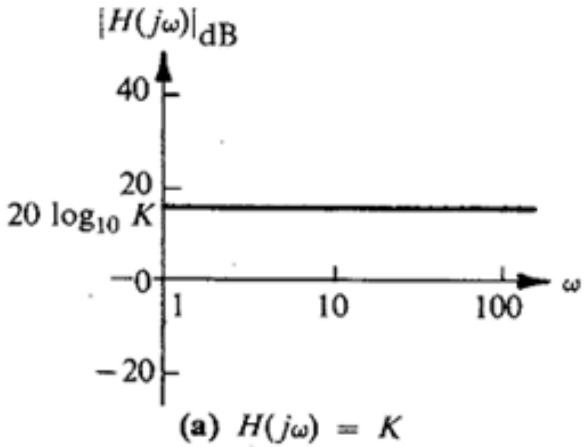
$$\angle H(j\omega) = \angle H_1(j\omega) + \angle H_2(j\omega)$$

Portanto as curvas individuais de decibéis e de ângulos podem ser somadas para se obter as curvas para a combinação em cascata. Esta é uma das razões pelas quais os diagramas de Bode são frequentemente usados na análise de sistemas de controle e de circuitos eletrônicos.



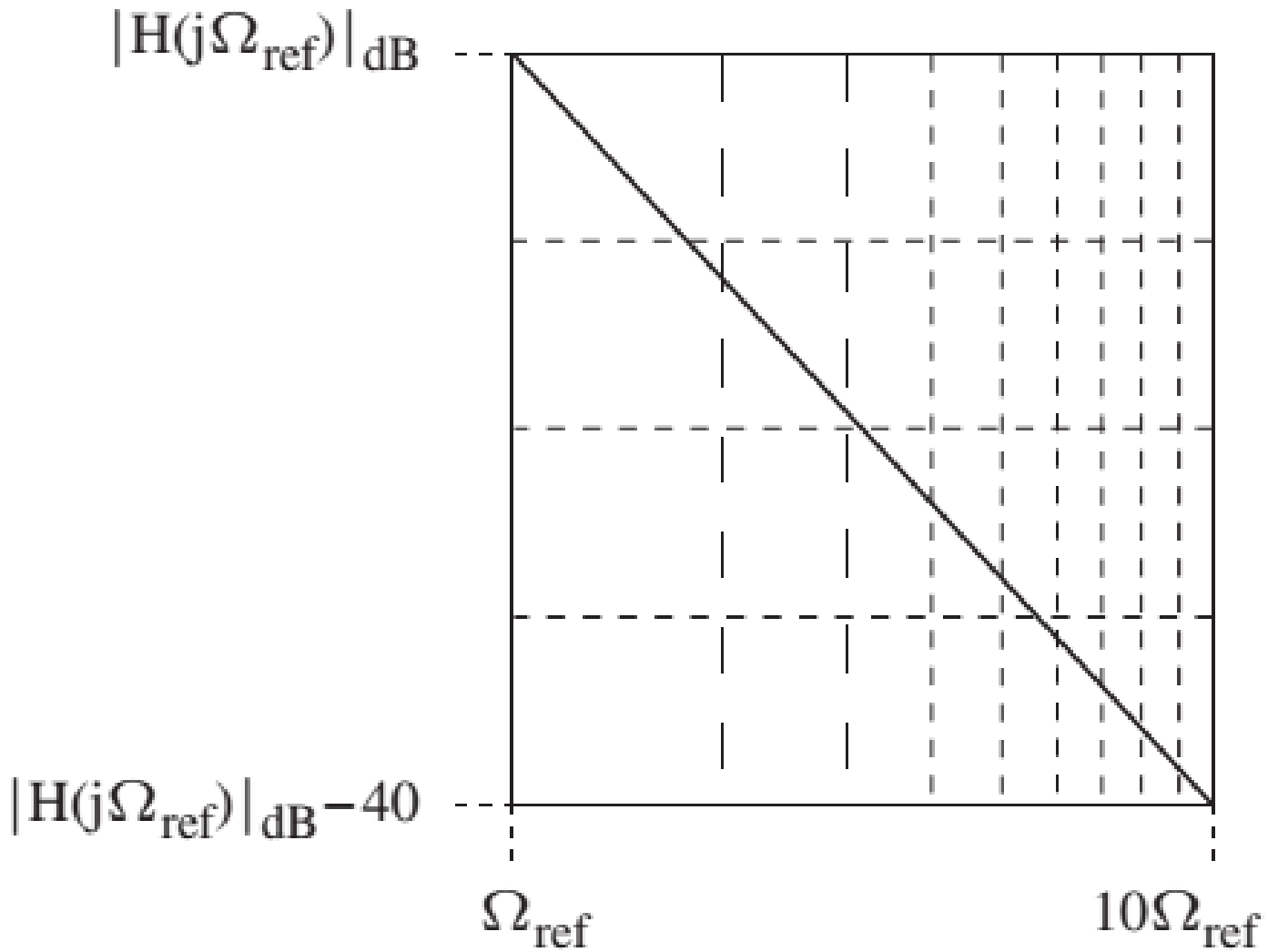


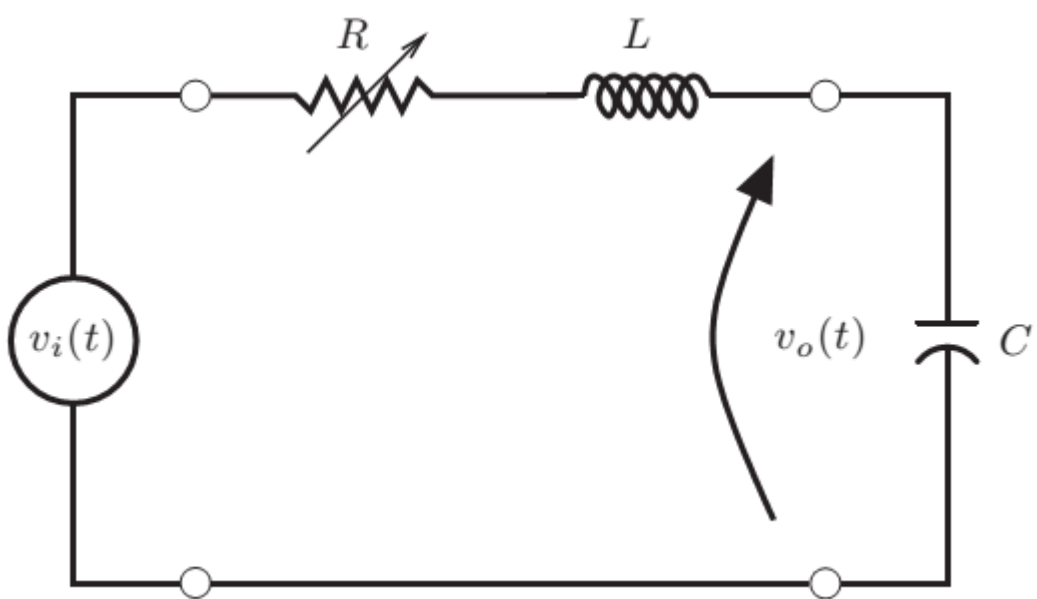
Construa a curva de decibéis para as funções de transferência seguintes, se K é real e positiva.





Queda assintótica de -40dB / década





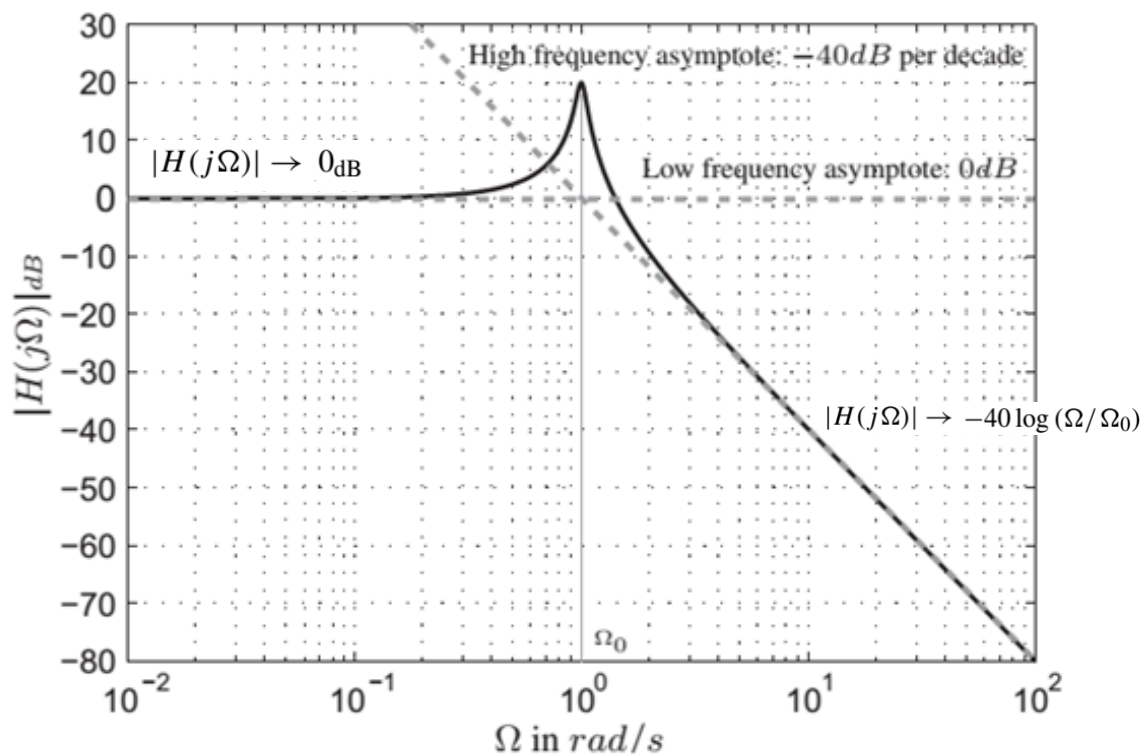
$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^2(R^2C^2 - 2LC) + \Omega^4L^2C^2}$$

It is easy to see that, when Ω tends to zero, the magnitude squared tends to one while, when Ω tends to infinity, the dominant term becomes $\Omega^4L^2C^2$:

- (a) $\Omega \rightarrow 0 \Rightarrow |H(j\Omega)| \rightarrow 1$ or 0_{dB} ;
- (b) $\Omega \rightarrow \infty \Rightarrow |H(j\Omega)| \rightarrow \frac{1}{\Omega^2LC}$ or, in dB, $-40 \log(\Omega/\Omega_0)$, $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.



$$H(s) = \frac{\Omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\Omega_0s + \Omega_0^2}, \text{ where, in our example, } \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ and } \zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$



