Capítulo 4
A Solução Clássica de Circuitos

Circuitos Elétricos 1
1º Semestre 2015

Prof. José A. Apolinário Jr., DSc
apolin@ime.eb.br

IME – Department of Electrical Engineering
Rio de Janeiro – Brazil

Sumário

4.1 A Solução Geral das Equações Diferenciais

- Qualquer circuito LIT pode ser descrito por uma equação diferencial com coeficientes constantes, cuja forma geral é

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

- O lado direito da equação acima é conhecido como Função Forçante, *F(t)*
- Se *F(t)* for nula, a equação se reduz à uma ED homogênea:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

que possui ***n*** soluções LI diferentes, $y_1(t)$ a $y_n(t)$

4.1 A Solução Geral das Equações Diferenciais

- A solução da EDH é dada pela combinação linear

$$y_H(t) = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) + \cdots + K_n y_n(t)$$

- *E a solução completa da equação não-homogênea é*

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

onde ***$y_H(t)$***, a solução da equação homogênea correspondente, é conhecida como **solução complementar** e o termo ***$y_p(t)$*** é qualquer solução da ED não-homogênea, sendo conhecida como **solução particular**.

Solução da EDH

- Admite-se que as soluções de

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

tenham a forma $y(t) = \epsilon^{rt}$ com *r* uma constante a ser determinada. Substituindo esta solução na EDH acima, chegamos à equação característica (ou auxiliar) temos:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

que possui *n* soluções de modo a chegarmos em

$$y_H(t) = K_1 \epsilon^{r_1 t} + K_2 \epsilon^{r_2 t} + \cdots + K_n \epsilon^{r_n t}$$

Solução da EDH

Se algumas das raízes da equação característica forem complexas, $y_H(t)$ deverá ser escrita de uma forma diferente. Os coeficientes da equação diferencial que descreve qualquer circuito são reais e, assim, quaisquer raízes complexas da equação característica devem ocorrer em pares de complexos conjugados. Se, por exemplo, uma raiz for $r_1 = -\alpha + j\beta$, onde α e β são reais, então outra raiz deverá ser $r_2 = -\alpha - j\beta$. Pela identidade de Euler $\epsilon^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j \operatorname{sen}\theta$, os termos $K_1\epsilon^{r_1 t} + K_2\epsilon^{r_2 t}$ podem ser combinados da maneira seguinte:

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{-\alpha t}(K_1\epsilon^{j\beta t} + K_2\epsilon^{-j\beta t}) &= \epsilon^{-\alpha t}[(K_1 + K_2)\cos\beta t + j(K_1 - K_2)\operatorname{sen}\beta t] \\
&= \epsilon^{-\alpha t}(K_3\cos\beta t + K_4\operatorname{sen}\beta t) \\
&= K_5\epsilon^{-\alpha t}\cos(\beta t + \phi)
\end{aligned}
$$

Se houver raízes repetidas, os termos não serão independentes e a equação não representará a solução mais geral. Se $r_1 = r_2$, por exemplo, $K_1\epsilon^{r_1 t} + K_2\epsilon^{r_2 t} = (K_1 + K_2)\,\epsilon^{r_1 t} = K\epsilon^{r_1 t}$. Neste caso, pode-se mostrar que $y_1(t) = \epsilon^{r_1 t}$ e $y_2(t) = t\epsilon^{r_1 t}$ são soluções independentes, de maneira que a solução geral será

$$y_H(t) = (K_1 + K_2 t)\,\epsilon^{r_1 t} + K_3\epsilon^{r_3 t} + \cdots + K_n\epsilon^{r_n t}$$

Se a raiz r_1 for repetida k vezes, de maneira que $r_1 = r_2 = \ldots = r_k$, então a solução mais geral será

$$y_H(t) = (K_1 + K_2 t + \cdots + K_k t^{k-1})\,\epsilon^{r_1 t} + \cdots + K_n\epsilon^{r_n t}$$

Solução da EDN-H

- Ela consta de duas partes: a sollução complementar $\boldsymbol{y_H(t)}$, obtida substituindo-se F(t) por zero, e a solução particular $\boldsymbol{y_p(t)}$.
- Dois métodos padrões para a solução particular são a **variação de parâmetros** e o dos **coeficientes indeterminados**.
- O segundo é o mais simples (para a maioria dos circuitos) e neste caso *F(t)* deve conter um nr finito de derivadas LI (t^3 ou cos(t) por exemplo), não sendo válido para circuitos variantes com o tempo.

O método dos coeficientes indeterminados consiste em examinar a função forçante $F(t)$ e estimar a forma de $y_P(t)$. As amplitudes dos termos na solução estimada são então escolhidas de maneira que $y_P(t)$ satisfaça a equação diferencial original para todos os valores de t. Caso a solução estimada $y_P(t)$ não possa ser adaptada para satisfazer a equação diferencial, esta forma estimada de $y_P(t)$ não é conveniente.

Solução da EDN-H

- Soluções particulares para algumas funções forçantes:

F(t)	Solução particular
K	A
K t	At + B
K t^2	At^2 + Bt + C
K senwt	Asenwt + Bcoswt
k e^{-at}	Ae^{-at}

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = t$$

Solução. A equação característica $r^2 + 2r + 5 = 0$ tem raízes em $r = -1 \pm j2$, de maneira que

$$y_H(t) = \epsilon^{-t}(K_1 \cos 2t + K_2 \operatorname{sen} 2t)$$

A substituição da solução particular estimada $y_P(t) = At + B$ na equação diferencial resulta em

$$2A + 5(At + B) = t$$

que requer $5A = 1$ e $2A + 5B = 0$, ou seja, $A = 1/5$ e $B = -2/25$.

$$y(t) = \epsilon^{-t}(K_1 \cos 2t + K_2 \operatorname{sen} 2t) + \tfrac{1}{25}(5t - 2)$$

Solução da EDN-H

Sempre que um termo em $F(t)$ corresponder a uma raiz *repetida* da equação característica (digamos uma raiz de ordem m), os termos correspondentes da solução estimada deverão ser multiplicados por t^m.

Exemplo: $$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = \epsilon^{-2t}$$

Solução. A equação característica $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$ tem uma raiz dupla em $r = -2$, e $y_H(t) = (K_1 + K_2 t)\,\epsilon^{-2t}$.

Portanto, a solução particular normal de $A\epsilon^{-2t}$ será substituída por $y_P(t) = At^2\epsilon^{-2t}$. A substituição desta expressão na equação diferencial dá

$$(2 - 8t + 4t^2)\,A\epsilon^{-2t} + (8t - 8t^2)\,A\epsilon^{-2t} + 4At^2\epsilon^{-2t} = \epsilon^{-2t}$$

A solução geral de uma equação diferencial de n-ésima ordem contém n constantes arbitrárias, $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Estas constantes devem ser calculadas a partir do conhecimento das *condições iniciais*, que não podem ser obtidas da própria equação diferencial, mas que devem ser encontradas no circuito.

4.2 Condições Iniciais

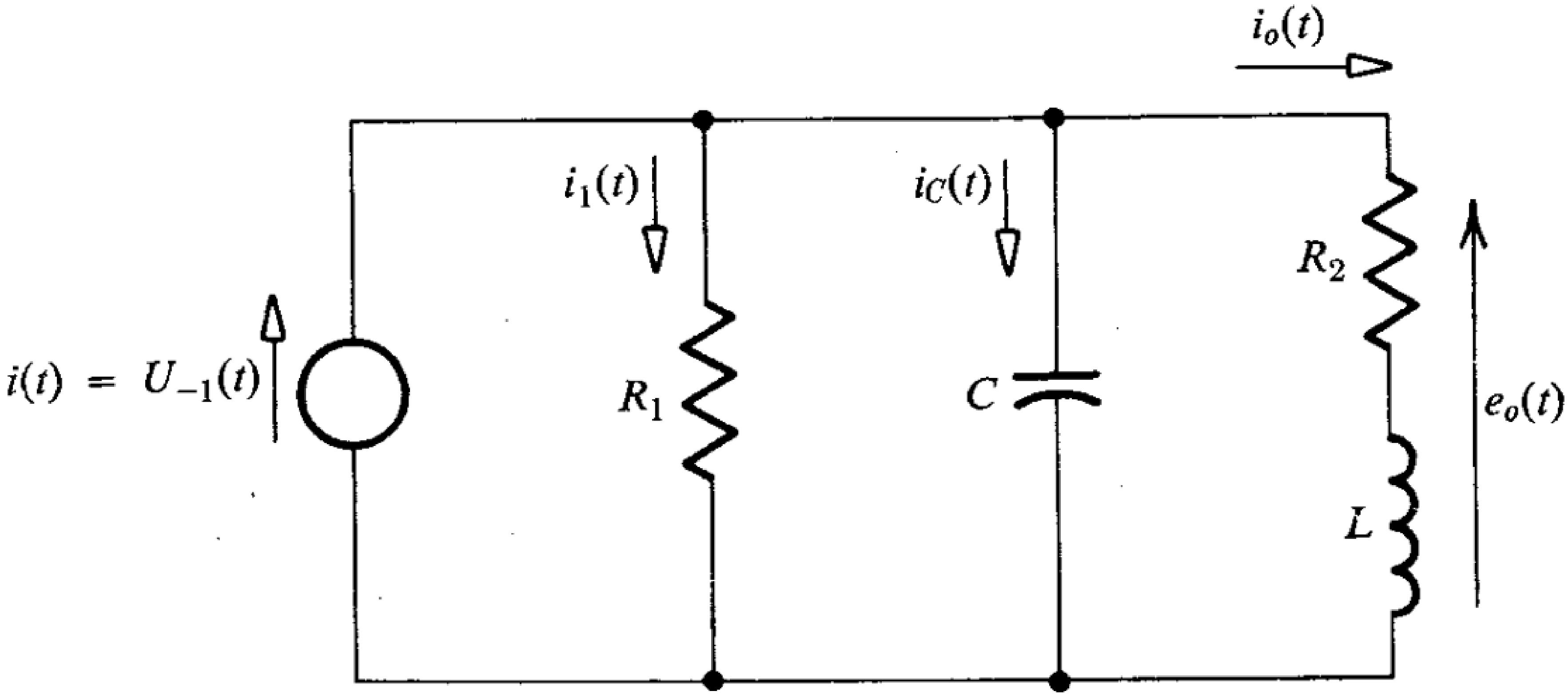
Em geral, a ordem da equação diferencial que relaciona a entrada e a saída de um circuito é a soma do número de capacitâncias e do número de indutâncias, embora em alguns casos a ordem possa ser menor que isto. O número de constantes arbitrárias na solução, e portanto o número de condições iniciais necessárias, é igual à ordem da equação diferencial.