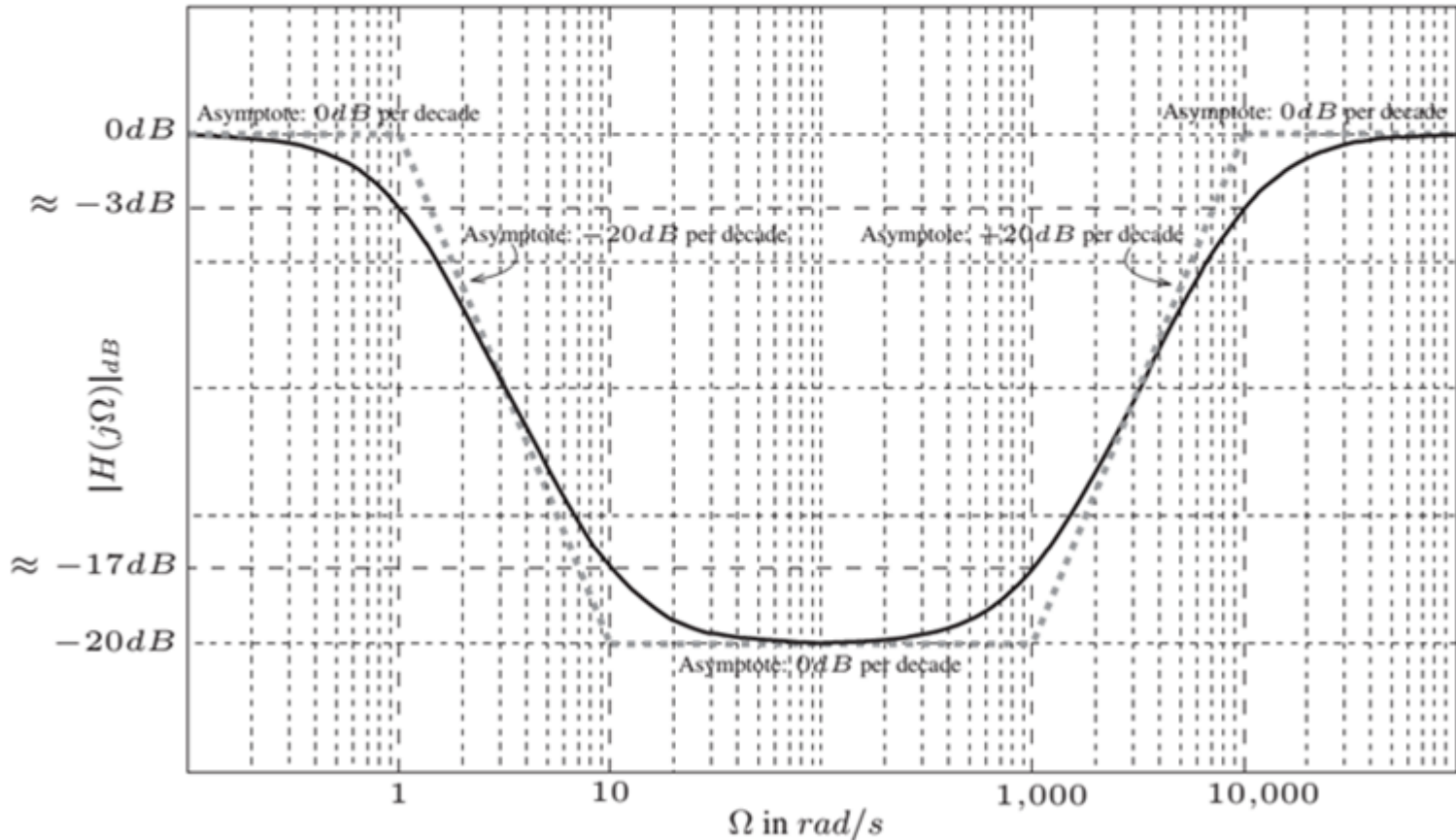
Example of Bode Plot for $H(s) = \frac{\Omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\Omega_0s + \Omega_0^2}$ with $\Omega_0 = 1$ and $\zeta = 0.05$. Note that, for this case, the approximated height of the peak $-20 \log(2\zeta) = 20$ dB works well.

The peak actually occurs in $\Omega = \Omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2}$, peak height equal to $\frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$.



Another example with first order poles and zeros: let transfer function $H(s)$, with poles at -1 and $-10,000$, and zeros at -10 and -1000 , be represented as follows:

$$H(s) = \frac{s^2 + 1010s + 10000}{s^2 + 10001s + 10000} = \frac{(s + 1,000)(s + 10)}{(s + 10000)(s + 1)} = \frac{\left(1 + \frac{s}{1,000}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)}{\left(1 + \frac{s}{10,000}\right) (1 + s)}$$