A maior parte dos exemplos deste capítulo envolverá equações diferenciais de segunda ordem e precisará do conhecimento de $y(0+)$ e $[dy/dt]\,(0+)$. O valor inicial da saída pode ser obtido pela aplicação dos Teoremas 3.3-1 a 3.3-3. Se não houver impulsos presentes, a tensão nos terminais de uma capacitância e a corrente que atravessa uma indutância não se podem alterar instantaneamente e devem ter o mesmo valor em $t = 0-$ e em $t = 0+$. Logo que estas grandezas tenham sido determinadas, todas as tensões e correntes no instante $t = 0+$ poderão ser encontradas pelas leis de Kirchhoff.

Freqüentemente o circuito dado não contém energia armazenada para $t < 0$, ou seja, $e_C(0-) = i_L(0-) = 0$. Se, além disto, a fonte aplicada não causar nenhum impulso, então $e_C(0+) = i_L(0+) = 0$.* Com a finalidade de calcular as tensões e correntes iniciais em um circuito sem energia inicialmente armazenada, portanto, as capacitâncias poderão ser substituídas por curto-circuitos e as indutâncias por circuitos abertos, e o circuito inteiro poderá ser transformado em um circuito resistivo. Deve ser enfatizado que as grandezas de_C/dt e di_L/dt não são necessariamente nulas em $t = 0+$, mesmo que $e_C(0+)$ e $i_L(0+)$ sejam nulas.

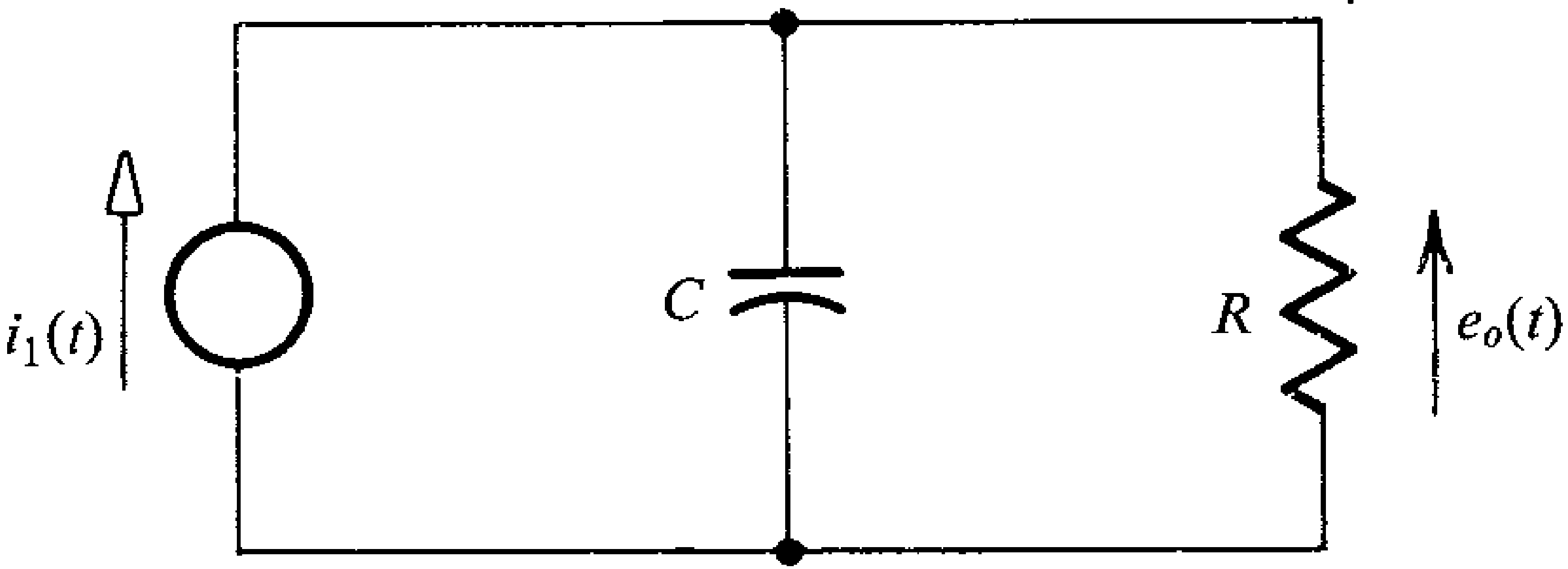
4.2 Condições Iniciais

Ex: Para o circuito da figura abaixo, assumindo não haver energia armazenada para t<0, determine $i_0(t)$.



4.3 A Solução Completa de Circuitos

Sol. ED+Cond. Iniciais = Sol. Completa

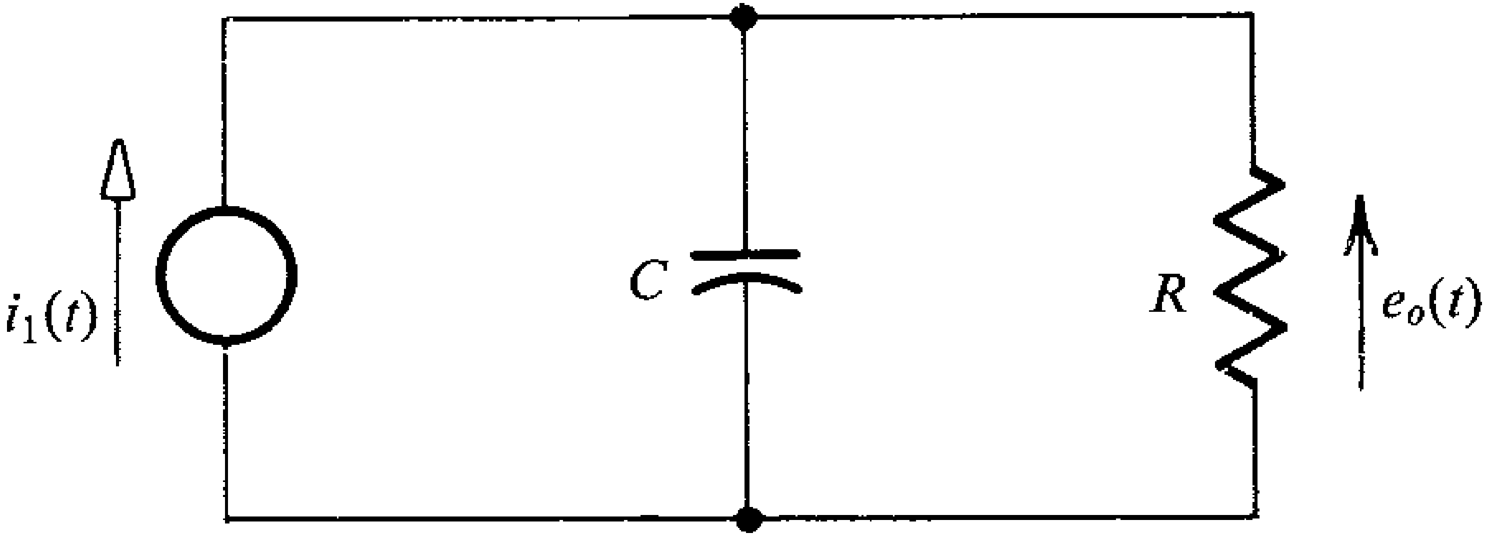


$$\boxed{C\frac{de_o}{dt} + \frac{1}{R}e_o = i_1}$$

$$i_1(t) = U_{-1}(t) \longrightarrow e_o(t) = K\epsilon^{-t/RC} + R$$

$$e_o(0+) = 0 \longrightarrow e_o(t) = R(1 - \epsilon^{-t/RC})$$

Sol. ED+Cond. Iniciais = Sol. Completa



$$\boxed{C\frac{de_o}{dt} + \frac{1}{R}e_o = i_1}$$

$$i_1(t) = (\cos \omega t)\, U_{-1}(t)$$

$$\longrightarrow e_o(t) = K\epsilon^{-t/RC} + \frac{R}{1 + (\omega RC)^2}(\cos \omega t + \omega RC \operatorname{sen} \omega t)$$