The magnitude in dB of its frequency response

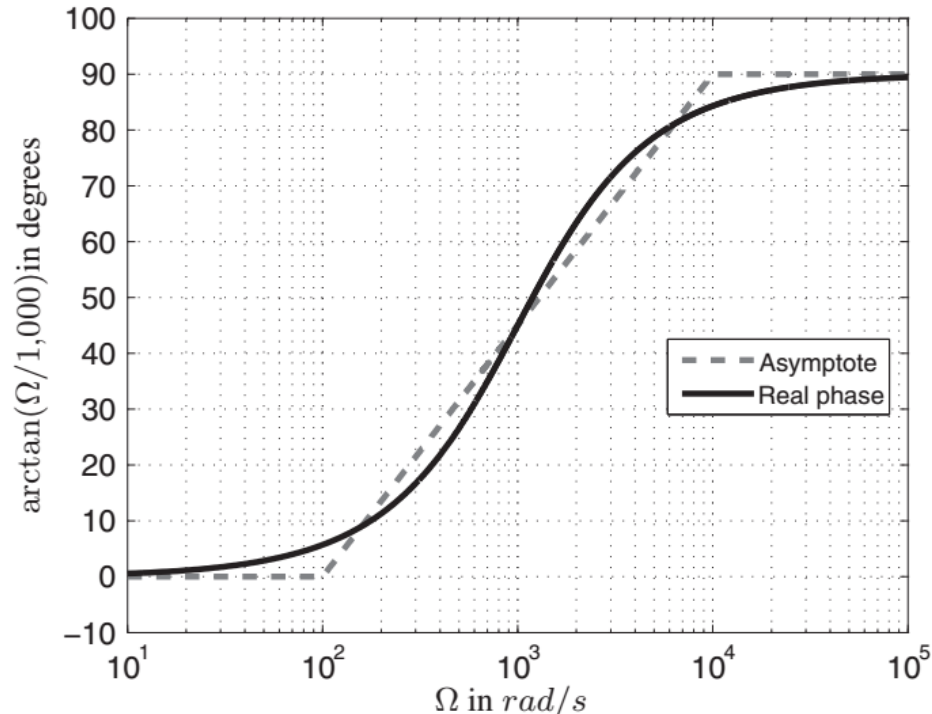
$$|H(j\Omega)|_{dB} = 20 \log \left| 1 + j \frac{\Omega}{1,000} \right| + 20 \log \left| 1 + j \frac{\Omega}{10} \right| - 20 \log \left| 1 + j \frac{\Omega}{10,000} \right| - 20 \log |1 + j\Omega|$$

A sketch of the phase can also be obtained from the poles and zeros of $H(s)$:

$$\angle H(j\Omega) = \angle 1 + j\Omega/1000 + \angle 1 + j\Omega/10 - \angle 1 + j\Omega/10,000 - \angle 1 + j\Omega$$

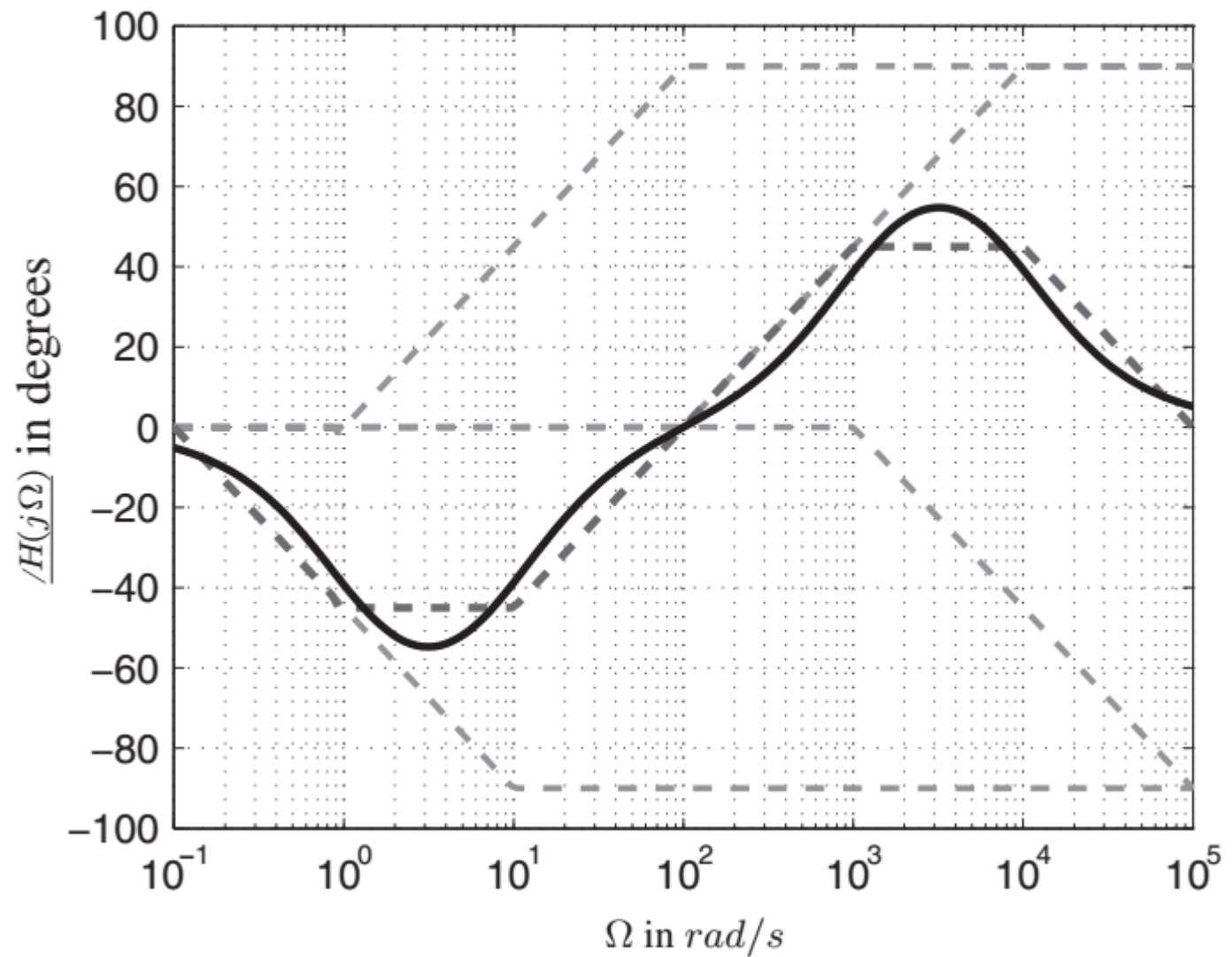
The first term on the right hand side, $\angle 1 + j\Omega/1000 = \arctan(\Omega/1000)$, can be checked for low and high frequencies:

- (a) $\Omega \ll 1000 \Rightarrow \arctan(\Omega/1000) \approx 0$; (b) $\Omega \gg 1000 \Rightarrow \arctan(\Omega/1000) \approx 90^\circ$.





$$\angle H(j\Omega) = \angle(1+j\Omega/1000) + \angle(1+j\Omega/10) - \angle(1+j\Omega/10,000) - \angle(1+j\Omega)$$





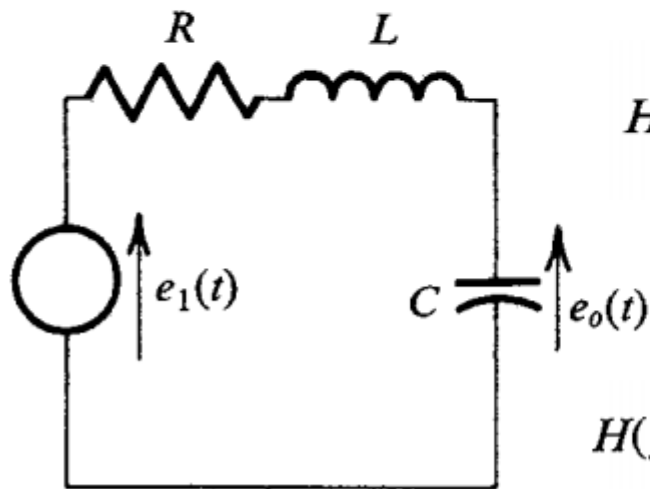
Voltando ao livro-texto

A forma de uma função de transferência típica é

$$H(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots} = \frac{K'(1 + sT_1)(1 + sT_3) \cdots}{(1 + sT_2)(1 + sT_4) \cdots}$$

$$H(j\omega) = \frac{K'(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_3) \cdots}{(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_4) \cdots}$$

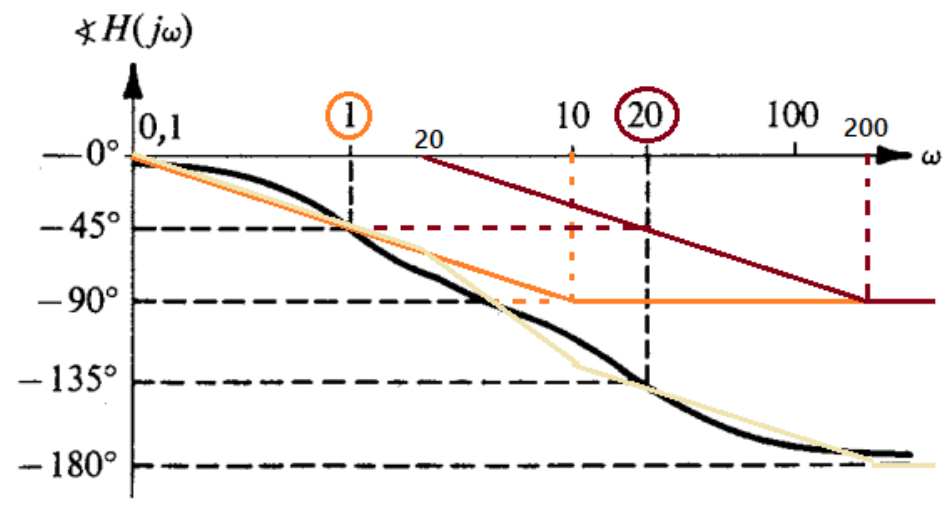
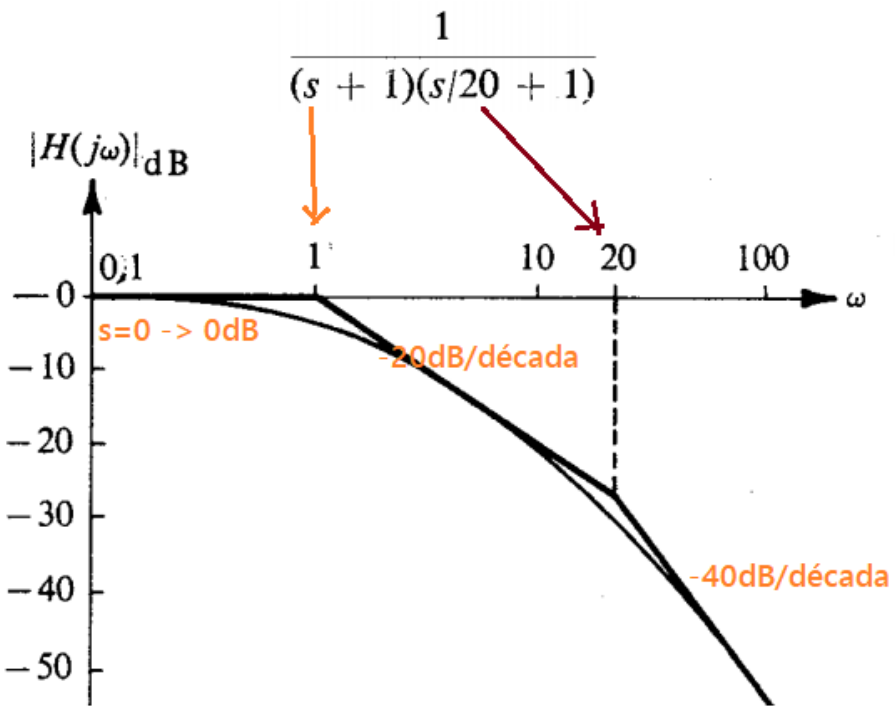
Exemplo. Esboce o diagrama de Bode quando $R = 21 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 1/20 \text{ F}$.