$$e_o(0+) = 0 \longrightarrow \quad K = -R/[1 + (\omega RC)^2]$$

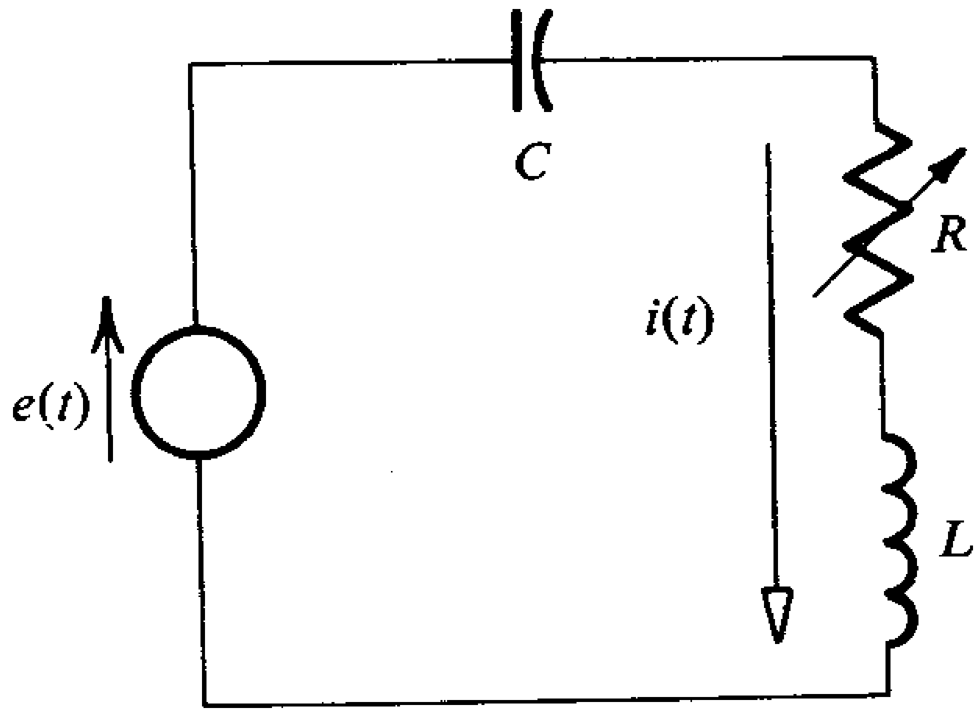
- No caso de várias equações (nodais ou de laços), é necessário chegar-se a uma única ED relacionando entrada e saída
- O livro sugere eliminação de incógnitas indesejadas ou, quando mais complicado, o uso de um operador ***p***–que muito lembra a transformada de Laplace–para gerar uma única ED (todo sistema LIT tem uma única)
- Ocasionalmente, os teoremas da superposição, de Thévenin e de Norton podem ser úteis.

4.4 O Significado Físico das Soluções Complementar e Particular

A solução complementar $y_H(t)$ é a solução à equação diferencial homogênea correspondente, estando a entrada, e portanto, a função forçante $F(t)$, feita igual a zero. A forma de $y_H(t)$ é completamente determinada pelas raízes da equação característica, que, por sua vez, dependem somente do circuito. Se não houver fonte externa para $t > 0$, como ocorre quando o circuito é excitado somente por alguma energia inicialmente armazenada (ou, equivalentemente, sujeito a uma função impulso em $t = 0$), então $y_P(t) = 0$, e $y_H(t)$ é a solução completa. Como a solução complementar representa o comportamento do circuito quando a fonte estiver em repouso, ela é também chamada *resposta livre*. A solução particular $y_P(t)$ é chamada a *resposta forçada*.

A natureza da resposta livre pode ser vista examinando-se as raízes da equação característica. Como as raízes podem ser números reais ou complexos, elas podem ser desenhadas como pontos em um plano complexo.

Esboce o lugar geométrico gerado pelas raízes da equação característica quando a resistência R é variada.