$$H(s) = \frac{1}{LC} \left[\frac{1}{s^2 + (R/L)s + 1/LC} \right] = \frac{20}{s^2 + 21s + 20}$$

$$= \frac{20}{(s + 1)(s + 20)} = \frac{1}{(s + 1)(s/20 + 1)}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega/20 + 1)}$$



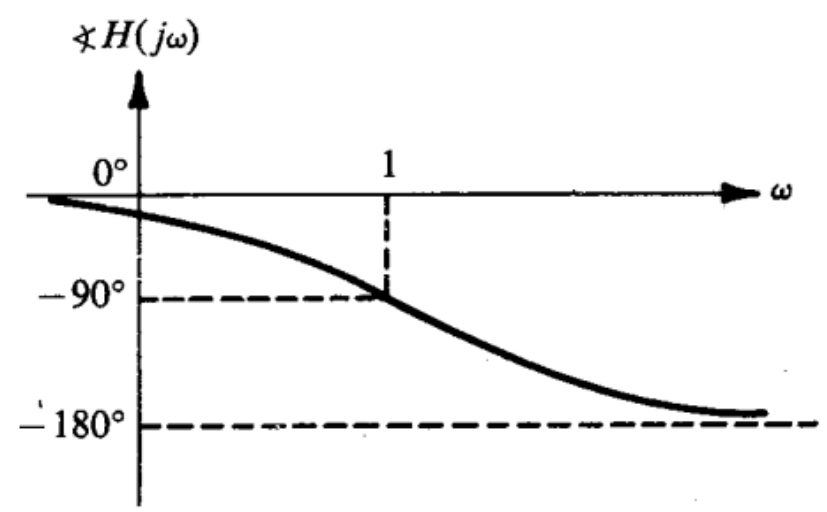
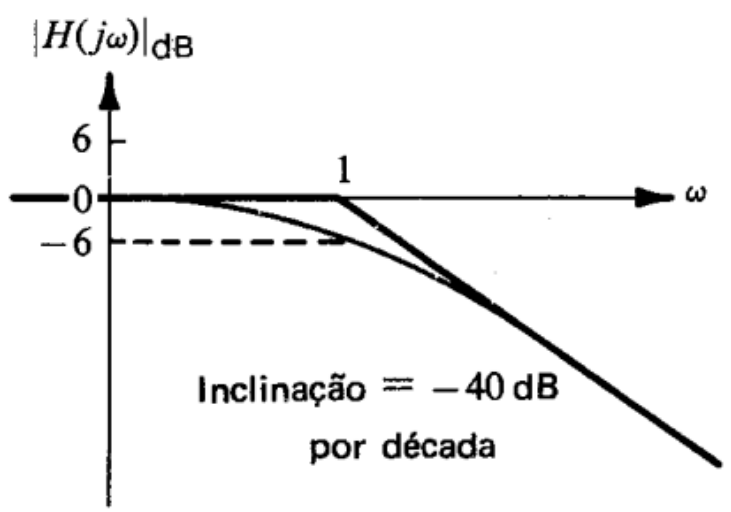


Exemplo 6.5-4. Repita o Ex. 6.5-3 com $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 1 \text{ F}$.

Solução. A função de transferência se torna

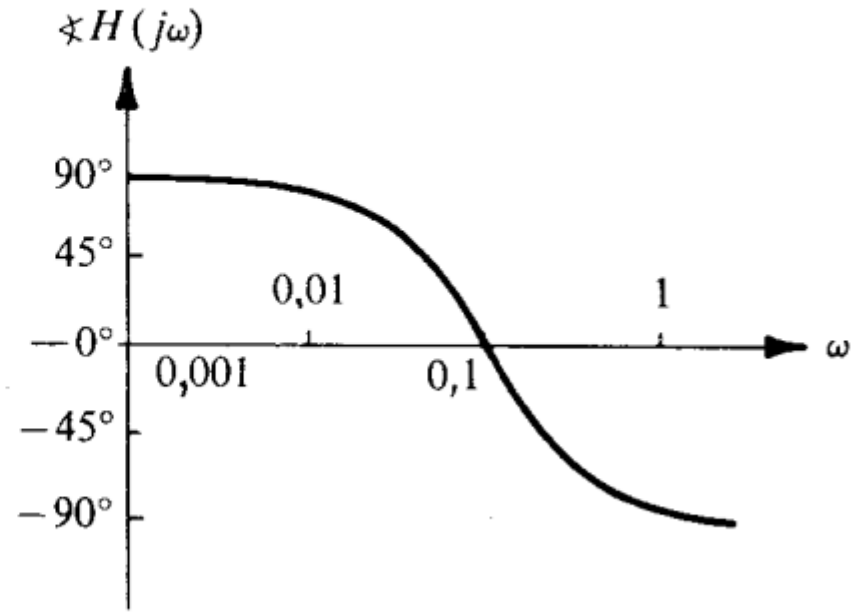
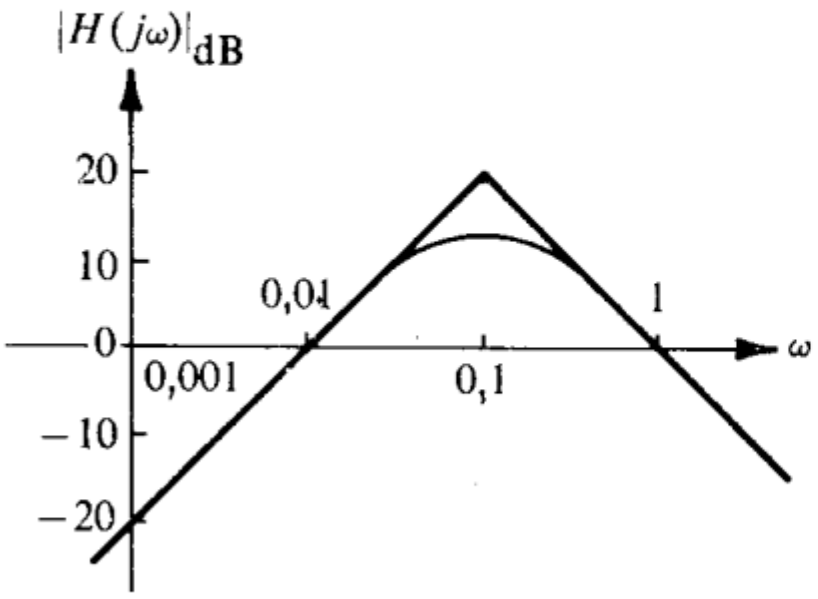
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad \text{e} \quad H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)^2}$$