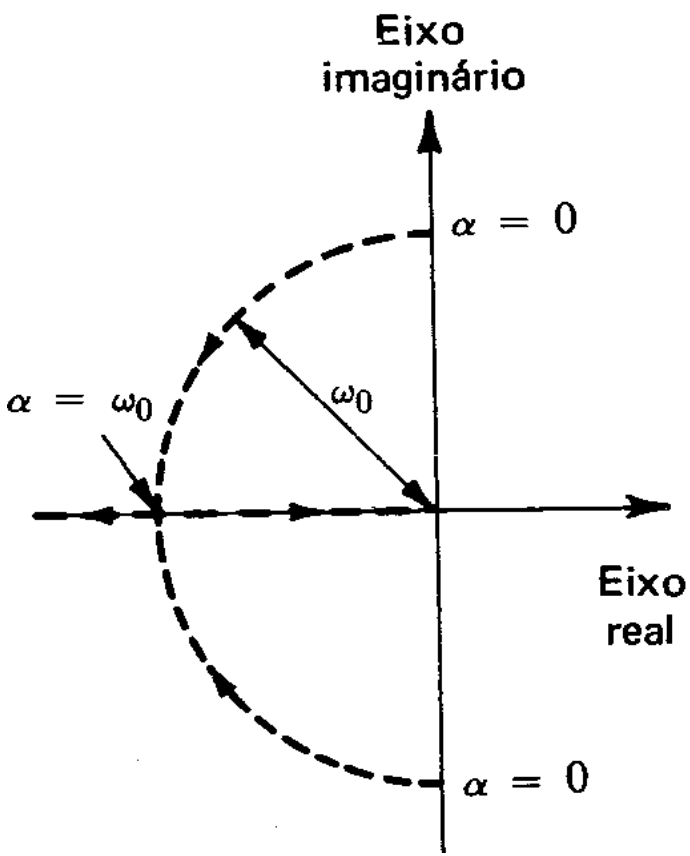
A equação característica $r^2 + (R/L)r + 1/LC = 0$ é reescrita como

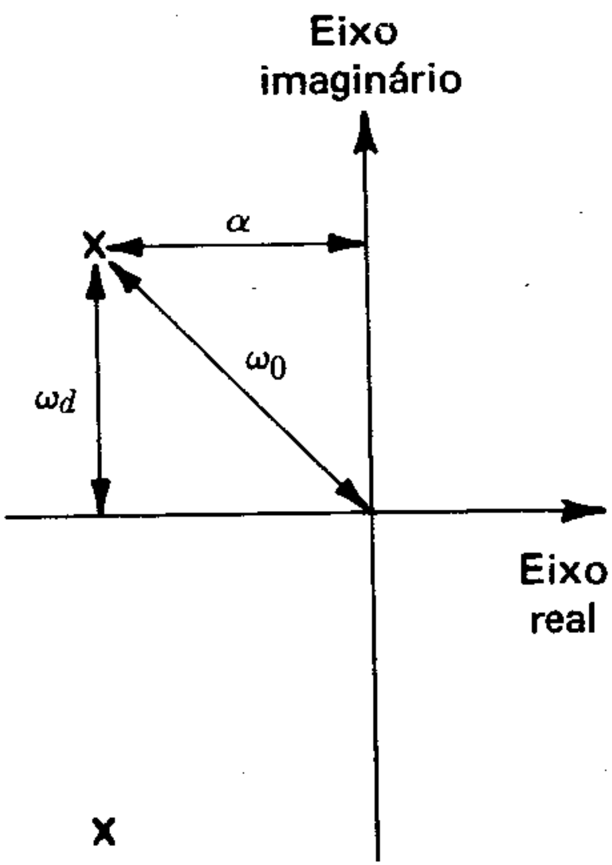
$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0{}^2 = 0$$

Quando α é positivo, mas menor que ω_0, as raízes estão em

$$-\alpha \pm j\omega_d = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

O símbolo ω_d é chamado ***freqüência angular amortecida natural***, pois ele é a frequência angular da resposta livre quando R está presente, enquanto ω_0 é a ***freqüência angular não-amortecida natural***.