Devido ao ponto de quebra duplo em $\omega = 1 \text{ rad/s}$, a inclinação da aproximação por segmentos de reta muda de 0 a -40 dB por década, como mostrado na Fig. 6.5-5a. A curva exata agora se desvia da aproximação de 6 dB no ponto de quebra e de 2 dB a uma oitava dele. Portanto, o ponto de quebra duplo não marca o limite da largura de faixa, que, agora, se estende de corrente contínua até 0,64 rad/s. A curva dos ângulos é dada na Fig. 6.5-5b.



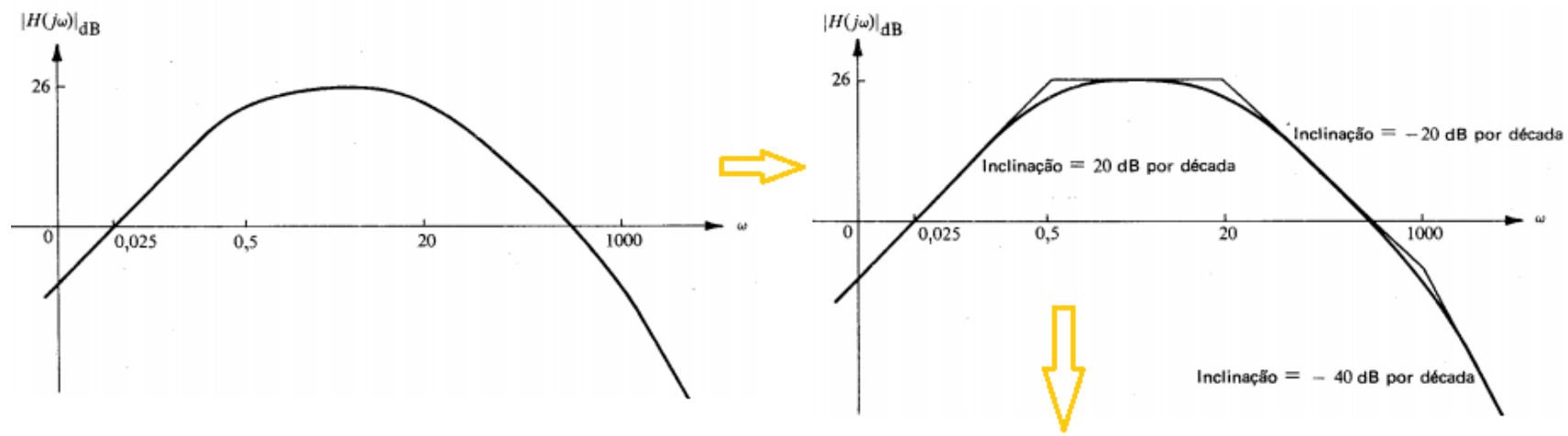


$$H(s) = \frac{100s}{(10s + 1)^2}$$





Exemplo 6.5-6. A função de transferência de um circuito linear pode ser reconstruída da curva de decibéis em segmentos de reta por meio das regras desenvolvidas nos exemplos anteriores. Determine a função de transferência correspondente à curva determinada experimentalmente da Fig. 6.5-7a.



$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{(1 + j2\omega)(1 + j\omega/20)(1 + j\omega/1000)}$$

Há várias maneiras de determinar a constante de ganho K . Para $\omega \ll 0,5$ rad/s,

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} K\omega$$

que deve ser zero quando $\omega = 0,025$ rad/s. Logo, $K = 1/0,025 = 40$. Finalmente,

$$H(s) = \frac{40s}{(1 + 2s)(1 + s/20)(1 + s/1000)}$$



6.6 Season Finale

- Exercício em sala: próximo slide
- Lista de exercícios do capítulo:
6.7, 6.13, 6.20 (letra b), 6.25, 6.29
- VI (last one!)

Pensaram que o Windows 10 deu tela azul e que não teria mais que fazer exercício no quadro, heim? 😊

Exercício em sala (alguém vai para o quadro)

6.6 Determine a função de transferência $H(s) = E_o(s)/E_1(s)$ para a malha simétrica mostrada na Fig. P6.6. Desenhe a distribuição de pólos e zeros no plano s . Em que condições a função de transferência poderá ter um zero no semiplano direito?

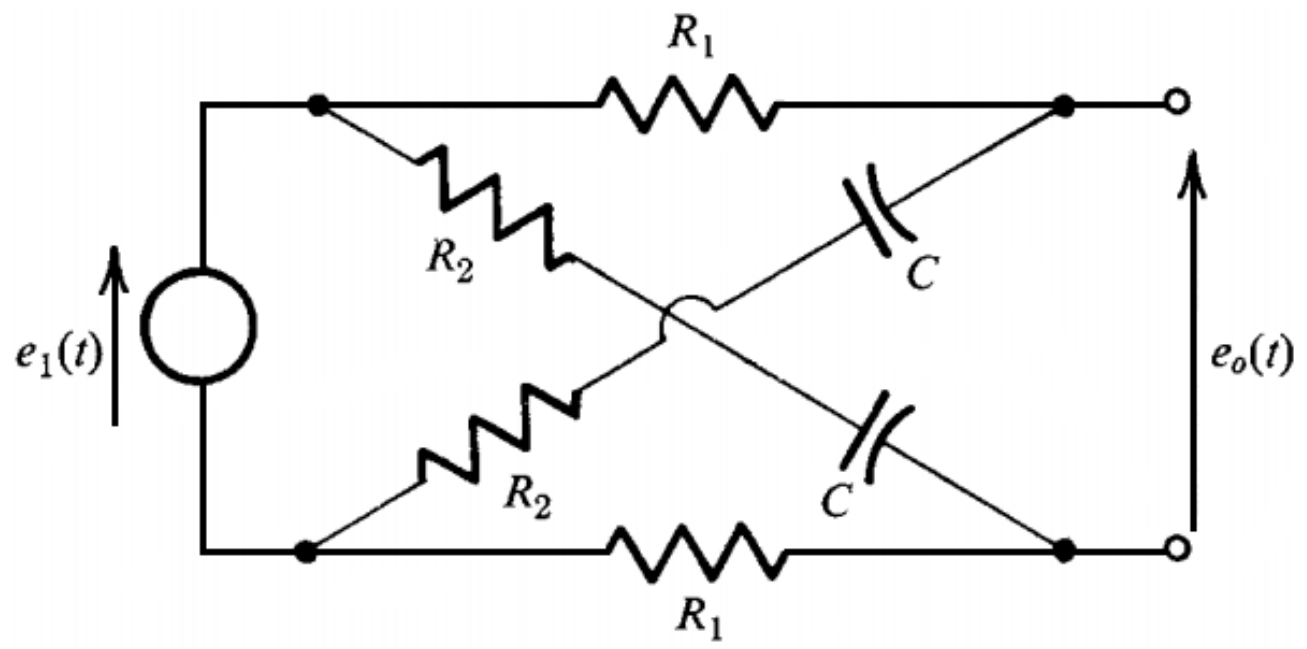


Fig. P6.6





E agora está na hora
daquela última VI !



Hi, my name is
Rufferto!





VI em grupos de 3 ... mãos à obra!

6.20 Determine a função de transferência $H(s)$ para cada um dos circuitos da Fig. P6.20. Desenhe as distribuições de pólos e zeros, e esboce em escala as curvas de resposta em frequência.

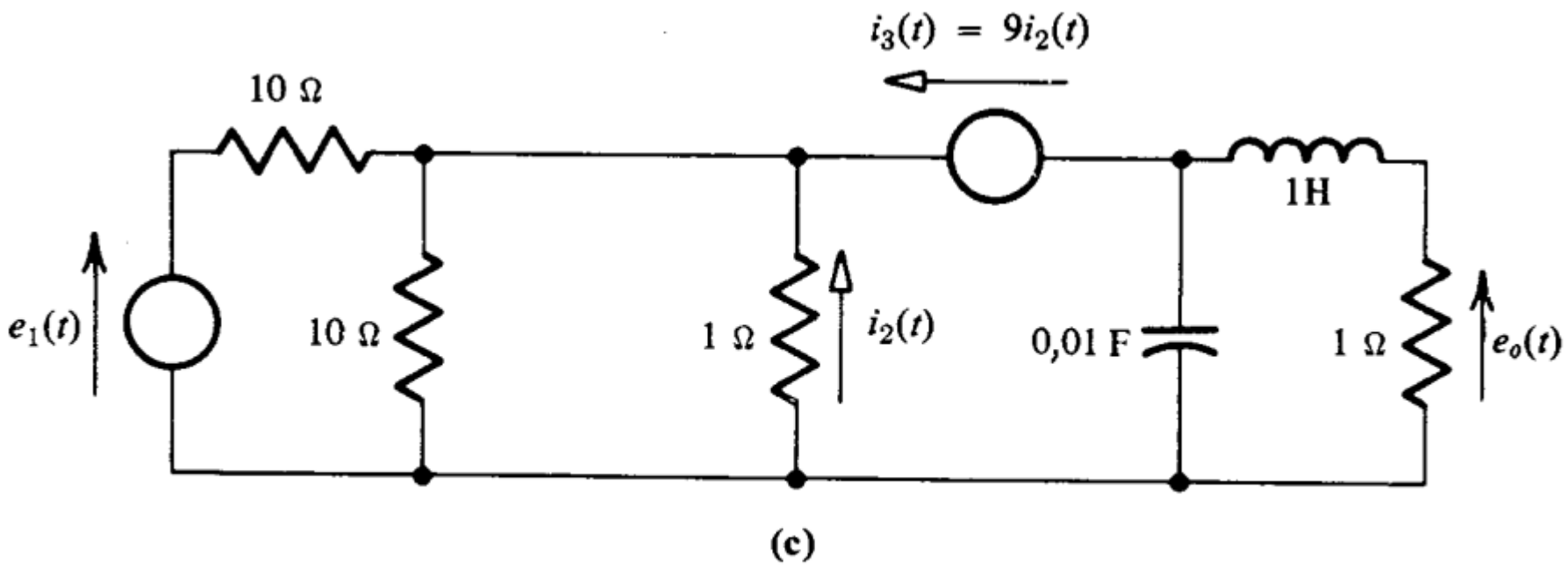


Fig. P6.20