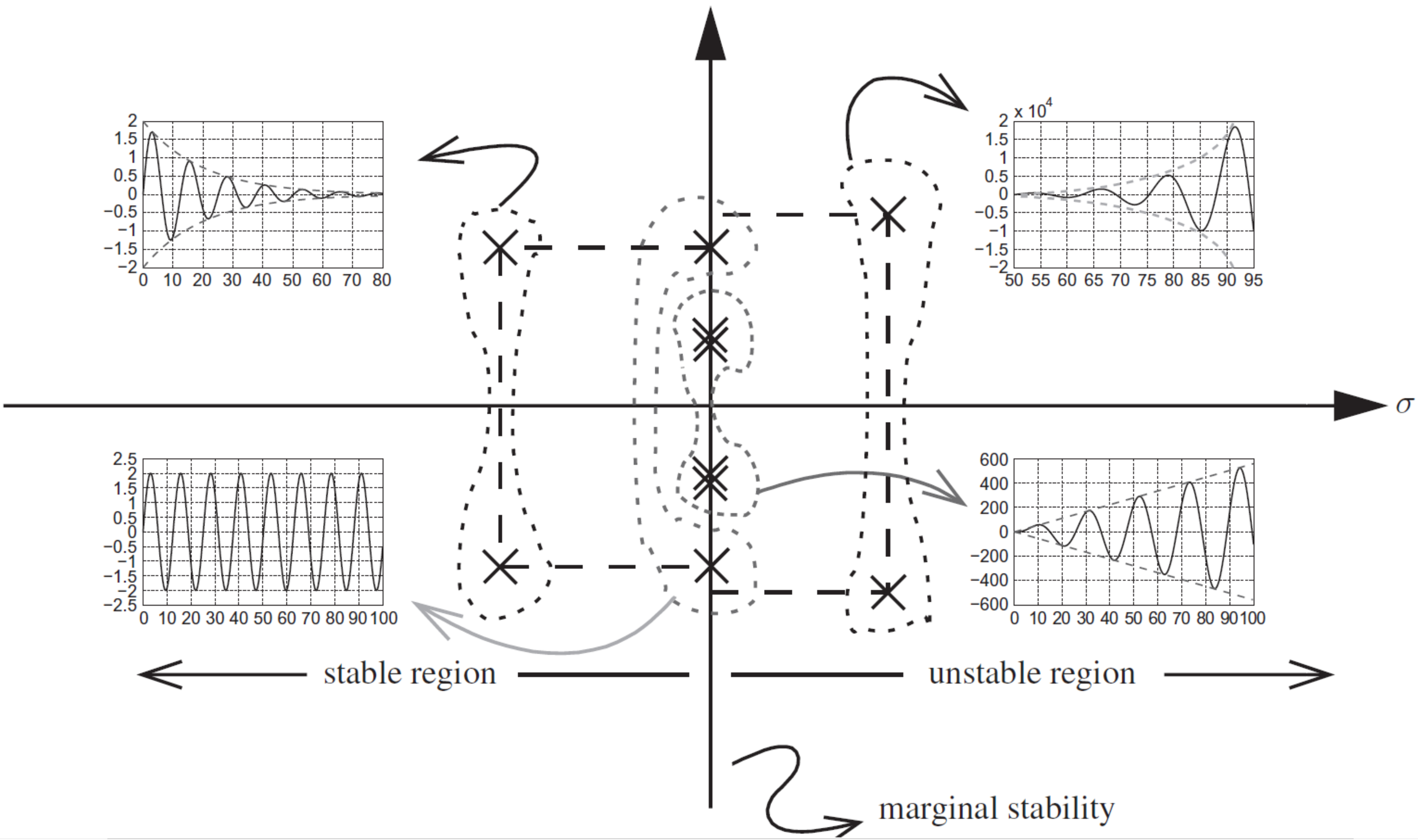
$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0{}^2 = 0, \quad \alpha = R/2L \ \text{ e } \ \omega_0{}^2 = 1/LC.$$

A *taxa de amortecimento* ζ é uma grandeza adimensional que é definida por $\alpha = \zeta\omega_0$, de maneira que a equação característica pode ser reescrita como

$$r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0{}^2 = 0$$

Da discussão acima, a resposta livre é uma senóide de amplitude constante quando $\zeta = 0$, é uma oscilação amortecida quando $0 < \zeta < 1$, e não contém oscilações quando $\zeta > 1$. As condições onde $0 \leq \zeta < 1$, $\zeta = 1$, e $\zeta > 1$ são frequentemente chamadas os casos subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido, respectivamente.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$


x 10^4
σ
stable region
unstable region
marginal stability

Ao invés de dividir a resposta de um circuito em componentes livre e forçado, ela pode também ser dividida em componentes transitório e de estado permanente:

$$y(t) = y_T(t) + y_{ss}(t)$$

O componente *transitório* $y_T(t)$ é aquela parte da solução que decresce para zero quando t se torna muito grande. O componente de *estado permanente* $y_{ss}(t)$ consiste dos termos que continuam depois que os termos transitórios tiverem desaparecido.

Se todas as raízes da equação característica estiverem no semiplano esquerdo aberto, e se a resposta forçada não desaparecer quando t tender para infinito, então $y_T(t) = y_H(t)$ e $y_{ss}(t) = y_P(t)$. Na seção seguinte e no Cap. 5 admitir-se-á que $y_{ss}(t) = y_P(t)$.

4.5 O Estado Permanente em DC

Uma fonte que é igual a uma constante para todos os valores de t é conhecida como uma *fonte de corrente contínua*. Portanto, uma função degrau é equivalente a uma fonte de corrente contínua aplicada subitamente ao circuito.

Na consideração da resposta forçada de um circuito, a forma de todas as tensões e correntes é determinada pela forma da entrada. Nesta seção, admitimos que as entradas sejam fontes de corrente contínua e que a resposta livre $y_H(t)$ decresce para zero, de maneira que $y_P(t) = y_{ss}(t)$. Então todas as tensões e correntes terão valores constantes no estado permanente.

Elemento	*Equação de Definição*	*Comportamento no Estado Permanente*
Resistência	$e = R\,i$	$\frac{e}{i} = R$
Capacitância	$i = C\frac{de}{dt}$	$i = 0$ (circuito aberto)
Indutância	$e = L\frac{di}{dt}$	$e = 0$ (curto-circuito)

4.6 A Resposta Forçada a e^{st}

A resposta a uma entrada com a forma ϵ^{st}, onde s é um parâmetro independente que é uma constante com relação a t, é importante para o material dos Caps. 5, 6, 9 e 10. A solução particular tem a forma $y_P(t) = H(s)\epsilon^{st}$, onde $H(s)$ é um fator multiplicativo cujo valor depende do parâmetro s, mas não de t.

$$y_P(t) = H(s)\, \epsilon^{st} \quad \text{quando} \quad x(t) = \epsilon^{st} \tag{4.6-1}$$

A forma geral da equação diferencial relacionando a entrada e a saída de um circuito, como dado na Eq. 4.4-1, é

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \tag{4.6-2}$$

Substituindo as Eqs. 4.6-1 em 4.6-2, obtemos

$$(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0)\, H(s)\, \epsilon^{st} = (b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0)\, \epsilon^{st}$$

portanto

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{4.6-3}$$

Exemplo:

4.19 Na Fig. P4.19 a chave K esteve fechada durante tempo suficiente para que quaisquer transitórios anteriores tenham desaparecido. Se a chave se abre em $t = 0$, determine e esboce $i(t)$ para todo $t > 0$. Determine o valor numérico de $i(t)$ no primeiro máximo e no primeiro mínimo.

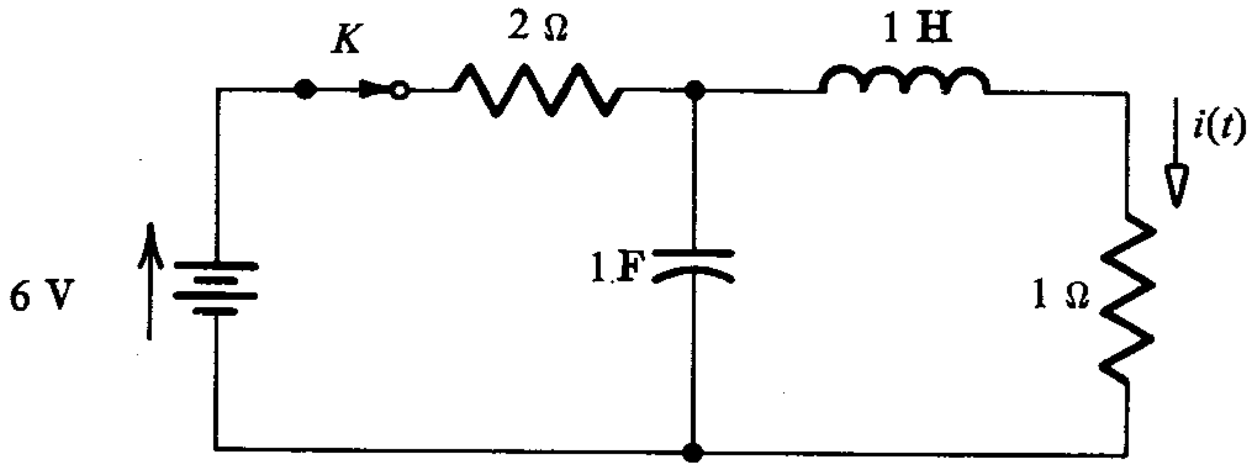


Fig. P4.19

Lista Cap 4:

4.3 / 4.7 / 4.13 / 4.21/ 4.25